Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti del corso di Analisi Matematica 2 dal Corso di Laurea Triennale di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Ferrara.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida relativa agli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire un buon libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. Viene fornita in bibliografia una lista di testi che si ritengono validi per lo studio della materia. La funzione di questi appunti è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei sono molto buone e ben fornite di ottimi testi. Tra i vari testi disponibili consigliamo sicuramente il testo [3] o la sua edizione precedente [2]; un altro ottimo testo è [4]

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto è possibile che alcune parti vengano corrette ed integrate durante il corso.

Michele Miranda
Ferrara, 29 novembre 2019

Indice

Appendice A

I Numeri Complessi

In questo capitolo daremo la definizione e le principali proprietà di un nuovo insieme numerico: il campo[1] dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

La motivazione che spinge ad introdurre questo nuovo insieme numerico, quantomeno per il presente corso, viene dalla necessità di risolvere equazioni, principalmente, del secondo ordine, cioè equazioni della forma

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

come è ben noto, le soluzioni di tale equazione sono date dalla formula

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tale formula funziona con i seguenti accorgimenti;

1. se $b^2 - 4ac > 0$, allora la radice quadrata è ben definita e si ottengono due soluzioni reali distinte;

2. se $b^2 - 4ac = 0$, la radice non compare e si ottiene una sola soluzione, o meglio due soluzioni coincidenti.

Resta il problema del caso $b^2 - 4ac < 0$, in cui ci si trova di fronte al problema di dover calcolare

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-|b^2 - 4ac|} = \sqrt{-1}\sqrt{|b^2 - 4ac|};$$

nella precedente espressione basta dare un senso alla radice quadrata del numero negativo -1 per ottenere una buona formula risolutiva di ogni polinomio di secondo grado, senza distinzioni sul discriminante (in realtà l'unica distinzione sarà discriminante nullo o non

---

[1] Ricordiamo che per campo si intende un insieme K sul quale siano definite due operazioni, dette somma e prodotto e denotate con $+$ e $\cdot$, per le quali valgono le proprietà:

1. $+$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 0, e ogni elemento $a \in K$ è invertibile rispetto alla somma con inversa denotata con $-a$;

2. $\cdot$ è associativa, ammette elemento neutro, denotato con 1, e ogni elemento $a \in K$ con $a \neq 0$ è invertibile rispetto al prodotto con inverso denotato con a^{-1} o $\frac{1}{a}$;

3. le operazioni di somma e prodotto godono della proprietà distributiva.

Se le operazioni di somma e prodotto sono commutative, si parla di campo commutativo o abeliano.

nullo). Si tratta quindi di trovare un insieme numerico in cui l'equazione $x^2 + 1 = 0$ abbia soluzione; come vedremo, risolvere quest'ultima equazione renderà possibile trovare le radici non solo di polinomi di secondo grado, ma di grado arbitrario e a coefficienti non reali (vedi Teorema A.13).

A.1 Definizione e prime proprietà

In questa sezione daremo la definizione e le principali proprietà dei numeri complessi. Come si è visto nel corso di Analisi Matematica I, si parte dall'insieme numerico $\mathbb{N}$ sul quale sono ben definite le operazioni di somma e prodotto ma nel quale non esistono gli elementi inversi rispetto a queste due operazioni. Si introducono quindi delle estensioni di $\mathbb{N}$ in cui sono ancora definite somma e prodotto, che sono estensioni della somma e prodotto su $\mathbb{N}$, in modo che esistano gli elementi inversi rispetto alla somma (e si ottiene così l'insieme $\mathbb{Z}$) e prodotto (ottenendo così $\mathbb{Q}$). L'introduzione di $\mathbb{R}$ viene fatta in modo che ci sia completezza non tanto rispetto alle operazioni di somma e prodotto, ma rispetto alla convergenza delle successioni di Cauchy, ottenendo in definitiva le seguenti inclusioni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Vogliamo definire qui il campo $\mathbb{C}$ in modo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e che le operazioni di somma e prodotto su $\mathbb{C}$ non siano altro che estensioni della somma e prodotto su $\mathbb{R}$.

Esistono vari modi equivalenti di definire $\mathbb{C}$; quello che seguiremo è quello di tipo cartesiano.

