UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

# Appunti del corso di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 30, I-44121 Ferrara
e–mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1] Versione aggiornata al 2 ottobre 2019

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti del corso di Analisi Matematica 2 dal Corso di Laurea Triennale di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Ferrara.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida relativa agli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire un buon libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. Viene fornita in bibliografia una lista di testi che si ritengono validi per lo studio della materia. La funzione di questi appunti è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei sono molto buone e ben fornite di ottimi testi. Tra i vari testi disponibili consigliamo sicuramente il testo [2] o la sua edizione precedente [1]; un altro ottimo testo è [3]

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto è possibile che alcune parti vengano corrette ed integrate durante il corso.

Michele Miranda<br>Ferrara, 2 ottobre 2019

# Indice

# Capitolo 2

# Calcolo infinitesimale per le curve

Iniziamo lo studio delle funzioni vettoriali di più variabili con il caso più semplice; tale studio ci permetterà di sviluppare strumenti e concetti utili per un approccio sistematico al caso generale. Cominceremo con lo studiare le curve dello spazio Euclideo, cioè funzioni vettoriali di una sola variabile reale; le curve, in questo capitolo, per noi saranno entità parametrizzate (determinate dalle funzioni che le definiscono), ma vedremo quali informazioni geometriche sul luogo dei suoi punti (traiettorie) si possono dedurre dalla parametrizzazione.

Da quanto visto nel capitolo precedente, considerare una funzione $r : I \to \mathbb{R}^n$ con $I \subset \mathbb{R}$ equivale a considerare $n$ funzioni $r : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$,

$$r(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t)).$$

La nozione di limite e di continuità su $r$ si traduce nelle analoghe nozioni per le funzioni $r_i$, che sono quindi le usuali nozioni di limite e continuità per funzioni reali di variabile reale. Diremo quindi che $r$ è continua in un punto $t_0 \in I$ se sono continue in $t_0$ tutte le funzioni $r_i$.

## 2.1 Curve e curve regolari

Iniziamo subito con la definizione di curva.

**Definizione 2.1 (Curva parametrizzata)** *Una curva parametrizzata in $\mathbb{R}^n$ è data da una funzione continua $r : I \to \mathbb{R}^n$ con $I$ intervallo di $\mathbb{R}$, limitato o meno (non necessariamente aperto o chiuso); la funzione $r$ viene detta* parametrizzazione *della curva.*

Una curva parametrizzata è quindi semplicemente determinata da una funzione $r \in C(I, \mathbb{R}^n)$ con $I$ intervallo di $\mathbb{R}$. La richiesta della continuità nella definizione di curva serve per sottolineare che la variare di $t \in I$, il punto $r(t)$ si muove nello spazio $\mathbb{R}^n$ con continuità, descrivendo cioè una traiettoria continua. Si definisce il supporto o sostegno di $r$ l'insieme

$$r(I) = \{r(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n :$$

il sostegno di una curva non va confuso con il grafico della curva, il quale è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $I \times \mathbb{R}^n$.

**Esempio 2.1**

**Retta, semiretta e Segmento.** Dati due punti $x_1$ e $x_2$ in $\mathbb{R}^n$, la retta passante per essi è parametrizzata da $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$r(t) = x_1 + t(x_2 - x_1).$$

Se si usa la stessa parametrizzazione ma definita con $t$ in $[0, +\infty)$ o in $[0, 1]$, si ottiene la semiretta o il segmento, denotato con $[x_1, x_2]$), congiungente $x_1$ e $x_2$; tale segmento è un segmento orientato che parte da $x_1$ (tempo $t = 0$) e termina in $x_2$ (tempo $t = 1$). Se poniamo $v = x_2 - x_1$, possiamo scriveres

$$r(t) = x_1 + tv;$$

se si utilizza questa notazione si sta sottolineando che il segmento (semiretta o retta) individuato da $r$ passa per il punto $x_1$ e viene percorso seguendo la direzione $v$.

**Unione di due segmenti.** Dati tre punti distinti $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$, possiamo definire la curva unione di $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ in vari modi; ad esempio possiamo definire $r : [0, 2] \to \mathbb{R}^n$,

$$r(t) = \begin{cases} x_1 + t(x_2 - x_1) & t \in [0, 1] \\ x_2 + (t-1)(x_3 - x_2) & t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Analogamente potremmo considerare $\tilde{r} : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ data da

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} x_1 + 2t(x_2 - x_1) & t \in [0, 1/2] \\ x_2 + (2t-1)(x_3 - x_2) & t \in [1/2, 1]; \end{cases}$$

come vedremo in seguito, queste due definizioni sono equivalenti tra loro, nel senso che specificheremo.

