UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Appunti del corso di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 30, I-44121 Ferrara
e–mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1] Versione aggiornata al 24 settembre 2019

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti del corso di Analisi Matematica 2 dal Corso di Laurea Triennale di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Ferrara.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida relativa agli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire un buon libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. Viene fornita in bibliografia una lista di testi che si ritengono validi per lo studio della materia. La funzione di questi appunti è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei sono molto buone e ben fornite di ottimi testi. Tra i vari testi disponibili consigliamo sicuramente il testo [2] o la sua edizione precedente [1]; un altro ottimo testo è [3]

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto è possibile che alcune parti vengano corrette ed integrate durante il corso.

Michele Miranda
Ferrara, 24 settembre 2019

Indice

Capitolo 1

Calcolo vettoriale, topologia, limiti e funzioni continue

Nel corso di Analisi I si sono studiate le funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ con I sottoinsieme di $\mathbb{R}$; di tali funzioni si sono date le definizioni di continuità, derivabilità e integrabilità, si sono studiati problemi di massimo e minimo e metodi per la loro individuazione. Iniziamo ora lo studio di funzioni $f : A \to B$ con A e B sottoinsiemi di spazi Euclidei a più dimensioni; le nozioni che considereremo, cioè continuità, derivabilità e integrabilità, si basano sul concetto di limite, che si fonda sulla nozione di distanza.

Nel prossimo paragrafo inizieremo quindi lo studio delle proprietà dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, in particolare daremo la nozione di insieme aperto e chiuso (si parla in tal caso di topologia di $\mathbb{R}^n$) ed estenderemo il concetto di intervallo ad n variabili.

Iniziamo aprendo una piccola parentesi sul calcolo vettoriale. Uno spazio vettoriale è un insieme V in cui sono definite una somma e la moltiplicazione per scalare, cioè la possibilità di poter sommare due vettori $u, v \in V$ in modo che $u+v \in V$, e poter moltiplicare un vettore $v \in V$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che $\lambda v \in V$. Esempio semplice di spazio vettoriale è $\mathbb{R}$, ma possiamo anche considerare l'insieme delle funzioni continue o anche derivabili su di un intervallo di $\mathbb{R}$, cioè le funzioni

$$V = C^k(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ derivabile con continuità } k \text{ volte}\}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Dire che $V = V^n$ ha dimensione n significa supporre che esistono n vettori linearmente indipendenti $e_1, \dots, e_n \in V^n$ che generano tutto V^n, cioè tali che per ogni $v \in V^n$ siano univocamente determinati n numeri reali $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ in modo che

$$v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n. \tag{1.1}$$

Solo fissando una base si può identificare V^n con $\mathbb{R}^n$, nel senso che un vettore v può essere identificato con la n–upla di numeri reali $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ che determinano v mediante la (1.1). In questo modo i vettori $e_1, \dots, e_n$ possono essere identificati con i vettori

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Questa identificazione non sempre è una banale osservazione, ma funziona anche con spazi di funzioni; in generale lo spazio $C^k(I, \mathbb{R})$ ha dimensione infinita per ogni $k \in \mathbb{N}$ in quanto le funzioni x^a e x^b sono tutte linearmente indipendenti se $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$. Se però consideriamo lo spazio

$$V^n = \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ polinomio di grado al più } n-1\},$$

abbiamo che V^n ha dimensione n in quanto generato dalle n funzioni 1, $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Nel caso si lavori in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ per i vettori e_1, e_2 ed e_3 vengono denotati con le lettere

$$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}, \qquad \text{o} \qquad \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}.$$

Denoteremo i punti di $\mathbb{R}^n$ con le usuali lettere x, y intendendo quindi le n–uple $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$, ma spesso useremo anche altre lettere quali ad esempio u, v, e w quando sarà comodo vedere gli elementi di $\mathbb{R}^n$ come vettori, oppure p, q quando vorremo precisare che sono punti dello spazio. Nel caso $n = 2$ o $n = 3$ useremo anche le notazioni (x, y) e (x, y, z); sarà sempre possibile capire dal contesto se ad esempio la lettera x denota un vettore o la coordinata del vettore (x, y) o (x, y, z).

Una volta identificato V^n con $\mathbb{R}^n$, le nozioni di somma vettoriale e prodotto per scalare sono determinate dalle analoghe operazioni fatte componente per componente;

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Risulta molto comodo lavorare direttamente con $\mathbb{R}^n$ e sarà questo praticamente l'unico modo di fare conti con le funzioni di più variabili; bisognerà prestare attenzione al fatto che le considerazioni che faremo non dipendano dalla scelta della base fatta[1], ma che siano effettivamente proprietà intrinseche dello spazio V^n.

