Prove d'esame a.a. 2011–2012

Andrea Corli*

13 dicembre 2012

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2011–12, relativi al Corso di Analisi Matematica I (semestrale, 12 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

10-11-2011 - Prima prova parziale

1. Sia $A = \left\{ \dfrac{\log n}{n};\ n = 2, \ldots \right\}$. Calcolare l'insieme dei maggioranti, minoranti, sup e inf di A.

2. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\log(n!)}$.

3. Disegnare i grafici approssimativi delle funzioni $f(x) = 2^{\log x}$, $g(x) = \left|\frac{1}{2} - e^{-|x|}\right|$, $h(x) = 1 - \log(2 - 3x)$.

4. Sia f una funzione pari e g una funzione dispari. Dire se $g \circ f$ e $f \circ g$ sono pari, dispari o non simmetriche. Dare un esempio di una funzione $h \neq 1$ tale che $h(-x) = \dfrac{1}{h(x)}$.

5. Calcolare un asintotico semplice di $f(x) = (1 - x)\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$ e di $g(x) = \dfrac{\sin(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ per $x \to 0$.

6. Calcolare gli asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della funzione $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{|x| - 2}$. Disegnare quindi un grafico approssimativo di f.

7. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 2}{x + 3}\right)^x$.

8. (Matlab) Usare un ciclo `for` per calcolare e quindi rappresentare graficamente gli elementi della successione definita da $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$ per $n = 2, 3, \ldots, 10$.

9-1-2012 - Seconda prova parziale

1. (Matlab) Usare un ciclo `for` per calcolare simbolicamente gli integrali $\int_n^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$, per $n = 1, 2, 3$, e creare un vettore contenente i tre risultati.

2. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x^x - 1}$.

3. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\log(\sin x) \cdot \mathrm{tg}\, x}$.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

4. Dire per quali $\alpha > 0$ è convergente l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha - 1}\, dx$.

5. Dire per quali $\alpha > 0$ l'equazione $xe^{-\alpha x} = 1$ ha una soluzione positiva, citando un teorema noto. Rappresentare con un disegno.

6. Si consideri la funzione $f(x) = 3\sqrt[3]{x-2}$ in $[0, 3]$. Dire se f è continua e se è derivabile. Disegnare un grafico approssimativo di f e di f'. Perché non si può applicare il teorema di Lagrange a f, relativamente all'intervallo $[0, 3]$? Far vedere con un calcolo diretto che la tesi del teorema rimane valida.

7. Calcolare l'area della regione di piano contenuta nel semipiano $y \geq 0$ e compresa tra i grafici delle funzioni $f(x) = \log(1 + x)$ e $g(x) = \log(3 - 2x)$, per $x \in [0, 1]$. Rappresentare con un disegno.

8. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

24/1/2012

1. Si consideri la funzione $f(x) = 3x^4 + x^3 - 6x^2 - 3x + 1$. Scrivere un breve script di Matlab che ne calcola uno zero e che disegna il grafico di f e della sua derivata numerica in uno stesso grafico.

2. Calcolare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $A = \left\{\cos\left(\frac{1}{n}\right);\ n = 1, 2, , \ldots\right\}$ e dire se sono rispettivamente massimi e minimi di A.

3. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{10}{n}\right)$.

4. Motivare il fatto che la funzione $f(x) = \pi + \operatorname{arctg} x$ è invertibile. Calcolare f^{-1}. Disegnare un grafico approssimativo di f e di f^{-1}.

5. Dire se la funzione $f(x) = |x - 1| \log x$ è di classe C^1 nel suo dominio. Disegnare un grafico approssimativo di f.

6. Cercare $a > 0$ in modo che $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = 2$.

7. Dire se è convergente l'integrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{\log(x)}}\, dx$.

8. Studiare la funzione $f(x) = 3x^4 + x^3 - 6x^2 - 3x + 1$, specificando in particolare quanti zeri ha.

14/2/2012

1. Calcolare il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{q-1}{2}\right)^n - \left(\frac{q+1}{3}\right)^n\right)$ per $q \in \mathbf{R}$.

2. Studiare la convergenza della serie $(a) : \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 4^n}$, $(b) : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} n)}{n}$.

3. Per quali valori dei parametri $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ la funzione $f(x) = x^a + \dfrac{\sin x^b}{x^c}$ ha un asintoto obliquo?

4. Calcolare le derivate delle funzioni 2^{3^x} e $\log_x(1 + x)$.

5. Si consideri la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$. Disegnarne un grafico approssimativo. Discutere l'invertibilità di f; calcolare la sua inversa (eventualmente di una sua restrizione) e disegnarne il grafico.

6. Sia f una funzione di classe C^1 in $[0, +\infty)$, con $f(0) = 0$. E' vero che $|f'(x)| \leq 1 \iff |f(x)| \leq x$?

7. Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$.

8. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

21/2/2012

1. Calcolare il dominio e poi le derivate delle funzioni
   $f(x) = 2^{x \ln x}$,
   $g(x) = \dfrac{1}{1 + \cot x}$,
   $h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{\ln x}}$.