**Poligonale.** Data una collezione ordinata di punti $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ di punti, si definisce poligonale $\mathscr{P}$ di vertici $x_0, \ldots, x_k$ l'unione dei segmenti $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, k$ parametrizzata quindi dalla curva $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$

$$r(t) = x_{i-1} + (kt - i + 1)(x_i - x_{i-1}), \qquad \frac{i-1}{k} \le t \le \frac{i}{k}.$$

**Circonferenza nel piano.** Nel piano, la circonferenza di raggio $R > 0$ centrata nell'origine può essere parametrizzata dalla funzione $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (R \cos t, R \operatorname{sen} t).$$

**Ellisse nel piano.** L'ellisse del piano $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ può essere parametrizzata dalla funzione $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t).$$

**Definizione 2.2** *Data una curva $r : I \to \mathbb{R}^n$, diremo che:*

1. *$r$ è regolare se $r \in C^1(I)$ con $r'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$;*
2. *$r$ è regolare a tratti se possiamo decomporre $I$ in sottointervalli disgiunti $I_i$ con $i = 1, \ldots, k$ in modo tale che $r$ sia regolare in $I_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$;*

3. *la curva si dice* semplice *se $t_1 \neq t_2$ implica $r(t_1) \neq r(t_2)$, con almeno uno dei due punti $t_1$ o $t_2$ interno ad $I$;*
4. *se $I = [a,b]$, il punto $r(a)$ si dice primo estremo o punto iniziale della curva, mentre $r(b)$ si dice secondo estremo o punto finale della curva;*
5. *se $I = [a,b]$, la curva si dice chiusa se $r(a) = r(b)$.*

La definizione di curva semplice può sembrare complicata, ma serve semplicemente per ammettere anche curve chiuse semplici, quali la circonferenza, in cui gli unici due punti di non iniettività della curva sono gli estremi.

Data una curva regolare, il versore

$$\hat{\tau}_r(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(r)\|}$$

viene chiamato versore tangente. Tale definizione è giustificata dalla seguente proposizione.

**Proposizione 2.3** *Sia $r : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare semplice e $t_0 \in I^\circ$ un punto interno ad $I$; allora*

$$\mathrm{Tan}(r(I), r(t_0)) = T_{r(t_0)} r(I) = \langle r'(t_0) \rangle = \langle \hat{\tau}_r(t_0) \rangle.$$

*Nel caso $a = \inf I \in I$, $r$ curva non chiusa che ammette derivata destra in $a$,*

$$\mathrm{Tan}(r(I), r(a)) = \{\lambda \hat{\tau}_r(a^+) : \lambda \geq 0\};$$

*analogamente se $b = \sup I \in I$, $r$ curva non chiusa cohe ammette derivata sinistra in $b$*

$$\mathrm{Tan}(r(I), r(b)) = \{-\lambda \hat{\tau}_r(b^-) : \lambda \geq 0\}.$$

*Se $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva chiusa che ammette derivata destra in $a$ e derivata sinistra in $b$ allora*

$$\mathrm{Tan}(r(I), r(a)) = \mathrm{Tan}(r(I), r(b)) = \{\lambda \hat{\tau}_r(a^+) : \lambda \geq 0\} \cup \{-\lambda \hat{\tau}_r(b^-) : \lambda \geq 0\}.$$

Dimostrazione. Un punto $x_h$ appartiene a $r(I)$ se esiste $t_h \in I$ per cui $x_h = r(t_h)$. Avremo che $x_h \to r(t_0)$ se e solo se $t_h \to t_0$

Si fissi $t_0 \in I$; se $r$ è derivabile a destra in $t_0$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to+\infty} \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|} &= \lim_{t_h \to t_0^+} \frac{r(t_h) - r(t_0)}{\|r(t_h) - r(t_0)\|} = \lim_{t_h \to t_0^+} \frac{r(t_h) - r(t_0)}{t_h - t_0} \frac{t_h - t_0}{\|r(t_h) - r(t_0)\|} \\
&= \lim_{t_h \to t_0^+} \frac{r(t_h) - r(t_0)}{t_h - t_0} \frac{|t_h - t_0|}{\|r(t_h) - r(t_0)\|} = \lim_{t_h \to t_0^+} \frac{r(t_h) - r(t_0)}{t_h - t_0} \frac{1}{\|\frac{r(t_h) - r(t_0)}{t_h - t_0}\|} \\
&= \frac{r'(t_0^+)}{\|r'(t_0^+)\|} = \hat{\tau}_r(t_0^+).
\end{aligned}$$