Definizione A.1 (Campo complesso) *Diremo* campo complesso*, e lo denoteremo con* $\mathbb{C}$*, l'insieme consistente nel piano* $\mathbb{R}^2$ *(che prende il nome di piano di Gauss) munito delle operazioni di somma e prodotto*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Un generico elemento di $\mathbb{C}$ *si indicherà con le ultime lettere dell'alfabeto,* $z, w, \ldots$ *intendendo* $z = (a, b)$*, ecc. La prima componente di un numero complesso si chiama parte reale,* $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a, b) = a$ *e la seconda componente si chiama parte immaginaria,* $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a, b) = b$ *(si tenga ben presente che parte reale e parte immaginaria di un numero complesso sono entrambi numeri reali). Un numero complesso* z *si dirà reale (o reale puro) se* $\mathrm{Im}(z) = 0$*, mentre si dirà immaginario puro se* $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Osservazione A.2 Dato che l'insieme dei numeri complessi è definito tramite una coppia ordinata, l'uguaglianza tra numeri complessi, $z = w$ con $z = (a, b)$ e $w = (c, d)$, si verificherà se e solo se $a = c$ e $b = d$, cioè se e solo se $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.

La terminologia *campo* è motivata dalla seguente Proposizione.

Proposizione A.3 $\mathbb{C}$ *è un campo abeliano.*

Dimostrazione. Le proprietà di associatività e commutatività della somma sono immediate, mentre quelle per il prodotto sono lasciate come verifica. Si nota quindi che gli elementi $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono elementi neutri per la somma e per il prodotto rispettivamente; si nota infine che l'elemento $-z = -(a, b) = (-a, -b)$ è l'inverso additivo di $z = (a, b)$, mentre, se $z \neq (0, 0)$, allora

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) \tag{A.1}$$

è l'inverso moltiplicativo di z. Si noti che dire $z \neq (0, 0)$ significa che almeno uno tra a e b è diverso da zero, da cui il fatto che $a^2 + b^2 \neq 0$ e cioè la buona definizione di z^{-1} □

Vediamo ora in che senso $\mathbb{C}$ è una estensione di $\mathbb{R}$; si nota che sull'insieme

$$R = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$$

le operazioni sopra definite si riducono a

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0). \quad (a,0) \cdot (b,0) = (ab,0).$$

ed inoltre

$$-(a,0) = (-a,0), \quad (a,0)^{-1} = (1/a,0), \qquad a \neq 0.$$

Identificando quindi R con $\mathbb{R}$, avremo che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; useremo sempre questa identificazione che ci porta a scrivere la seguente uguaglianza

$$(a,0) = a.$$

Avremo in particolare che gli elementi neutri rispetto a somma e prodotto in $\mathbb{C}$ sono gli stessi di quelli in $\mathbb{R}$, essendo $0 = (0,0)$ e $1 = (1,0)$.

Osservazione A.4 Si noti che, mentre $\mathbb{R}$ è un campo ordinato, su $\mathbb{C}$ non abbiamo introdotto nessuna nozione di ordinamento; questo è dovuto al fatto che non c'è un modo naturale per estendere l'ordinamento $\leq$ su $\mathbb{C}$ e non avrà quindi senso per i numeri complessi l'espressione $z \leq w$.

Notiamo inoltre che, con le notazioni appena introdotte, si ha:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1.0) = -1,$$

cioè l'elemento $i = (0,1)$ ha la proprietà che $i^2 = -1$; tale elemento verrà chiamato unità immaginaria. In questo modo siamo arrivati a poter scrivere un numero complesso, oltre che con la notazione cartesiana, anche in notazione algebrica. Infatti, abbiamo che

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = a + ib.$$

La definizione algebrica dei numeri complessi passa quindi attraverso la definizione di un numero *speciale* i con la proprietà che $i^2 = -1$, e definendo numero complesso tutte le possibili combinazioni lineari degli elementi 1 e i, cioè tutti i numeri della forma appunto

$$a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

In questo modo l'operazione di prodotto diventa più intuitiva; infatti dati due numeri complessi $a + ib, c + id$, abbiamo, tenendo presente che $i^2 = -1$,

$$(a+ib) \cdot (c+id) = a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id = ac - bd + i(ad + bc).$$

A.2 Coniugato e modulo di un numero complesso

Sui numeri complessi è definita l'operazione di coniugio; dato cioè un numero complesso $z = a + ib$, si definisce il numero complesso $\overline{z}$ detto coniugato di z tramite

$$\overline{z} = a - ib.$$

Per l'operazione di coniugio abbiamo le seguenti proprietà.