1.1 Distanza e topologia

Sullo spazio $\mathbb{R}^n$ è definito il prodotto scalare standard

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n;$$

si parla di spazio Euclideo ogni qual volta è definito un prodotto scalare. Tramite tale prodotto scalare si può definire la norma di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ ponendo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$; nel caso $n = 1$ la norma coincide con il valore assoluto di un numero reale. Si parla di versore nel caso di vettore di norma 1 mentre dato un vettore x con $\|x\| \neq 0$, si può definire il versore direzione di x come

$$\hat{x} = \frac{x}{\|x\|}.$$

Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, essi generano al più uno spazio di dimensione 2, quindi ragionando come se fossero elementi del piano $\mathbb{R}^2$, è facile rendersi conto che

$$x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos \vartheta, \tag{1.2}$$

dove ϑ è l'angolo determinato dai due vettori. Infatti, se uno dei due vettori è nullo, allora la sua norma è zero e la (1.2) è ovvia. Se entrambi i vettori sono non nulli allora x e y generano

[1] Si tenga presente anche che generalmente in dimensione maggiore di uno si possono avere anche sistemi di riferimento diversi dalle basi vettoriali, ma si possono anche considerare coordinate non lineari, quali ad esempio le coordinate polari nel piano, cilindriche e sferiche nello spazio

uno spazio di dimensione al più 2 che possiamo identificare con $\mathbb{R}^2$; fissiamo quindi la base di $\mathbb{R}^2$ in modo che $e_1 = \hat{x}$, cioè $x = \|x\|e_1 = (\|x\|, 0)$ e $y = (y_1, y_2)$. In tal modo otteniamo che

$$x \cdot y = \|x\|y_1 = \|x\|\|y\| \cos\vartheta$$

in quanto y_1 è il cateto del triangolo rettangolo di ipotenusa $\|y\|$ e adiacente all'angolo ϑ.

Proposizione 1.1 (Proprietà della norma) *La norma soddisfa le seguenti proprietà per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$:*

1. *positività, $\|x\| \geq 0$ con $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;*
2. *omogeneità, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;*
3. *confronto con il valore assoluto, cioè per ogni $j = 1, \dots, n$*
$$|x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} |x_i|;$$
4. *subadditività,*
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$$
5. *disuguaglianze triangolari,*
$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Dimostrazione. Delle precedenti proprietà necessitano una dimostrazione solo gli ultimi tre punti. Per il punto 3., si noti che per ogni $j = 1, \dots, n$

$$|x_j|^2 \leq |x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = \|x\|^2$$

mentre

$$\|x\|^2 = \underbrace{|x_1|^2}_{\leq \max_{i=1,\dots,n} |x_i|^2} + \ldots + \underbrace{|x_n|^2}_{\leq \max_{i=1,\dots,n} |x_i|^2} + \leq n \max_{i=1,\dots,n} |x_i|^2.$$

Tenendo poi conto di (1.2) abbiamo che

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 =& (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \\ =& \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \cos\vartheta \\ \leq& \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

da cui la 4. Per la 5. Notiamo che

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

cioè $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Scambiando i ruoli tra x e y si ottiene la prima disuguaglianza in 4., mentre la seconda segue da

$$\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \| - y\| = \|x\| + \|y\|.$$

ciao □

Una operazione tra vettori che daremo solo in $\mathbb{R}^3$ è il prodotto vettoriale[2]; dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^3$, si definisce prodotto vettoriale $z = x \times y$ il vettore avente come modulo

[2] Tale definizione si può dare in realtà in dimensione qualsiasi, ma necessita la nozione di forme differenziali; il prodotto vettoriale è in generale una 2–forma, che in $\mathbb{R}^3$, una volta fissato una base orientata destrorsa viene identificata in modo canonico con un vettore. Questa identificazione dipende quindi dall'orientazione che viene fissata e non è quindi una identificazione intrinseca, cambiando di segno se si cambia orientazione da destrorsa a sinistrorsa.

l'area del parallelogramma determinato da x e y e orientato in modo che, se x e y sono linearmente indipendenti, i vettori x, y e z rappresentano una base destrorsa di $\mathbb{R}^3$. Questo viene realizzato definendo

$$\begin{aligned} z = x \times y =& \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \\ =&(x_2y_3 - x_3y_2)\mathbf{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\mathbf{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\mathbf{k} \\ =&(x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

La norma $\|\cdot\|$ definisce una distanza su $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \|x-y\|$; le principali proprietà della distanza sono riassunte nella seguente proposizione, la cui dimostrazione segue facilmente dalle analoghe proprietà della norma.

Proposizione 1.2 *Dati $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, sono le seguenti, dirette conseguenze delle analoghe proprietà della norma;*

1. *positività, $d(x,y) \geq 0$ con $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$;*
2. *simmetria, $d(x,y) = d(y,x)$;*
3. *disuguaglianza triangolare $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.*

Una volta definita la distanza, possiamo dare la nozione di prossimità.

Definizione 1.3 (Intorno sferico) *Si chiamano intorno sferico aperto ed intorno sferico chiuso di $x \in \mathbb{R}$ con raggio $r > 0$ gli insiemi*

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}, \quad \overline{B}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$$

mentre viene detta sfera di centro x e raggio $r > 0$ l'insieme

$$S_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = r\}.$$

Si noti che $\overline{B}_r(x) = B_r(x) \cup S_r(x)$. Nel caso in cui $x = 0$, si usa solitamente la notazione semplificata B_r, $\overline{B}_r$ e S_r; infine, nel caso $r = 1$, si definisce $\mathbb{S}^{n-1}$ per la sfera unitaria S_1.

Definizione 1.4 (Intorno cubico) *Si chiamano intorno cubico aperto ed intorno cubico chiuso centrato in $x \in \mathbb{R}$ e lato $2r > 0$ gli insiemi*

$$Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < r, \forall i = 1, \dots, n\},$$

$$\overline{Q}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| \leq r, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Esempio 1.1 Nel caso $n = 1$, si ottiene che $B_r(x) = Q_r(x) = (x - r, x + r)$, $\overline{B}_r(x) = \overline{Q}_r(x) = [x - r, x + r]$ e $S_r(x) = \{x - r, x + r\}$.