2. Sia $a > 0$; calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax}\, dx$.

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^2}{x - \log(1+x)}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1+} (x-1)^{\ln x}$.

4. Calcolare, usando la definizione di limite, il $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\log n}$.

5. Disegnare un grafico approssimativo delle funzioni $f(x) = x(1-x)$ e $g(x) = x(1-x^2)$ in $[0,1]$, stabilendo in particolare la loro posizione reciproca. Calcolare il punto $x_* \in [0,1]$ in cui la distanza verticale $|f(x) - g(x)|$ tra i due grafici è massima, specificando a quanto ammonta.

6. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^4}\, dx$.

7. Studiare la convergenza delle serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n - 3^n}$, $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\log(\log n)}$.

8. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}$.

20/6/2012

1. Sia $E = \left\{x \in \mathbf{R};\ \dfrac{1}{e} < e^{-x} \leq 1\right\}$. Calcolare $\sup E$, $\inf E$ e, se esistono, $\max E$, $\min E$.

2. Siano a e b numeri reali con $b > 1$. Studiare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n}$ al variare di a e b.

3. Disegnare un grafico approssimativo della funzione $f(x) = \big|1 - |x-1|\big|$, facendo vedere come lo si deduce, passo dopo passo, da quello della funzione $l(x) = x - 1$. Dedurre dal grafico i punti di non derivabilità della funzione f.

4. Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ nell'intervallo $[0, \pi/4]$, calcolando il punto c che compare nell'enunciato del teorema. Rappresentare con un disegno.

5. Esiste il $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$? Se sì, calcolarlo; se no, provare che non esiste.

6. Calcolare $\int_0^{\ln 2} x \cosh x \, dx$ semplificando il più possibile i calcoli.

7. Provare, tramite i criteri di convergenza noti, che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \, dx$ è convergente. Quindi calcolarlo.

8. Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$.

10/7/2012

1. Calcolare il $\lim_{n\to\infty} \left(\log(n+1) - \frac{n+1}{n} \log n \right)$.

2. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n})^n}$.

3. Siano f e g due funzioni. Calcolare la derivata della funzione composta $h(x) = f\left(\frac{1}{g(\frac{1}{x})}\right)$. Calcolare esplicitamente h nel caso $g(y) = y^{-2}$ e $f(y) = \frac{1}{g(y)}$.

4. Esistono funzioni f tali che non esiste il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ma esiste invece il $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$?

5. Sia f la funzione definita in $[0,3]$ così: $f(x) = 0$ se $x \in [0,1] \cup [2,3]$, $f(x) = 1$ se $x \in (1,2)$. Disegnare un grafico di f. Calcolare $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$. Disegnare un grafico di F. E' derivabile la funzione F? Commentare.

6. Trovare un numero $a > 0$ in modo che $\int_0^a \tanh x \, dx = 1$. Rappresentare con un disegno.

7. Calcolare $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx$.

8. Si consideri la funzione $f(x) = \sin(\log x)$. Determinarne il dominio, i limiti significativi, i punti stazionari, la crescenza. Dedurre da queste informazioni un grafico approssimativo.

3/9/2012

1. Dire se esiste $b > 1$ tale che $n^2 < 2^{\log_b n}$ definitivamente.

2. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sin n}}$.

3. Calcolare, se esistono: *(a)*: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$; *(b)*: $\lim_{x\to+\infty} (\log_3(1+2^x) - x \log_3 2)$.

4. Dire se la funzione $f(x) = |x|(e^{|x|}-1)$ è continua, derivabile, di classe C^1.

5. Si consideri la funzione $f(x) = e^x$ nell'intervallo $[a,b]$, con $0 < a < b$. Applicare il teorema di Lagrange, calcolando esplicitamente un punto c. Applicare il teorema della media integale, calcolando esplicitamente un punto d. Spiegare il risultato ottenuto.

6. Calcolare $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \, dx$.

7. Sia $a > 1$. Calcolare l'area della regione del primo quadrante, compresa tra i grafici delle funzioni $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3^x$ e la retta $y = a$. Rappresentare con un disegno.

8. Studiare la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

24/9/2012

1. Calcolare estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo dell'insieme $\{e^{-x};\ x \in [0, +\infty)\}$.

2. Calcolare il $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3^n - \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k\right)$.

3. Dire se esistono o meno i seguenti limiti; in caso affermativo, calcolarli. (a) $\lim_{x\to+\infty} x e^{\sin x}$; (b) $\lim_{x\to+\infty} \sin(e^x)$.

4. Sia $f(x) = x^2 - x$. Disegnare un grafico approssimativo di f. Disegnare i grafici di $f(x-2)$, $f(x)+2$, $f(2x)$, $f(x/2)$.

5. Ha soluzioni l'equazione $\log x + \frac{1}{x} = 0$?

6. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}\, dx$.

7. Sia f la funzione definita da $f(x) = x \log x$ se $x > 0$ e $f(0) = 0$. Dire perché f è integrabile in ogni intervallo $[0, a]$, con $a > 0$. Calcolare la funzione integrale di f relativa al punto 1.

8. Studiare la funzione $f(x) = 3^x - 2^x$.