Quindi, seguendo la Definizione 1.14, l'insieme

$$\{\lambda \hat{\tau}_r(t_0^+) : \lambda \geq 0\}$$

è contenuto nell'insieme tangente, con uguaglianza se $t_0 = \inf I$. Analogamente se $r$ derivabile derivabile a sinistra in $t_0$,

$$\lim_{h\to+\infty} \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|} = \lim_{t_h \to t_0^-} \frac{r(t_h) - r(t_0)}{\|r(t_h) - r(t_0)\|} = - \lim_{t_h \to t_0^-} \frac{r(t_h) - r(t_0)}{t_h - t_0} \frac{|t_h - t_0|}{\|r(t_h) - r(t_0)\|} = -\hat{\tau}_r(t_0).$$

Quindi

$$\{-\lambda \hat{\tau}_r(t_0^-) : \lambda \geq 0\}$$

è contenuto nell'insieme tangente, con uguaglianza se $t_0 = \sup I$. Se $t_0$ è punto interno, la conclusione segue mettendo insieme le due cosiderazioni precedenti. □

Abbiamo quindi dimostrato che $\hat{\tau}_r(t_0^{\pm})$ determina lo spazio tangente; la retta tangente è invece data, se $t_0$ è punto interno, da

$$r(t_0) + t\hat{\tau}_r(t_0), \qquad t \in \mathbb{R},$$

mentre se $a = \inf I \in I$ ed $r$ derivabile a destra in $a$,

$$r(a) + t\hat{\tau}_r(a^+), \qquad t \geq 0,$$

parametrizza la semiretta tangente in $r(a)$, così come se $b = \sup I \in I$ e $r$ derivabile a sinistra in $b$

$$r(b) - t\hat{\tau}_r(b^-), \qquad t \geq 0$$

parametrizza la semiretta tangente in $r(b)$. Per quanto riguarda il normale, se $t_0$ è punto interno, esso sarà lo spazio vettoriale

$$\mathrm{Nor}(r(I), r(t_0)) = N_{r(t_0)}r(I) = \{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot \hat{\tau}_r(t_0) = 0\},$$

mentre se $a = \inf I \in I$, è dato dal semispazio

$$\{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot \hat{\tau}_r(a^+) \leq 0\},$$

s se $b = \sup I \in I$ è dato dal semispazio

$$\{w \in \mathbb{R}^n : w \cdot \hat{\tau}_r(b^-) \geq 0\}.$$

L'iperpiano ortonale si ottiene semplicemente traslando nel punto $r(t_0)$ il normale, ed è quindi dato da

$$r(t_0) + \mathrm{Nor}(r(I), r(t_0)).$$

Abbiamo visto negli esempi che una semicirconferenza può essere parametrizzatai in due modi differenti; talii parametrizzazioni rappresentano però lo stesso oggetto geometrico e quindi le due parametrizzazioni possono essere considerate interscambiabili. Questo concetto di intersscambiabilità può essere generalizzato se si considera la s eguente nozione.

**Definizione 2.4 (Curve equivalenti)** *Due curve regolari $r : I \to \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : J \to \mathbb{R}^n$ si dicono equivalenti se esiste una funzione $\alpha : I \to J$ continua di di classe $C^1$ nella parte interna di $I$, iniettiva e suriettiva tale che $\alpha'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I^\circ$ e*

$$r(t) = \tilde{r}(\alpha(t)), \qquad \forall t \in I.$$

*La mappa $\alpha$ viene anche chiamata cambiamento di parametro o riparametrizzazione; se $\alpha" > 0$, si dice che la riparametrizzazione preserva l'orentazione, altrimenti si dice che la riparametrizzazione inverte l'orientazione.*

L'equivalenza di due curve implica l'uguaglianza dei due sostegni, mentre il viceversa non è vero; ad esempio le due funzioni $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ e $\tilde{r} : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ hanno lo stesso sostegno ma non sono equivalenti. Per poter caratterizzare curve equivalenti tramite il sostegno, bisogna restringersi alla classe delle curve semplici. Abbiamo cioè il seguente risultato.