Definizione 1.5 (Insieme aperto e chiuso) *Dato $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x \in E$, si dice che:*

1. *x è punto interno ad E se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \subset E$;*
2. *x si dice esterno ad E se x è interno ad $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap E = \emptyset$;*

3. *un punto x che non è né interno né esterno si dice punto di* frontiera[3].

Denoteremo con:

1. E° *l'insieme dei punti interni ad E;*
2. ∂E *l'insieme dei punti di frontiera di E;*
3. $\overline{E} = E \cup \partial E$ *la chiusura di E.*

Diremo infine che

1. *E è aperto se $E = E^\circ$, cioè se tutti i suoi punti sono punti interni;*
2. *E è chiuso se $\overline{E} = E$ o equivalentemente se $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$ è aperto, che equivale a dire che $\partial E \subset E$.*

Nella seguente proposizioni sono elencate le principali proprietà degli aperti e dei chiusi sotto le operazioni di unione e intersezione; tali proprietà sono le proprietà che definiscono una topoologia, cioè una famiglia di insiemi con buone proprietà per unione ed intersezione. [4]

Proposizione 1.6 *Supponiamo di avere due famiglie, una $\mathcal{A}$ fatta di insiemi aperti e una $\mathcal{C}$ fatta di insiemi chiusi. Allora*

1. *l'insieme*
$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \text{ per qualche } A \in \mathcal{A}\}$$
s è aperto, mentre l'insieme
$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in C \text{ per ogni } C \in \mathcal{C}\}$$
è chiuso;
2. *dato un numero finito di insiemi $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ e $C_1 \ldots, C_m \in \mathcal{C}$, l'insieme*
$$A_1 \cap \ldots \cap A_k$$
è aperto, mentre l'insieme
$$C_1 \cup \ldots \cup C_m$$
è chiuso.

Dimostrazione. Se $x \in A$ per un qualche A, allora, dato che A è aperto, esiste $r > 0$ tale che
$$B_r(x) \subset A \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$
da cui il fatto che l'unione qualsiasi di insiemi aperti è aperta. Sia poi $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_k$; dato che ogni A_j, $j = 1, \ldots, k$, è aperto, esistono $r_j > 0$ tali che $B_{r_j}(x) \subset A_j$ per ogni $j = 1, \ldots, k$. Scegliendo $r = \min_j r_j$, si ottiene che $B_r(x) \subset A_1 \cap \ldots \cap A_k$, e quindi tale intersezione è aperta. Le proprietà sui chiusi si ottengono osservando che se C è chiuso, allora $A = \mathbb{R}^n \setminus C$ è aperto. $\square$

[3]si parla anche di punto di *bordo*, ma tale terminologia è più corretta in un altro contensto

[4]Una topologia in uno spazio Ω (nel nostro caso $\Omega = \mathbb{R}^n$ è una famiglia $\mathscr{T}$ di sottoinsiemi di Ω chiusa per unioni arbitrarie ed intersezioni finite tale che Ω e $\emptyset$ appartengono a $\mathscr{T}$. Quindi la famiglia degli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$ è una topologia, mentre gli insiemi chiusi definiscono una topologia passando ai complementari.

Osservazione 1.7 Si nota che intersezione arbitraria di insiemi aperti non è detto sia aperta; infatti, ad esempio in $\mathbb{R}$, se si considerano gli insiemi aperti $A_j = (-1/(j+1), 1/(j+1))$, si ottiene che

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = \{0\}$$

e quest'ultimo non è un insieme aperto.

Esempio 1.2 Possiamo fornire i seguenti esempi.

1. Se fissiamo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, allora (a, b) è aperto, $[a, b]$ è chiuso e $(a, b]$, $[a, b)$ non sono né aperti né chiusi; in tutti i casi l'insieme dei punti di frontiera è dato da $\{a, b\}$, quello dei punti interni da a, b mentre la chiusura è data da $[a, b]$.

2. $E = \mathbb{R}^n$ è aperto, così come $E^c = \partial E = \emptyset$ è aperto. Quindi $\mathbb{R}^n$ è sia aperto che chiuso; questo è l'unico insieme di $\mathbb{R}^n$ con tale proprietà.

3. Con $E = \mathbb{Q}$ abbiamo che $E^\circ = \emptyset$, $\overline{E} = \partial E = \mathbb{R}$; quindi $\mathbb{Q}$ non è né aperto né chiuso.

4. Infine, se $E = B_r(x)$, $E^\circ = B_r(x)$, $\overline{E} = \overline{B}_r(x)$ e $\partial E = S_r(x)$.
   Dimostrazione. Preso $y \in B_r(x)$, scegliendo $\varepsilon = r - \|y - x\|$ e preso $z \in B_\varepsilon(y)$, cioè se $\|z - y\| < r - \|y - x\|$, si ottiene che

   $$\|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \underbrace{\|z - y\|}_{<r-\|y-x\|} + \|y - x\| < r - \|y - x\| + \|y - x\| = r,$$

   cioè $z \in B_r(x)$ e quindi $B_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$, che dimostra che $B_r(x)^\circ = B_r(x)$. Analogamente, se $\|y - x\| > r$, si nota che con la scelta $\varepsilon = \|y - x\| - r$ si ottiene che $B_\varepsilon(y) \cap B_r(x) = \emptyset$, cioè $B_\varepsilon(y) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x)$, e quindi $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_r(x)$ è aperto. Infine, se $\|y - x\| = r$, si nota che per ogni $\varepsilon > 0$ la palla $B_\varepsilon(y)$ interseca sia $B_r(x)$ che il suo complementare in quanto i punti

   $$y_t = y + t\frac{y - x}{\|y - x\|}$$

   appartengono a $B_\varepsilon(y)$ per $|t| < \varepsilon$ e sono interni a $B_r(x)$ per $t < 0$ ed esterni a $B_r(x)$ per $t > 0$. Quindi i punti y tali che $\|y - x\| = r$ sono punti di frontiera. □

Per la nozione di limite è utile anche il concetto di punto di accumulazione.