Proposizione A.5 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $\overline{\overline{z}} = z$ *(proprietà involutiva del coniugio);*
2. $\overline{z} = z$ *se e solo se z reale;*
3. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$*;*
4. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$*;*
5. *se $z \neq 0$, allora $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$;*
6. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$, $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

Dimostrazione. Basta scrivere z e w in forma algebrica $z = a + ib$, $w = c + id$ e verificare le identità; vediamo solamente le dimostrazioni di 4. e 5. Dato che $zw = (ac - bd) + i(ad + bc)$, segue che $\overline{zw} = (ac - bd) - i(ad + bc)$, mentre

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) + i(-ad - bc)$$

da cui la 4. Per la 5. si nota che da (A.1) applicata a z e $\overline{z}$, si ottiene che

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}, \quad \frac{1}{\overline{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{b}{a^2 + b^2},$$

da cui la 5. □

Notiamo che scrivendo $z = a + ib$ si ottiene che $z\overline{z} = a^2 + b^2$, e quindi il fatto che $z\overline{z}$ è un numero reale positivo. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione A.6 (Modulo in $\mathbb{C}$) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si definisce il modulo di z tramite*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Osservazione A.7 Non si deve confondere la notazione di modulo di un numero complesso con quella di valore assoluto di un numero reale; tuttavia, le due nozioni coincidono nel caso in cui z sia reale puro, in quanto in questo caso $b = 0$ e quindi

$$|z| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Per il modulo di un numero complesso valgono le seguenti proprietà.

Proposizione A.8 *Siano $z, w \in \mathbb{C}$; allora*

1. $|z| \geq 0$, $|z| = 0$ *se e solo se $z = 0$;*
2. $|z| = |\overline{z}|$, $|-z| = |z|$*;*
3. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$*;*
4. *se $z \neq 0$, $|1/z| = 1/|z|$, $1/z = \overline{z}/|z|^2$;*
5. $|zw| = |z||w|$*;*
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$ *(disuguaglianza triangolare);*
7. $|z + w| \geq ||z| - |w||$ *(seconda disuguaglianza triangolare).*

Dimostrazione. Si scrivono $z = a + ib$ e $w = c + id$ e le proprietà 1., 2. e 3. sono immediate. Notando poi che per $z \neq 0$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|}$$

da cui la 4. (la seconda proprietà della 4. segue direttamente dalla definizione $|z|^2 = z\overline{z}$). Per la 5., si nota che, dalle proprietà del coniugio, si ottiene:

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\cdot\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare, tenendo presente la proprietà 6. della Proposizione A.5 e la 3. di questa Proposizione, si ha:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\cdot|w| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

da cui la 6. Per quanto riguarda la 7., basta notare che

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|,$$

da cui $|z| - |w| \leq |z - w|$; analogamente

$$|w| \leq |w - z| + |z| = |z - w| + |z|,$$

da cui $|w| - |z| \leq |z - w|$. Mettendo insieme queste due disuguaglianze, si ottiene la 7. □

A.3 Forma polare ed esponenziale

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto le forme cartesiana ed algebrica di un numero complesso; in questa sezione introdurremo la forma polare ed esponenziale. Il vantaggio di queste nuove definizioni è che, mentre la forma cartesiana e algebrica è comoda quando si vogliono sommare due numeri complessi, la forma polare ed esponenziale lo sono nella moltiplicazione.