**Proposizione 2.5** *Siano $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ due curve regolari e semplici; allora le due curve sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso sostegno, cioè se e solo se*

$$r([a, b]) = \tilde{r}([c, d]).$$

Dimostrazione. Si costruisce la riparametrizzazione come segue; se le curve non sono chiuse per $t \in I$, abbiamo che $r(t) \in r([a,b]) = \tilde{r}([c,d])$. Esiste quindi un unico $s \in J$ tale che $\tilde{r}(s) = r(t)$. Definiamo quindi $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ ponendo $\alpha(t) := s$. La mappa così definitia è iniettiva e suriettiva. Dimostriamo la continuità; sia $\{t_h\}_{h\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ una successione con $t_h \to t_0 \in [a,b]$. Denotiamo con $x_h = r(t_h)$ e $s_h = \alpha(t_h)$. Per continuità si ha che $x_h \to x_0 \in r([a,b])$ e $x_0 = r(t_0)$. Per compattezza invece la successione $\{s_h\}_{h\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione estratta convegente, $\{s_{h_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [c,d]$, $s_{h_k} \to s_0$. Ancora per continuità si deve avere $x_{h_k} = \tilde{r}(s_{h_k}) \to x_0$, e quindi $\tilde{r}(s_0) = x_0 = r(t_0)$, cioè $s_0 = \alpha(t_0)$, quindi la continuità di $\alpha$. La derivabilità di $\alpha$ segue dalle seguenti uguaglianze

$$r'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} \frac{\tilde{r}(\alpha(t)) - \tilde{r}(\alpha(t_0))}{\alpha(t) - \alpha(t_0)}.$$

Sapendo dalla continuità di $\alpha$ che $s = \alpha(t)$ converge a $s_0 = \alpha(t_0)$, dall'uguaglianza precedente si deduce che $\alpha$ è derivabile in $t_0$ e vale l'identità

$$r'(t_0) = \alpha'(t_0)\tilde{r}'(s_0).$$

□

Si noti che la condizione $\alpha' \neq 0$ implica che $\alpha' > 0$ oppure $\alpha' < 0$; quindi $\alpha$ è sempre strettamente monotona. Nel caso in cui $\alpha$ sia monotona crescente, avremo che due curve equivalenti avranno lo stesso verso di percorrenza, mentre nel caso di $\alpha$ decrescente, il loro verso di percorrenza sarà opposto.

**Esempio 2.2**

1. Una riparametrizzazione per una curva $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è data ad esempio da

$$\alpha : [a,b] \to [0,1], \qquad \alpha(t) = \frac{t-a}{b-a}.$$

   Non sarà quindi restrittivo supporre sempre una curva definita sull'intervallo $[0,1]$, almeno nel caso in cui $I$ sia un intervallo chiuso e limitato.

2. L'arco di circonferenza $r : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

   può essere equivalentemente riparametrizzata da $\tilde{r} : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\tilde{r}(t) = (t, \sqrt{1-t^2}).$$

   In questo caso cercare una riparametrizzazione significa cercare una funzione $\alpha : [-1,1] \to [0,\pi]$ tale che $r(\alpha(t)) = \psi(t)$, cioè

$$(\cos\alpha(t), \operatorname{sen}\alpha(t)) = (t, \sqrt{1-t^2}).$$

   Troviamo quindi che $\alpha(t) = \arccos t$; tale riparametrizzione è derivabile per $t \in (-1,1)$ e $\alpha'(t) = -1/\sqrt{1-t^2}$, cioè cambia l'orientamento della curva.

## 2.2 Lunghezza, ascissa curvilinea e integrali curvilinei

In questa sezione diamo la definizione di lunghezza di una curva e forniamo un metodo di calcolo, almeno nel caso di curve regolari. La prima osservazione è che, dati due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$, la distanza tra essi coincide con la lunghezza del segmento che li unisce, cioè

$$\ell([x,y]) = \|x - y\|.$$

Analogamente, data una poligonale $\mathscr{P}$ di vertici $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, possiamo definire la lunghezza della poligonale ponendo

$$\ell(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{k} \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Infine, data una curva $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, una poligonale inscritta in $r$ è una scelta crescente di istanti $a \leq t_0 < \ldots < t_k \leq b$ che individuano la poligonale $\mathscr{P}$ di vertici definiti da

$$x_i = r(t_i), \qquad i = 0, \dots, k.$$

**Definizione 2.6 (Lunghezza di una curva)** *Data $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva parametrizzata, si definisce lunghezza di $r$ la quantità*

$$\ell(r, [a,b]) = \sup\{\ell(\mathscr{P}) : \mathscr{P} \text{ poligonale inscritta in } r\}. \tag{2.1}$$

*Nel caso in cui sia $r : I \to \mathbb{R}^n$, con $I$ intervallo generico, si procede con un metodo di esaustione, nel senso che si calcola la lunghezza sugli intervalli $[a,b] \subset I$ e si invade $I$ con tali intervalli. Diremo che la curva $r$ è rettificabile in $I$ se ha lunghezza finita, cioè se $\ell(r, I) < +\infty$.*