Definizione 1.8 *Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, diremo che un punto x_0 è di* accumulazione *per E se per ogni $r > 0$, la palla $B_r(x_0)$ contiene punti di E diversi da x_0, cioè se*

$$B_r(x_0) \cap (E \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Un punto di accumulazione x_0 può appartenere o meno all'insieme E, ma ci sono anche punti di un insieme che non sono punti di accumulazione; si pensi ad esempio all'insieme della retta reale $E = (0, 1] \cup \{2\}$, in cui 2 non è un punto di accumulazione, mentre 0 lo è anche se non appartiene ad E. Un punto di E che non sia di accumulazione per E viene detto punto *isolato*. In questo modo si trova che i punti di accumulazione per E sono dati dai punti di $\overline{E}$ che non sono isolati.

Definizione 1.9 (Insiemi limitati e insiemi compatti) *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste $r > 0$ tale che $E \subset B_r$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $\|x\| < r$ per ogni $x \in E$. Un insieme E viene detto compatto se è chiuso e limitato.*

Osservazione 1.10 La definizione di limitatezza di un insieme E può anche essere data richiedendo che esista $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ tale che $E \subset B_r(x_0)$; la definizione non cambia se al posto degli intorni sferici aperti si considerano gli intorni sferici chiusi e anche gli intorni cubici aperto o chiusi. Osserviamo inoltre che la definizione più precisa di insieme compatto sarebbe in realtà più topologica, mentre la caratterizzazione dei compatti come insiemi chiusi e limitati è un risultato che vale per gli spazi euclidei finito–dimensionali. La definizione topologica di compattezza dice che: E è compatto se da ogni ricoprimento aperto

$$E \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

si può scegliere un sottoricoprimento finito, cioè esistono $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ tali che

$$E \subset A_1 \cup \ldots \cup A_k.$$

Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 1.11 *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. La limitatezza si ottiene considerando il ricoprimento aperto di E dato dalle palle $\{B_h : h \in \mathbb{N}\}$; siccome ne basta un numero finito di B_h ed essendo queste palle concentriche, ne esiste una B_{h_0} che contiene E. Dimostriamo ora che E^c è aperto; prendo $x_0 \in E^c$ e considero per ogni $x \in E$ la quantità $r_x = \frac{1}{2}\|x - x_0\|$. Le palle $\{B_{r_x}(x) : x \in E\}$ sono un ricoprimento aperto di E, quindi ne bastano un numero finito per ricoprire E, cioè esistono $x_1, \ldots, x_h \in E$ tali che

$$E \subset B_{r_1}(x_1) \cup \ldots \cup B_{r_h}(x_h), \qquad r_i = r_{x_i}.$$

Ma allora se prendiamo $r < \max\{r_i : i = 1, \ldots, h\}$, la palla $B_r(x_0)$ non interseca nessuna palla $B_{r_i}(x_i)$ e quindi $B_r(x_0) \cap E = \emptyset$.
La dimostrazione dell'implicazione inversa è un più delicata e quindi la omettiamo; diventa più semplice una volta caratterizzata la compattezza mediante successioni (vedere la Proposizione 1.13). □

1.2 Successioni

Una successione in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, cioè una famiglia $(x(h))_{h \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathbb{R}^n$; come nel caso uni–dimensionale, useremo la notazione $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$ per denotare una successione.

Definizione 1.12 *Una successione $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$ si dice:*

1. *limitata se l'insieme*
$$E = \{x_h : h \in \mathbb{N}\}$$
è limitato in $\mathbb{R}^n$, cioè se esiste $r > 0$ tale che $\|x_h\| < r$ per ogni $h \in \mathbb{N}$;

2. *convergente ad un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, e scriveremo*
$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x,$$
se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\|x_h - x\| < \varepsilon$ per ogni $h > h_0$.

Si nota che, se la successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora è limitata; inoltre, scrivendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $x_h = (x_{h,1}, \dots, x_{h,n})$, da

$$|x_{h,j} - x_j| \le \|x_h - x\| \le \sqrt{n} \max_{i=1,\dots,n} |x_{h,i} - x_i|, \qquad \forall j = 1, \dots, n,$$

se ne deduce che una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è convergente ad x se e solo se le successioni delle sue componenti $(x_{h,j})_{h\in\mathbb{N}}$ convergono a x_j per ogni $j = 1, \dots, n$. Da ciò si deduce in particolare che:

1. il limite è unico, dato che il limite di ogni componente è unico;
2. date due successioni $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ e $(y_h)_{h\in\mathbb{N}}$ convergenti rispettivamente ad x ed y in $\mathbb{R}^n$, allora la successione $(x_h + y_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge a $x + y$;
3. se $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge ad $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $(\lambda x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ converge a λx.