La definizione della forma polare di un numero complesso segue dall'osservazione che un numero complesso $z = a + ib = (a, b)$ rappresenta un punto nel piano $\mathbb{R}^2$ ed è quindi determinato dalle sue coordinate polari (ϱ, ϑ), dove $\varrho = \sqrt{a^2+b^2}$ rappresenta la distanza del punto (a, b) dall'origine e coincide con il modulo del numero complesso, $\varrho = |z|$, mentre l'angolo ϑ, detto argomento o anomalia e denotato con $\vartheta = \arg(z)$, rappresenta l'angolo, preso in senso antiorario, formato dal semiasse $\{x = 0, y \geq 0\}$ e la semiretta originata in $(0, 0)$ e passante per (a, b). Si nota che mentre ϱ è univocamente determinato, l'angolo ϑ è individuato a meno di multipli di 2π (fa eccezione l'origine, che è individuata da $\varrho = 0$ ma non ha un ϑ determinato) ed è univocamente determinato in un intervallo semiaperto di ampiezza 2π; si parla in questo caso di argomento principale di z e come intervallo si può scegliere $(-\pi, \pi]$ (o $[0, 2\pi)$ a seconda dei casi). Per passare dalla forma algebrica alle coordinate polari del numero $z = a + ib$ si possono usare, nel caso $z \neq 0$, le formule

$$\begin{cases} a = \varrho\cos\vartheta \\ b = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}, \qquad \begin{cases} \varrho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\vartheta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \mathrm{sen}\,\vartheta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \tag{A.2}$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione A.9 (Forma polare) *Dato $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma polare (o trigonometrica) l'espressione di z usata utilizzando le coordinate polari*

$$z = \varrho(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta).$$

Uno dei maggiori vantaggi della rappresentazione polare dei numeri complessi si presenta quando si deve fare il prodotto di due numeri complessi. Supponiamo infatti di avere due numeri complessi $z = \varrho(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$, $w = r(\cos\phi + i\operatorname{sen}\phi)$, otteniamo che

$$zw = \varrho r(\cos(\vartheta+\phi) + i\operatorname{sen}(\vartheta+\phi)), \quad \frac{z}{w} = \frac{\varrho}{r}(\cos(\vartheta-\phi) + i\operatorname{sen}(\vartheta-\phi)), \tag{A.3}$$

cioè la moltiplicazione per il numero w è data da una dilatazione pari a r e una rotazione di un angolo ϕ. In particolare, se $w = z$, si ottiene che

$$z^2 = \varrho^2(\cos 2\vartheta + i\operatorname{sen} 2\vartheta),$$

o più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \varrho^n(\cos n\vartheta + i\operatorname{sen} n\vartheta); \tag{A.4}$$

le formule (A.3) e (A.4) prendono anche il nome di Formule di De Moivre. Dato che la funzione

$$f(\vartheta) = \cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta,$$

ha la proprietà che $f(\vartheta_1)f(\vartheta_2) = f(\vartheta_1+\vartheta_2)$, ha senso la seguente definizione.

Definizione A.10 *Si definisce l'esponenziale immaginario come la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data da*

$$e^{i\vartheta} = f(\vartheta) = \cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta;$$

Più in generale, dato un numero complesso $z = a + ib$, si definisce l'esponenziale complesso $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b).$$

Osservazione A.11 Si noti che, dalla definizione data, si ha che la funzione $\vartheta \mapsto e^{i\vartheta}$ è 2π-periodica e che per ogni $\vartheta \in \mathbb{R}$ $|e^{i\vartheta}| = 1$.

Definizione A.12 (Forma esponenziale) *Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C}$, si chiama forma esponenziale di z la scrittura di z nella forma*

$$z = \varrho e^{i\vartheta},$$

dove ϱ e ϑ sono determinate dalle (A.2).

A.4 Polinomi e radici n-esime

In questa sezione tratteremo i polinomi in campo complesso. Ricordiamo che un polinomio complesso di grado n è una funzione $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Ricordiamo anche che un numero complesso z_0 si dice radice del polinomio p se $p(z_0) = 0$; in tal caso il polinomio p è divisibile per $(z - z_0)$ e si potrà scrivere

$$p(z) = (z - z_0)q(z)$$

con q polinomio di grado $n - 1$. Si dice inoltre che z_0 ha molteplicità m se

$$p(z) = (z - z_0)^m q(z)$$

con q polinomio di grado $n - m$ tale che $q(z_0) \neq 0$; in tal caso $p(z)$ è divisibile per $(z - z_0)^m$ ma non per $(z - z_0)^{m+1}$. Conseguenza di questi fatti è che un polinomio di grado n ha al più n radici, contate con le relative molteplicità. In campo complesso vale però anche il viceversa, cioè che le radici sono esattemante n, se contate con le loro molteplicità; vale infatti il seguente Teorema, che non dimostreremo.