Una proprietà importante della definizione della lunghezza di una curva $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è che se $c \in (a,b)$, allora

$$\ell(r, [a,b]) = \ell(r, [a,c]) + \ell(r, [c,b]).$$

In particolare, la funzione $s : [a,b] \to \ell(r, [a,b])$ definita da

$$s(t) = \ell(r, [a,t])$$

è una funzione monotona crescente. Tale funzione prende il nome di *ascissa curvilinea*, oppure *parametro o lunghezza d'arco*. Per il calcolo della lunghezza di una curva abbiamo la Proposizione 2.8, valida nel caso di curve regolari. Prima di enunciare e dimostrare tale proposizione, introduciamo e dimostriamo alcune proprietà dell'integrazione per curve. Se $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva, possiamo definire il suo integrale ragionando componente per componente;

$$\int_a^b r(t)dt := \left( \int_a^b r_1(t)dt, \dots, \int_a^b r_n(t)dt \right).$$

Per tale integrale vale la seguente proprietà, che enunciamo come Lemma.

**Lemma 2.7** *Sia $r : [a,b] \to \mathbb{R}$ una curva; allora*

$$\left\| \int_a^b r(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|r(t)\|dt.$$

Dimostrazione. La continuità della funzione $r$ implica che il suo integrale può essere ottenuto come limite delle somme di Riemann

$$\sum_{j=1}^{k-1} r(t_j)(t_{j+1} - t_j),$$

con $a \le t_0 < \ldots < t_k \le b$ suddivisione dell'intervallo $[a,b]$. Per la disuguaglianza triangolare della norma, si ottiene che

$$\left\| \sum_{j=1}^{k-1} r(t_j)(t_{j+1} - t_j) \right\| \le \sum_{j=1}^{k-1} \|r(t_j)\|(t_{j+1} - t_j).$$

Passando al limite sulle somme di Riemann con

$$\max_{j=1,\ldots,k-1} (t_{j+1} - t_j) \to 0,$$

il lemma risulta dimostrato. $\square$

Notiamo infine, che ragionando componente per componente, nel caso in cui $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sia una curva regolare, vale ancora il Teorema fondamentale del calcolo integrale, cioè

$$\int_a^b r'(t)dt = r(b) - r(a).$$

**Proposizione 2.8** *Sia $r : I \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti; allora*

$$\ell(r, I) = \int_I \|r'(t)\|dt.$$

*In particolare, per l'ascissa curvilinea si ha*

$$\frac{ds(t)}{dt} = \|r'(t)\|,$$

*mentre la curva $\tilde{r} : [0, \ell(r, I)] \to \mathbb{R}^n$ definita da*

$$\tilde{r}(s) = \tilde{r}(s(t)) := r(t)$$

*è una riparametrizzazione equivalente di $r$ con*

$$\left\| \frac{d\tilde{r}(s)}{ds} \right\| = 1.$$

Dimostrazione. Supponiamo per comodità $I = [a,b]$ e $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ regolare; il caso generale si ottiene per additività ed invadendo un intervallo generico $I$ con intervalli chiusi e limitati. Dimostriamo quindi che la funzione lunghezza d'arco

$$s(t) = \ell(r, [a,t])$$

è derivabile con $s'(t) = \|r'(t)\|$. Se consideriamo i punti $t$ e $t+h$, $h > 0$, è facile rendersi conto che

$$\|r(t+h) - r(t)\| \le s(t+h) - s(t) = \ell(r, [t, t+h]), \tag{2.2}$$

dato che $t$ e $t+h$ definiscono una particolare partizione dell'intervallo $[t, t+h]$. Sia ora $\mathscr{P}$ una poligonale generica individuata da una partizione $t_0, \ldots, t_k$ di $[t, t+h]$; grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale, otteniamo

$$\begin{aligned} \ell(r, \mathscr{P}) &= \sum_{i=1}^{k} \|r(t_i) - r(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{k} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} r'(\tau)d\tau \right\| \le \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|r'(\tau)\|d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_k} \|r'(\tau)\|d\tau \le \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\|d\tau. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore su tutte le partizioni:

$$s(t+h) - s(t) = \ell(r, [t, t+h]) \le \int_t^{t+h} \|r'(\tau)\|d\tau. \tag{2.3}$$

Combinando (2.2) e (2.3), si ottiene infine:

$$\left\|\frac{r(t+h)-r(t)}{h}\right\| \leq \frac{s(t+h)-s(t)}{h} \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|r'(\tau)\| d\tau;$$