Esempio 1.3 Consideriamo le seguenti successioni in $\mathbb{R}^2$:

1. se definiamo
$$x_h = \left(\frac{1}{h}, \frac{h+1}{h}\right),$$
dato che la prima componente, $\frac{1}{h}$, converge a 0 e la seconda, $\frac{h+1}{h}$, converge ad 1, si avrà che la successione converge al punto $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$;
2. se definiamo
$$x_h = \left((-1)^h, \frac{1}{h}\right)$$
non può convergere in quanto la successione delle prime componenti, $(-1)^h$, non converge.

La definizione di successione estratta sarà data in modo analogo alla definizione di successione estratta in $\mathbb{R}$, e cioè tramite una funzione $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente; la successione estratta sarà quindi determinata da $(x_{h_k})_{h\in\mathbb{N}}$ con $x_{h_k} = x_{k(h)}$.

Le nozioni di chiuso e compatto possono essere caratterizzate mediante successioni; vale infatti il seguente risultato.

Proposizione 1.13 (Chiusi e compatti per successioni) *Dato un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$, si ha che:*

1. *E è chiuso se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ con x_h convergente ad x, si ha che $x \in E$;*
2. *E è compatto se e solo se da ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ si può estrarre una sottosuccessione $(x_{h_k})_{h\in\mathbb{N}}$ convergente ad un elemento di $x \in E$;*
3. *un punto $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione per E se e solo se esiste una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ con $x_h \neq x$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e tale che x_h converge a x.*

Dimostrazione.

1. Sia $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ una successione convergente ad x; quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_0 \in \mathbb{N}$ tale che per $h > h_0$, $\|x_h - x\| < \varepsilon$, cioè $x_h \in B_\varepsilon(x)$. Dato che $x_h \in E$ per ogni $h \in \mathbb{N}$, abbiamo mostrato che $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$ per ogni $\varepsilon > 0$, cioè $x \in \overline{E} = E$ in quanto E chiuso.

   Viceversa, supponiamo per assurdo che E non sia chiuso, cioè esiste $x \in \partial E \setminus E$; quindi per ogni $r > 0$, $B_r(x) \cap E \neq \emptyset$. Prendendo $r = 1/h$, ne deduciamo l'esistenza di un elemento $x_h \in B_r(x) \cap E$, cioè la possibilità di costruire una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ convergente ad x, e questo contraddice l'ipotesi.

2. Supponiamo E compatto, quindi contenuto in un cubo $\overline{Q}_r$ di lato $2r$. Prendiamo una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ e supponiamo $x_h \neq x_k$ per $h \neq k$; cioè si può fare scartando gli elementi uguali, e quindi a meno di sottosuccessioni, se la successione x_h assume infiniti valori differenti. In caso contrario, la successioni deve assumere un dato valore x_0 infinite volte e quindi definendo
$$k(h) = \{h \in \mathbb{N} : x_h = x_0\},$$
   abbiamo trovato una sottosuccessione che converge a $x_0 \in E$. Quindi, se suddividiamo $\overline{Q}_r$ in 2^n cubi di lato r, abbiamo che infiniti valori di x_h devono appartenere ad uno di tali cubi, che denotiamo con $\overline{Q}_1$; definiamo anche
$$k(1) = \min\{h \in N : x_h \in \overline{Q}_1\}.$$
   Possiamo ricorsivamente definire i cubi $\overline{Q}_h$, che avranno quindi lato $r/2^h$, suddividendo $\overline{Q}_{h-1}$ in 2^n in modo che infiniti elementi della successione appartengano a $\overline{Q}_h$ e
$$k(h) = \min\{h > k(h-1) : x_h \in \overline{Q}_h\}.$$
   I cubetti sono uno contenuto nel precedente e i lati tendono a zero, $r/2^h \to 0$. Avremo inoltre che
$$\bigcup_{h\in\mathbb{N}} \overline{Q}_h = \{x_0\}$$
   e la successione x_{h_k} converge a x_0. Il fatto che $x_0 \in E$ deriva dal fatto che E è chiuso.

   Viceversa, l'insieme E deve essere limitato altrimenti per ogni $h \in \mathbb{N}$ potremmo trovare un elemento $x_h \in E \setminus B_h$ e quindi costruire una successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ con $\|x_h\| \geq h$ da cui non si potrebbe estrarre alcuna successione convergente. Per la chiusura si ragiona come nella seconda parte della dimostrazione del punto 1.

3. Se x è un punto di accumulazione, sappiamo che per ogni $h \in \mathbb{N}$ l'insieme $B_{1/h}(x) \cap (E \setminus \{x\})$ è non vuoto, e quindi contiene almeno un elemento $x_h \in E \setminus \{x\}$. In tal modo si costruisce una successione $(x_h)_h \in \mathbb{N}$, $x_h \neq x$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ con $\|x_h - x\| < 1/h$, cioè $x_h \to x$. Viceversa, se esiste $(x_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset E$ con $x_h \neq x$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $x_h \to x$, allora per definizione di convergenza di una successione sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste h_0 tale che $x_h \in B_\varepsilon(x)$ per ogni $h \geq h_0$. Quiindi
$$B_\varepsilon(x) \cap (E \setminus \{x\}) \not\emptyset$$
   come volevasi dimostrare.

□

Chiudiamo questa sezione con un paio di definizioni che risulteranno sicuramente più chiare nei capitoli successivi; quella di insieme tangente e insieme normale. Il primo viene definito come l'insieme di tutte le semirette ottenibili come limiti di semirette secanti l'insieme, mentre il secondo viene definito come insieme di semirette in un certo senso ortogonali al primo.