Teorema A.13 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado almeno* 1 *ammette una radice complessa.*

Il precedente Teorema ha come immediato corollario il seguente risultato.

Teorema A.14 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Ogni polinomio complesso di grado $n \geq 1$ ammette n radici complesse, se si conta ogni radice con la relativa molteplicità.*

I precedenti Teoremi non danno alcuna informazione su come trovare le radici del polinomio considerato; abbiamo però il seguente Teorema, valido per polinomi a coefficienti reali.

Proposizione A.15 *Se p è un polinomio complesso a coefficienti reali, cioè $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, allora $z_0 \in \mathbb{C}$ è radice di p se e solo se $\overline{z_0}$ lo è e in tal caso z_0 e $\overline{z_0}$ hanno la stessa molteplicità.*

Dim. Basta osservare che, essendo $p(z_0) = 0$, allora

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(z_0)} = \overline{a_0 + a_1 z_0 \cdots + a_n z_0^n} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \cdot \overline{z_0} + \cdots + \overline{a_n} \cdot \overline{z_0}^n \\ &= a_0 + a_1 \overline{z_0} \cdots + a_n \overline{z_0}^n = p(\overline{z_0}). \end{aligned}$$

□

Osservazione A.16 Si noti che, come corollario, si deduce che ogni polinomio reale a coefficienti reali può essere scritto come prodotto di polinomi di grado uno o al massimo due; infatti, visto come polinomio complesso, si ha dal Teorema fondamentale dell'algebra A.14 che

$$p(z) = a_n (z - z_1)^{m_1} \cdot \cdots \cdot (z - z_k)^{m_k} \tag{A.5}$$

con $m_1 + \cdots + m_k = n$; ne deriva che in campo coplesso i fattori primi dei polinomi sono i polinomi di grado uno, nel senso che ogni polinomio si decompone come prodotto di binomi di primo grado (si pensi all'analogia della decomposizione dei numeri interi in fattori primi). Tornando a vedere il polinomio come reale a coefficienti reali, se z_i è reale, allora abbiamo un fattore di grado uno, mentre se z_i è non reale, allora in (A.5) deve comparire anche $\overline{z_i}$ (Proposizione A.15), esiste cioè $j \neq i$ tale che $z_j = \overline{z_i}$ e $m_j = m_i$. Notando poi che

$$(z - z_i)(z - \overline{z_i}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_i)z + |z_i|^2$$

è un polinomio di secondo grado a coefficienti reali, segue l'osservazione.

Consideriamo ora il problema della radice n–esima di un numero complesso. Dato un numero complesso w, si dice che il numero complesso z è una radice n–esima di w se $z^n = w$. Le radici n–esime sono quindi le soluzioni dell'equazione $z^n - w = 0$, cioè sono le radici del polinomio $p(z) = z^n - w$; quindi, per quanto visto sopra, esistono al più n radici n–esime del numero w. La seguente Proposizione afferma che le radici sono esattamente n.

Proposizione A.17 *Dato il numero complesso $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, esistono n radici complesse distinte di w date dalla formula*

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}e^{i\vartheta_k}, \quad \textit{con } \vartheta_k = \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}, k = 0, \ldots, n-1.$$

Osservazione A.18 Va osservato che la radice n-esima complessa non definisce una funzione in $\mathbb{C}$, avendo essa più valori; bisogna quindi fare attenzione che il simbolo $\sqrt[n]{w}$ può avere significati differenti, anche nel caso in cui w sia un numero reale, a seconda che si parli di radice reale o radice complessa.

Dimostrazione. Scrivendo $z = \varrho e^{i\vartheta}$ e $w = re^{i\phi}$, si nota che $z^n = w$ se e solo se

$$\begin{cases} \varrho^n = r \\ \cos(n\vartheta) = \cos\phi \\ \operatorname{sen}(n\vartheta) = \operatorname{sen}\phi; \end{cases}$$

tale sistema ha per soluzioni $\varrho = \sqrt[n]{r}$ (radice reale) e

$$\vartheta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{A.6}$$

Chiaramente abbiamo infiniti valori di ϑ_k; notiamo però che due differenti valori di k e h definiscono lo stesso numero complesso, cioè $z_h = z_k$ se ϑ_h e ϑ_k differiscono per un multiplo di 2π, cioè se

$$\vartheta_h = \vartheta_k + 2m\pi;$$

la precedente espressione, usando (A.6), è equivalente a

$$h - k = nm,$$

cioè $z_h = z_k$ se e solo se $h-k$ è divisibile per n, o equivalentemente h e k hanno lo stesso resto nella divisione per n. Siccome i possibili resti della divisione per n sono $0, 1, \ldots, n-1$, la dimostrazione segue. □