Passando al limite $h \to 0^+$, dal fatto che $r$ è derivabile con continuità si ottiene che

$$\exists \lim_{h\to 0^+} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \|r'(t)\|.$$

Il caso $h < 0$ si tratta in modo equivalente, e quindi la prima parte del teorema è dimostrata. Per la seconda parte, quanto detto sopra mostra che $s : [a,b] \to [0, \ell(r,[a,b])]$ è una funzione strettamente monotona crescente, quindi invertibile. Definiamo la curva $\tilde{r} : [0, \ell(r,[a,b])] \to \mathbb{R}^n$ ponendo $\tilde{r}(\tau) = r(s^{-1}(\tau))$, cioè $r(t) = \tilde{r}(s(t))$. Le curve $\tilde{r}$ e $r$ sono equivalenti con riparametrizzazione data proprio dalla lunghezza d'arco. Infine, dalla derivata della funzione composta, si ottiene

$$r'(t) = \frac{d}{d}\tilde{r}(s(t)) = s'(t)\tilde{r}'(s(t)) = \|r'(t)\|\tilde{r}'(s).$$

□

Abbiamo anche la seguente proprietà, che ci assicura che la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione scelta.

**Proposizione 2.9** *Siano $r : I \to \mathbb{R}^n$ e $\tilde{r} : J \to \mathbb{R}^n$ due curve regolari equivalenti; allora*

$$\ell(r, I) = \ell(\tilde{r}, J).$$

DIM. Supponiamo per comodità l'insieme $I = [a,b]$ e $J = [c,d]$ e sia $\alpha : [a,b] \to [c,d]$ una riparametrizzazione ammissibile; supponiamo anche $\alpha' > 0$, da cui si deduce che $\alpha(a) = c$ e $\alpha(b) = d$. Allora, tenendo conto che

$$r'(t) = \frac{d}{dt}r(t) = \frac{d}{dt}\tilde{r}(\alpha(t)) = \alpha'(t)\tilde{r}'(\alpha(t)),$$

si ottiene, mediante il cambio di variabile $\tau = \alpha(t)$,

$$\ell(\tilde{r}, [c,d]) = \int_c^d \|\tilde{r}'(\tau)\| d\tau = \int_a^b \frac{\|r'(t)\|}{|\alpha'(t)|}\alpha'(t) dt = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

in quanto $\alpha' > 0$. □

## 2.3 Curvatura e terna di Frenet

Supponiamo di avere una curva regolare $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$; per definire la curvatura di $r$ abbiamo bisogno di prendere le derivate seconde di $r$ e quindi supporremo $r \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$. Se consideriamo la riparametrizzazione $\tilde{r}$ di $r$ per lunghezza d'arco, abbiamo visto che $\|\tilde{r}'(s)\|^2 = 1$, e quindi

$$0 = \frac{d}{ds}\left(\tilde{r}'(s) \cdot \tilde{r}'(s)\right) = 2\tilde{r}'(s) \cdot \tilde{r}''(s),$$

cioè il vettore $\tilde{r}''(s)$ è ortogonale a $\tilde{r}'(s)$. La quantità

$$k_{\tilde{r}}(s) = \|\tilde{r}''(s)\|$$

viene detta curvatura scalare di $\tilde{r}$; se $k_{\tilde{r}}(s) \neq 0$, possiamo quindi definire il versore

$$\hat{n}_{\tilde{r}}(s) = \frac{\tilde{r}''(s)}{\|\tilde{r}''(s)\|}$$

che viene chiamato *normale principale* alla curva. In questo modo possiamo scrivere che

$$\tilde{r}''(s) = k_{\tilde{r}}(s)\hat{n}_{\tilde{r}}(s).$$

Siccome non sempre è agevole calcolare il parametro d'arco e quindi riparametrizzare la curva per lunghezza d'arco, vediamo come si può definire la curvatura utilizzando direttamente la parametrizzazione $r$. Denoteremo con

$$\hat{n}_r(t) := \hat{n}_{\tilde{r}}(s(t)), \qquad k_r(t) := k_{\tilde{r}}(s(t)). \tag{2.4}$$

Dal fatto che $\hat{\tau}_r(t) = \hat{\tau}_{\tilde{r}}(s(t)) = \tilde{r}'(s(t))$ e da (2.4), derivando si ottiene che

$$\hat{\tau}_r'(t) = s'(t)\tilde{r}''(s(t)) = \|r'(t)\|k_r(t)\hat{n}_r(t) = v(t)k_r(t)\hat{n}_r(t).$$

Quindi, siccome $r'(t) = v(t)\hat{\tau}_r(t)$, otteniamo la seguente decomposizione per l'accelerazione vettoriale