Definizione 1.14 (Insieme Tangente e Normale) *Siano $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$;*

1. *se $x_0 \in E$ è un punto isolato, poniamo* $\mathrm{Tan}(E, x_0) = \{0\}$ *e* $\mathrm{Nor}(E, x_0) = \mathbb{R}^n$*;*
2. *se x_0 è un punto di accumulazione per E poniamo*
$$\begin{aligned}\mathrm{Tan}(E, x_0) &= \left\{ v = \lambda\hat{v} : \lambda \geq 0, \exists (x_h)_h \in E, x_h \to x_0 \text{ e } \hat{v} = \lim_{h\to+\infty} \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|} \right\},\\ \mathrm{Nor}(E, x_0) &= \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot v \leq 0, \quad \forall v \in \mathrm{Tan}(E, x_0)\}.\end{aligned}$$

Se l'insieme tangente è uno spazio vettoriale, useremo la notazione

$$T_{x_0}E := \mathrm{Tan}(E, x_0);$$

in tal caso anche il normale è uno spazio vettoriale ed useremo la notazione

$$N_{x_0}E := \mathrm{Nor}(E, x_0).$$

Esempio 1.4

1. Se x_0 è un punto interno ad E, allora

$$\mathrm{Tan}(E, x_0) = T_{x_0}E = \mathbb{R}^n, \qquad \mathrm{Nor}(E, x_0) = N_{x_0}E = \{0\},$$

2. Se E è la semicirconferenza $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, allora nei punti (x_0, y_0) con $y_0 > 0$ il tangente e il normale sonbo delle rette

$$\mathrm{Tan}(E, (x_0, y_0)) = T_{(x_0,y_0)}E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{x_0}{y_0}x\right\},$$

$$\mathrm{Nor}(E, (x_0, y_0)) = N_{(x_0,y_0)}E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{x_0}{y_0}y\right\},$$

mentre per $y_0 = 0$ il tangente è una semiretta

$$\mathrm{Tan}(E, (-1, 0)) = \mathrm{Tan}(E, (1, 0)) = \{(0, \lambda) : \lambda \geq 0\}$$

e il normale è un semipiano

$$\mathrm{Nor}(E, (-1, 0)) = \mathrm{Nor}(E, (1, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}.$$

1.3 Limiti

Veniamo ora allo studio delle funzioni di più variabili, e più precisamente alla definizione di limite e continuità per funzioni di più variabili.

Definizione 1.15 *Data una funzione $f : E \to \mathbb{R}^k$ con $E \subset \mathbb{R}^n$ e x_0 punto di accumulazione per E, diremo che $f(x)$ tende ad un vettore $l \in \mathbb{R}^k$ per x che tende ad x_0, in simboli*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \tag{1.3}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ è tale che $0 < \|x - x_0\| < \delta$, allora $\|f(x) - l\| < \varepsilon$. Nel caso $k = 1$, diremo inoltre che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\textit{risp.} \ -\infty)$$

se per ogni $M > 0$ (risp. $M < 0$) esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$ soddisfa $0 < \|x - x_0\| < \delta$, allora $f(x) > M$ (risp. $f(x) < M$).

Come nel caso di limiti per successioni, anche in questo caso avremo la validità di (1.3) se e solo se per ogni $j = 1, \ldots, n$

$$\lim_{x \to x_0} f_j(x) = l_j.$$

Quindi il calcolo dei limiti si farà componente per componente.

Abbiamo la seguente utile proposizione, che riduce lo studio dei limiti allo studio di limiti di successioni.

Proposizione 1.16 *Data $f : E \to \mathbb{R}^k$ e x_0 punto di accumulazione per E, abbiamo che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{1.4}$$

se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ convergente a x_0, la successione $(f(x_h))_{h\in\mathbb{N}}$ converge ad l.

Dimostrazione. Supponiamo che valga la (1.4) e prendiamo una qualsiasi successione x_h che converge a x_0. Questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < \|x - x_0\| < \delta$ implica $\|f(x) - l\| < \varepsilon$; dato un tale δ, la convergenza di x_h ad x_0 implica che esiste $h_0 \in \mathbb{N}$ per cui $\|x_h - x_0\| < \delta$ se $h \geq h_0$, da cui $\|f(x_h) - l\| < \varepsilon$, cioè il fatto che la successione $f(x_h)$ è convergente con limite l.
Viceversa, dimostriamo l'implicazione inversa; facciamo la dimostrazione per assurdo, supponendo cioè che non valga (1.4). Questo vuol dire che esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste un x_δ con $0 < \|x_\delta - x_0\| < \delta$ e $\|f(x_\delta) - l\| > \varepsilon$. Prendendo $\delta = 1/h$ abbiamo costruito una successione x_h con $0 < \|x_h - x_0\| < 1/h$, cioè x_h convergente ad x_0, tale che $\|f(x_h) - l\| > \varepsilon$, cioè la successione $f(x_h)$ non può convergere a l, e questo è un assurdo. $\square$

Come visto per le successioni, anche per il limite di funzioni valgono le seguenti proprietà;

1. $f(x) \to l \in \mathbb{R}^k$ se e solo se per ogni $j = 1, \ldots k$ si ha che $f_j(x) \to l_j$;
2. se $f(x) \to l$ e $g(x) \to l'$, allora $f(x) + g(x) \to l + l'$ (a meno di forme indeterminate);
3. se $f(x) \to l$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f(x) \to \lambda l$.

1.4 Funzioni continue

Possiamo dare la definizione di continuità in un punto e di funzione continua in modo del tutto analogo a quanto fatto per le funzioni di una variabile.