Esempio A.1 Consideriamo il numero $w = 1$, numero di modulo uno e argomento zero; nel caso $n = 2$, cioè nel caso delle radici quadrate, si ottengono i numeri

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = k\pi, k = 0, 1$$

cioè i due numeri $z_0 = 1$ e $z_1 = -1$. Per $n = 3$, si ottengono

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

cioè i numeri complessi $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, per $n = 4$

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

che producono i numeri $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$ e $z_3 = -i$. In figura sono rappresentate queste radici e quelle relative al caso $n = 5$ e $n = 6$; si noti quindi che il numero 1 si trova sempre tra le radici per ogni ordine (come nel caso reale) ed anche il numero -1 si trova (sempre come nel caso reale) in ogni radice di ordine pari. Si hanno però altre radici a partire dal caso $n = 3$ che si distribuiscono nel piano complesso secondo triangoli equilateri ($n = 3$), quadrati ($n = 4$), pentagoni ($n = 5$) ed esagoni ($n = 6$), avendo sempre (siccome il numero w è reale) due radici coniugate tra loro (si veda figura A.1).

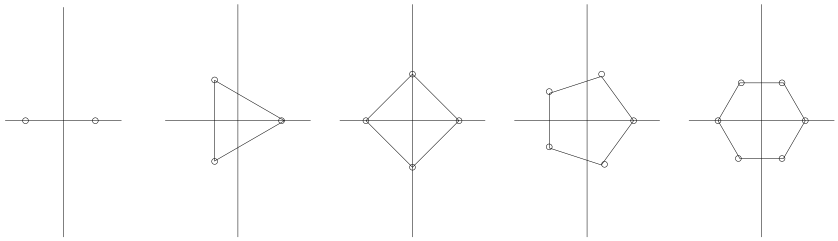

Figura A.1: Distribuzione nel piano complesso delle radici n–esime di 1, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

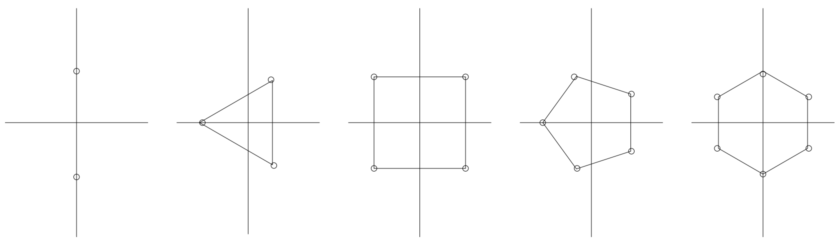

Figura A.2: Distribuzione nel piano complesso delle radici n–esime di -1, $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Esempio A.2 Nel caso $w = -1$, il numero di modulo uno e argomento π, si ottiene che nel caso $n = 2$,

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, 1$$

cioè i due numeri $z_0 = i$ e $z_1 = -i$. Per $n = 3$, si ottengono

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

cioè i numeri complessi $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -1$ e $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Analogamente, per $n = 4$

$$z_k = e^{i\vartheta_k}, \qquad \vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, 1, 2, 3$$

che producono i numeri $z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si veda la figura A.2 per la distribuzione di queste radici e per quelle del caso $n = 5$ e $n = 6$. Come esercizio, si provi a vedere cosa succede nel caso $w = i$ e $w = -i$.

Bibliografia

[1] Michiel Bertsch, Roberta Dal Passo, Lorenzo Giacomelli. *Analisi matematica.* McGraw-Hill Education, 2014.

[2] Marco Bramanti, Sandro Pagani, Carlo Domenico Salsa. *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare.* Zanichelli, 2004.

[3] Marco Bramanti, Sandro Pagani, Carlo Domenico Salsa. *Analisi Matematica 2.* Zanichelli, 2009.

[4] Enrico Giusti. *Analisi Matematica vol 2.* Progr. Matem. Fisica Elettronica. Boringhieri, 2003.