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) :=& r''(t) = (v(t)\hat{\tau}_r(t))' = v'(t)\hat{\tau}_r(t) + v^2(t)k_r(t)\hat{n}_r(t)\\ =& a(t)\hat{\tau}_r(t) + \frac{v^2(t)}{\varrho_r(t)}\hat{n}_r(t),\end{aligned} \tag{2.5}$$

dove abbiamo denotato con $a(t) = v'(t)$ l'accelerazione scalare e con $\varrho_r(t) = 1/k_r(t)$ il raggio di curvatura della curva. Si chiama *cerchio osculatore* il cerchio di raggio $\varrho_r(t)$ centrato in $r(t) + \varrho_r(t)\hat{n}_r(t)$ e contenuto nel piano generato da $\hat{\tau}_r(t)$ e $\hat{n}_r(t)$. Se moltiplichiamo (2.5) scalarmente per $\hat{\tau}_r(t)$ otteniamo che

$$a(t) = r''(t) \cdot \hat{\tau}_r(t),$$

che in realtà non è una formula tanto interessante in quanto $a(t)$ può essere calcolata derivando direttamente $v(t)$. Conoscendo la velocità scalare e $\hat{\tau}_r(t)$, si possono ricavare la curvatura e la normale principale mediante

$$k_r(t)\hat{n}_r(t) = r''(t) - a(t)\hat{\tau}_r(t).$$

Nel caso in cui la curva sia in $\mathbb{R}^3$, si può anche moltiplicare la (2.5) vettorialmente per $\hat{\tau}_r(t)$ in modo da ottenere

$$\hat{\tau}_r(t) \times r''(t) = v^2(t)k_r(t)\hat{\tau}_r(t) \times \hat{n}_r(t).$$

Il vettore $\hat{b}_r(t) = \hat{\tau}_r(t) \times \hat{n}_r(t)$, chiamato *binormale alla curva* $r$, ha norma 1, è ortogonale sia a $\hat{\tau}_r(t)$ che a $\hat{n}_r(t)$ e quindi il sistema $\{\hat{\tau}_r(t), \hat{n}_r(t), \hat{b}_r(t)\}$ definisce una base destrorsa di $\mathbb{R}^3$; tale sistema viene chiamato *terna di Frenet*. Se ne deduce che la curvatura di $r$ può essere calcolata come

$$k_r(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

### 2.3.1 Circonferenza osculatrice

Abbiamo visto come per una curva regolare si detrerminano spazio tangente e normale; introduciamo qui la nozione di circonferenza osculatrice, che e' definita come la circonferenza tangente alla curva in un punto dato contenuta nel piano determinato dai vettori $\hat{\tau}_r$ e $\hat{n}_r$.

Tale circonferenza è quindi definita sel a curvatura della curva è non nulla; in tal caso, fissato $t_0 \in I^\circ$, definiamo il raggio di curvatura ponendo

$$\varrho_r(t_0) = \frac{1}{k_r(t_0)}$$

e la circonferenza osculatrice come la circonferenza parametrizzata da

$$\varphi(t) = r(t_0) + \varrho_r(t_0)\hat{n}_r(t_0) + \varrho_r(t_0)\left(\cos t\hat{\tau}_r(t_0) + \operatorname{sen} t\hat{n}_r(t_0)\right).$$

Tale circonferenza ha raggio $\varrho_r(t_0)$ ed è centrata nel punto $r(t_0) + \varrho_r(t_0)\hat{n}_r(t_0)$.

### 2.3.2 Curve nel piano

La geometria del piano permette di vedere le curve in vari modi. Ad esempio, se viene data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ continua reale di variabile reale, allora possiamo definire in modo canonico due curve parametrizzate $r_x : I \to \mathbb{R}^2$, $r_y : I \to \mathbb{R}^2$

$$r_x(t) = (t, f(t)), \qquad r_y(y) = (f(t), t),$$

dette curve cartesiane rispettivamente rispetto ad $x$ e rispetto ad $y$ definite dalla funzione $f$. In tal caso il sostegno delle curve $r_x$ e $r_y$ coincide con il grafico della funzione $f$, grafico rispettivamente in $x$ e in $y$. Le curve date sono regolari se e solo se $f$ è di classe $C^1(I)$ ed in tal caso, avendosi

$$r_x'(t) = (1, f'(t)), \qquad r_y'(y) = (f'(t), 1)$$

la condizione $r' \neq 0$ è automaticamente verificata.