Definizione 1.17 (Continuità) *Una funzione $f : E \to \mathbb{R}^k$ si dice continua in $x_0 \in E$ punto di accumulazione per E se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

cioè se e solo se per ogni $x_0 \in E$ punto di accumulazione e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in E$, con $0 < \|x - x_0\| < \delta$, allora $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. Diremo che f è continua in E se è continua in ogni $x_0 \in E$ e che f è uniformemente continua su E se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x, y \in E$ sono tali che $\|x - y\| < \delta$, allora $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

Osservazione 1.18 Così come per i limiti di funzioni, anche la continuità può essere caratterizzata per successioni, cioè

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

se e solo se per ogni successione $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ convergente ad x_0, $(f(x_h))_{h\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$. Analogamente, una funzione sarà continua se e solo se ogni sua componente f_i, $i = 1, \ldots, k$ è una funzione continua.

La somma di funzioni continue è continua, moltiplicare una funzione continua per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ produce una funzione continua, ma anche la moltiplicazione di una funzione continua $f : E \to \mathbb{R}^k$ con una funzione continua $g : E \to \mathbb{R}$ produce una funzione continue $gf : E \to \mathbb{R}$ data da $(gf)(x) = g(x)f(x)$ (moltiplicazione della funzione vettoriale f con la funzione scalare g).

Esempio 1.5 È facile a questo punto rendersi conto che le funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date da

$$f(x,y) = x^a, \qquad f(x,y) = y^b, \qquad a,b \in \mathbb{N}$$

sono continue (si usi la caratterizzazione per successioni), e quindi ogni polinomio

$$f(x,y) = \sum_{a,b=0}^{d} c_{ab} x^a y^b$$

è una funzione continua.

Abbiamo inoltre la seguente

Proposizione 1.19 *Siano $f : E \to \mathbb{R}^k$ e $g : F \to \mathbb{R}^m$ due funzioni continue con $E \subset \mathbb{R}^n$, $f(E) \subset F \subset \mathbb{R}^k$; allora la funzione $G : E \to \mathbb{R}^m$ composizione di f e g, $G = g \circ f$ è continua.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella fatta per funzioni di una variabile, usando la definizione di limite; dimostriamo infatti che la funzione $G(x) = g(f(x))$ è continua in ogni punto x_0 di accumulazione per E. Presa una successione x_h convergente ad x_0, la continuità di f implica che la successione $f(x_h)$ converge ad $f(x_0)$ e quindi, la continuità di g implica che la successione $g(f(x_h))$ converge a $g(f(x_0))$, da cui la continuità di G. $\square$

Chiaramente ogni funzione uniformemente continua è continua, mentre non vale in generale il viceversa. Si ha tuttavia il seguente Teorema.

Teorema 1.20 (Teorema di Cantor) *Se $f : E \to \mathbb{R}^k$ è continua ed E è compatto, allora f è uniformemente continua su E.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che la funzione non sia uniformemente continua, e che quindi esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ eisistono $x, y \in E$ per cui $\|x - y\| < \delta$ e $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon$. Prendendo $\delta = 1/h$, $h \in \mathbb{N}$, possiamo quindi costruire due successioni $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$, $(y_h)_{h\in\mathbb{N}}$ di elementi di E tali che $\|x_h - y_h\| < 1/h$ e $\|f(x_h) - f(y_h)\| \geq \varepsilon$. Dato che E è compatto, esistono due sottosuccessioni estratte $(x_{h_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(y_{h_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergenti in E. La condizione

$$\|x_{h_k} - y_{h_k}\| < \frac{1}{h_k} \leq \frac{1}{k} \to 0$$

implica che le due successioni convergono allo stesso limite $x_0 \in E$. La continuità di f implica che

$$f(x_0) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{h_k}) = \lim_{k\to+\infty} f(y_{h_k});$$

siccome però si deve avere

$$0 < \varepsilon \leq \|f(x_{h_k}) - f(y_{h_k})\| \leq \|f(x_{h_k}) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(y_{h_k})\| \to 0,$$

si arriva ad una contraddizione. $\square$

Esempio 1.6 Esempi di funzioni continue sono dati da

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad f(x,y) = xy,$$

mentre non è continua in $(0,0)$ la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

anche se sono continue le funzioni $x \mapsto f(x,y)$ e $y \mapsto f(x,y)$. Ancora più delicato è lo studio della continuità delle funzioni

$$\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}.$$

La continuità e lo studio delle forme indeterminate per funzioni di più variabili è quindi un problema più complicato del caso uni-dimensionale e non basta lo studio delle restrizioni. Vale però il seguente risultato che a volte può essere utile utilizzare.

Proposizione 1.21 *Sia $f : E \to \mathbb{R}^k$ una funzione con $E \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in E$ un punto di accumulazione. Se esiste $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ funzione tale che*

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq g(\|x - x_0\|) \tag{1.5}$$

localmente attorno a x_0, cioè se esiste $r > 0$ tale che (1.5) vale per ogni $x \in B_r(x_0) \cap E$, e se

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = 0, \tag{1.6}$$

allora f è continua in x_0.

Dimostrazione. Basta notare che se $(x_h)_{h\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente a x_0, allora la successione $t_h = \|x_h - x_0\|$ tende a zero e quindi

$$\lim_{h\to+\infty} \|f(x_h) - f(x_0)\| \leq \lim_{h\to+\infty} g(t_h) = 0,$$

cioè la successione $(f(x_h))_{h\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$. □

Il precedente risultato solitamente si utilizza, nel piano, passando alle cordinate polari centrate in x_0.

