UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Appunti del corso di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 30, I-44121 Ferrara
e–mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1] Versione aggiornata al 24 ottobre 2019

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti del corso di Analisi Matematica 2 dal Corso di Laurea Triennale di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Ferrara.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida relativa agli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire un buon libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. Viene fornita in bibliografia una lista di testi che si ritengono validi per lo studio della materia. La funzione di questi appunti è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei sono molto buone e ben fornite di ottimi testi. Tra i vari testi disponibili consigliamo sicuramente il testo [2] o la sua edizione precedente [1]; un altro ottimo testo è [3]

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto è possibile che alcune parti vengano corrette ed integrate durante il corso.

Michele Miranda
Ferrara, 24 ottobre 2019

Indice

Capitolo 3

Derivabilità e differenziabilità

In questo capitolo, utilizzando quanto sviluppato nel capitolo relativo alle curve, passeremo ad uno studio più sistematico delle funzioni di più variabili, investigando con maggiori dettagli la continuità per arrivare ad estendere alle funzioni di più variabili il concetto di derivabilità.

3.1 Connessione e valori intermedi

Iniziamo questa sezione dando la seguente definizione, che estende al caso multidimensionale la nozione di intervallo.

Definizione 3.1 (Insieme connesso per archi) *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si dice connesso per archi se per ogni $x, y \in E$ esiste una curva $r : [0,1] \to E$, tale che $r(0) = x$ e $r(1) = y$. La curva r viene chiamata anche connessione in E tra x e y.*

Esempi di insiemi connessi per archi sono:

1. gli insiemi convessi, cioè gli insiemi E tali che presi comunque $x, y \in E$ il segmento $[x, y]$ è tutto contenuto in E;

2. gli insiemi stellati, cioè gli insiemi E per i quali esiste $x_0 \in E$ tale che per ogni $x \in E$ il segmento $[x_0, x]$ è tutto contenuto in E.

Esempio 3.1 Gli insiemi convessi sono connessi per archi perchè per ogni scelta di punti $x, y \in E$ come connessione basta prendere il segmento $[x, y]$. Esempi di insiemi convessi sono:

1. $E = \mathbb{R}^n$;

2. $E = B_r(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$;

3. $E = Q_r(x_0)$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$.

Gli insiemi stellati sono connessi per archi perchè per ogni scelta di punti $x, y \in E$ come connessione si può prendere la poligonale $[x, x_0] \cup [x_0, y]$. Un esempio di insieme stellato non convesso è dato da

$$E = [-1, 1] \times [-2, 2] \cup [-2, 2] \times [-1, 1].$$

Esiste anche una definizione più topologica di insieme connesso; la presentiamo qui di seguito ma non la useremo nel seguito del corso.

Definizione 3.2 (Insieme connesso) *Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ si dice connesso se comunque presi due insiemi aperti disgiunti A e B con $E \subset A \cup B$, allora necessariamente o $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. L'insieme E si dice invece sconnesso se esistono due aperti disgiunti non vuoti A e B tali che $E \subset A \cup B$.*

Esistono insiemi connessi che non sono connessi per archi; ad esempio si può dimostrare che l'insieme

$$E = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \left\{ (t, \operatorname{sen} \frac{1}{t}) : t \in (0, \pi) \right\}$$

è connesso ma non è connesso per archi.

Abbiamo il seguente risultato che lega le due nozioni.

Proposizione 3.3 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora:*

1. *se E è connesso per archi, E è connesso;*

2. *se E è aperto, E è connesso se e solo se è connesso per archi.*

Dimostrazione.

1. Supponiamo E connesso per archi e supponiamo per assurdo che E sia sconnesso. Allora esistono due aperti disgiunti non vuoti A e B tali che $E \subset A \cup B$. Prendiamo quindi $x, y \in E$ con $x \in A$ e $y \in B$; sappiamo che esiste $r : [0, 1] \to E$ con $r(0) = x$ e $r(1) = y$. La continuità di r ed il fatto che A e B sono aperti implicano che se $t_0 \in [0, 1]$ è tale che $r(t_0) \in A$, allora esiste $\varepsilon > 0$ per cui $r(t) \in A$ per ogni $|t - t_0| < \varepsilon$ (discorso analogo se $r(t_0) \in B$). Poniamo quindi
$$t_A = \sup\{\bar{t} \in [0, 1] : r(t) \in A, \forall t \in [0, \bar{t}]\}.$$
Per quanto detto si deve necessariamente avere che $t_A \in (0, 1)$; inoltre $r(t_A) \notin A$ per come è definito t_A. Necessariamente allora deve essere $r(t_A) \in B$, ma ciò non può essere perchè altrimenti avrei che $r(t) \in B$ per ogni $t \in (t_A - \varepsilon, t_A]$, contraddicendo ancora la definizione di t_A. Quindi E non può essere sconnesso.