Viceversa, se si vuole vedere una curva parametrizzata $r : I \to \mathbb{R}^2$ come una curva cartesiana, si dovrà richiedere che $r$ sia una curva semplice e che il sostegno di $r$ sia un grafico, cioè che l'intersezione del sostegno con rette verticali (nel caso di curva cartesiana rispetto alla $x$) contenga al più un punto, mentre l'intersezione con rette orizzontali (nel caso cartesiano rispetto alla $y$) contenga al più un punto. La formula della lunghezza si riduce quindi a

$$\ell(r, [a,b]) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt$$

che fornisce la formula della lunghezza del grafico della funzione $f$.

Per quanto riguarda la curvatura, dal fatto che $r_x''(t) = (0, f''(t))$ e $r_y''(t) = (f''(t), 0)$, si trova l'espressione

$$k_r(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Un altro modo per definire una curva nel piano è tramite l'utilizzo delle coordinate polari; in tal caso esistono sostanzialmente due approcci, il metodo esplicito e quello parametrico.

Per metodo esplicito si intende il caso in cui nell'utilizzo delle coordinate polari $(\varrho, \vartheta)$, il raggio $\varrho$ sia una funzione esplicita dell'angolo $\vartheta$, cioè $\varrho = g(\vartheta)$, $g : [\vartheta_1, \vartheta_2] \to [0, +\infty)$. In questo caso, si può definire una curva parametrizzata $r : [\vartheta_1, \vartheta_2] \to \mathbb{R}^2$ ponendo

$$r(\vartheta) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\operatorname{sen}\vartheta) = g(\vartheta)(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta); \tag{2.6}$$

derivando, si ottiene

$$r'(\vartheta) = (g'(\vartheta)\cos\vartheta - g(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta, g'(\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta + g(\vartheta)\cos\vartheta), \tag{2.7}$$

da cui il fatto che
$$\|r'(\vartheta)\| = \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2}.$$
La curva data sarà regolare se e solo se $g$ è di classe $C^1([\vartheta_1, \vartheta_2])$ e $g(\vartheta) \neq 0$ per $\vartheta \in (\vartheta_1, \vartheta_2)$. La formula della lunghezza della curva diventa quind

$$\ell(r, [\vartheta_1, \vartheta_2]) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2} d\vartheta,$$

Per quanto riguarda la curvatura abbiamo l'espressione

$$k_r(\vartheta) = \frac{|g(\vartheta)g''(\vartheta) - g(\vartheta^2) - 2g'(\vartheta)^2|}{(g(\vartheta)^2 + g'(\vartheta)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Per metodo parametrico si intende il caso in cui sia $\varrho$ che $\vartheta$ sono funzioni di un parametro $t \in I$
$$\begin{cases} \varrho = \varrho(t) \\ \vartheta = \vartheta(t). \end{cases}$$
In tal caso si ottiene la curva parametrizzata $r : I \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (\varrho(t) \cos \vartheta(t), \varrho(t) \operatorname{sen} \vartheta(t));$$

derivando, si ottiene anche che

$$r'(t) = (\varrho'(t) \cos \vartheta(t) - \varrho(t)\vartheta'(t) \operatorname{sen} \vartheta(t), \varrho'(t) \operatorname{sen} \vartheta(t) + \varrho(t)\vartheta'(t) \cos \vartheta(t))$$

e quindi
$$\|r'(t)\| = \sqrt{\varrho'(t)^2 + \varrho(t)^2\vartheta'(t)^2}.$$
La curva non sarà quindi regolare nei punti in cui $\varrho(t) = 0$ oppure quando $\vartheta(t) = \varrho(t) = -$. La formula per il calcolo della lunghezza diventa quindi

$$\ell(r, I) = \int_I \sqrt{\varrho'(t)^2 + \varrho(t)^2\vartheta'(t)^2} dt.$$

Per la curvatura infine troviamo l'espressione

$$k_r(t) = \frac{|\varrho(t)\varrho''(t)\vartheta'(t) - \varrho(t)^2\vartheta'(t)^3 - 2\varrho'(t)^2\vartheta'(t) - \varrho(t)\varrho'(t)\vartheta''(t)|}{(\varrho'(t)^2 + \varrho(t)^2\vartheta'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

# Bibliografia

[1] Marco Bramanti and Sandro Pagani, Carlo Domenico e Salsa. *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare*. Zanichelli, 2004.

[2] Marco Bramanti and Sandro Pagani, Carlo Domenico e Salsa. *Analisi Matematica 2*. Zanichelli, 2009.

[3] Enrico Giusti. *Analisi Matematica vol 2*. Progr. Matem. Fisica Elettronica. Boringhieri, 2003.