Esempio 1.7 La funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

è continua in $(0,0)$ in quanto passando alle coordnate polari $(x,y) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$ troviamo che

$$|f(x,y)| = \left| \frac{\varrho^3 \cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\varrho^2} \right| \leq \varrho = g(\varrho)$$

con $g(t) = t$ che soddisfa la condizione (1.6) della Proposizione 1.21.

Per la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}$$

invece la Proposizione non si in quanto se si passa alle coordinate polari si trova che

$$f(x, y) = \varrho \frac{\cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta}{\cos^2 \vartheta - \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

e la quantità

$$\frac{\cos^2 \vartheta \operatorname{sen} \vartheta}{\cos^2 \vartheta - \operatorname{sen}^2 \vartheta}$$

non è limitata.

Esempio 1.8 Esempi importanti di funzioni che soddisfano in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le condizioni della Proposizione 1.21 sono dati da:

1. le funzioni affini
$$f(x) = Ax + b, \qquad A \in \mathbb{R}^{k\times n}, b \in \mathbb{R}^k$$
per cui vale
$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|A(x - x_0)\| \leq \|A\| \, \|x - x_0\|;$$
2. le funzioni quadratiche
$$f(x) = Ax \cdot x, \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
per cui vale
$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|A\|\|x - x_0\|^2;$$
3. le funzioni Lipschitz, cioè le funzioni per cui esiste $L > 0$ tale che
$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq L\|x - x_0\|.$$

1.4.1 Funzioni continue e topologia

Premettiamo il seguente lemma, che è il teorema della permanenza del segno per funzioni di più variabili; l'enunciato così come la sua dimostrazione è identico al caso uni–dimensionale..

Lemma 1.22 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in E$; se $f(x_0) > 0$, allora esiste $r > 0$ tale che per ogni $x \in B_r(x_0) \cap E$ vale $f(x) > 0$.*

Dimostrazione. Sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x - x_0\| < \delta$, $x \in E$, allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Basta quindi prendere $\varepsilon = f(x_0)$ e porre $r = \delta$ per trovare che per ogni $\|x - x_0\| < r$, $x \in E$, cioè per ogni $x \in B_r(x_0) \cap E$ si ha $0 < f(x) < 2f(x_0)$. □

Abbiamo la seguente relazione tra funzioni continue e topologie, che fornisce un modo per costruire insiemi aperti e chiusi tramite funzioni continue.

Proposizione 1.23 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua, allora:*

1. *per ogni $c \in \mathbb{R}$ gli insiemi*
$$\{x \in E : f(x) < c\} := \{f < c\}, \qquad \{x \in E : f(x) > c\} := \{f > c\}$$
sono relativamente aperti, sono intersezioni di aperti con l'insieme E;

2. *gli insiemi*

$$\{x \in E : f(x) \leq c\} := \{f \leq c\}, \qquad \{x \in E : f(x) \geq c\} := \{f \geq c\},$$

$$\{x \in E : f(x) = c\} := \{f = c\}$$

sono relativamente chiusi, cioè intersezione di chiusi con E.

Dimostrazione. Per vedere che gli insiemi $\{f > c\}$ e $\{f < c\}$ sono relativamente aperti, si applica il teorema della permanenza del segno alle funzioni continue $f(x) - c$ per dire che se $x_0 \in \{f > c\}$ allora esiste $r = r_{x_0} > 0$ tale che per ogni $x \in B_r(x_0) \cap E$ $f(x) > c$, cioè $B_r(x_0) \cap E \subset \{f > c\}$. In definitiva

$$\{f > c\} = E \cap \bigcup_{x_0 \in \{f > c\}} B_{r_{x_0}}(x_0)$$

è relativamente aperto. Stesso ragionamento si applica per $\{f < c\}$.

Per quanto riguarda la seconda parte, basta notare che

$$\{f \geq c\} = E \setminus \{f < c\}, \qquad \{f \leq c\} = E \setminus \{f > c\},$$

ed essendo complementari di insiemi relativamente aperti sono relativamente chiusi. Infine

$$\{f = c\} = E \setminus (\{f > c\} \cup \{f < c\})$$

è relativamente chiuso in quanto complementare dell'unione di due insiemi relativamente aperti. □

Osservazione 1.24 Gli insiemi $\{f > c\}$ e $\{f \geq c\}$ vengono chiamati sopralivello aperto e chiuso relativo al livello c, $\{f < c\}$ e $\{f \leq c\}$ vengono chiamati sottolivello aperto e chiuso relativo al livello c e $\{f = c\}$ viene chiamato insieme di livello c.

Esempio 1.9 Se consideriamo le funzioni $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $g(x, y) = xy$ (che sono continue), se ne ricava che $\{x^2 + y^2 < c\}$ è aperto per ogni $c > 0$ (d'altronde coincide con $B_{\sqrt{c}}(0)$), così pure gli insiemi $\{xy > c\}$ sono aperti.

Math

Bibliografia

[1] Marco Bramanti and Sandro Pagani, Carlo Domenico e Salsa. *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare*. Zanichelli, 2004.

[2] Marco Bramanti and Sandro Pagani, Carlo Domenico e Salsa. *Analisi Matematica 2*. Zanichelli, 2009.

[3] Enrico Giusti. *Analisi Matematica vol 2*. Progr. Matem. Fisica Elettronica. Boringhieri, 2003.