2. Mostriamo ora che se E è aperto e connesso, allora è anche connesso per archi. Fissiamo $x_0 \in E$ e definiamo la componente connessa per archi di x_0 in E
$$E(x_0) = \{x \in E : \exists r : [0, 1] \to E \text{ curva t.c. } r(0) = x_0, r(1) = x\}.$$
Dimostriamo che $E(x_0)$ è aperto. Sia $x \in E(x_0)$: dato che E è aperto, esiste $r > 0$ per cui $B_r(x) \subset E$. La convessità di $B_r(x)$ implica che per ogni $y \in B_r(x)$ si ha che $[x, y] \subset B_r(x) \subset E$, da cui il fatto che $y \in E(x_0)$ perchè per connettere y con x_0 basta considerare la curva $r_y : [0, 1] \to E$
$$r_y(t) = \begin{cases} r(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \\ x + (2t - 1)(y - x) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$
Notiamo anche che dati due punti $x_0, x_1 \in E$, o $E(x_0) = E(x_1)$ oppure $E(x_0) \cap E(x_1) = \emptyset$; infatti se $y \in E(x_0) \cap E(x_1)$, allora ogni punto di $x \in E(x_0)$ può essere connesso con x_1 connettendo prima x con x_0, quindi x_0 con y ed infine y con x_1. Cioè $E(x_0) \subset E(x_1)$; ma per lo stesso motivo si deve avere $E(x_1) \subset E(x_0)$ e quindi la coincidenza dei due insiemi. Poniamo ora $A = E(x_0)$ che è un insieme aperto non vuoto e definiamo $B = E \setminus A$. Siccome vale l'identità
$$B = \bigcup_{x \in B} E(x),$$
concludiamo che B è aperto e la connessione di E implica quindi che $B = \emptyset$.

$\square$

Enunciamo quindi il seguente risultato.

Proposizione 3.4 (Valori intermedi) *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua e E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ connesso per archi; allora, per ogni $x, y \in E$, la funzione f assume tutti i valori compresi tra $f(x)$ ed $f(y)$. In particolare se $f(x)f(y) < 0$, allora esiste $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $x, y \in E$ e consideriamo una curva $r : [0,1] \to E$ che connette x con y; basta quindi applicare il teorema dei valori intermedi ed esistenza degli zeri alla funzione continua di una variabile $g = f \circ r : [0,1] \to E$, $g(t) = f(r(t))$. □

Osservazione 3.5 La proposizione precedente afferma l'esistenza di un valore intermedio su ogni curva che connette x con y; in altri termini, se c è un valore intermedio tra $f(x)$ e $f(y)$, allora l'insieme di livello $E_c(f) = \{f = c\}$ disconnette E, cioè $E \setminus \{f = c\}$ non è più connesso per archi.

L'osservazione precedente può essere usata nello studio del segno di una funzione continua.

Esempio 3.2 Si supponga di voler studiare il segno della funzione continua

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$

L'insieme $E_0(f) = \{x^2 - y^2 = 1\}$ definisce due rami di iperboli nel piano che disconnettono gli insiemi di positività di f da quelli di negatività. L'insieme

$$\mathbb{R}^2 \setminus E_0(f)$$

è costituito da tre insiemi illimitati, due convessi ed uno stellato in $(0, 0)$. Siccome su tali insiemi la funzione non può cambiare segno e $f(0, 0) = -1 < 0$, $f(-2, 0) = f(2, 0) = 3 > 0$, si può concludere che f è positiva nei due insiemi convessi, negativa in quello stellato.

3.2 Derivabilità e differenziabilità per funzioni scalari

Cerchiamo in questa sezione di generalizzare la nozione di derivabilità data per funzioni di una variabile a funzioni di più variabili. Questa generalizzazione dovrà avere alcune buone proprietà, come ad esempio l'indipendenza dal sistema di riferimento scelto e il fatto che la derivabilità implichi la continuità.

Una prima definizione che si può dare è quella di derivata direzionale.

Definizione 3.6 *Data una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, e $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, definiamo derivata di f nel punto $x_0 \in E$ di accumulazione per E in direzione v la seguente quantità, qualora esista finita;*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

Denoteremo equivalentemente con $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$, $\partial_v f(x_0)$ o $D_v f(x_0)$ la derivata direzionale di f in direzione v. In particolare scriveremo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$, $\partial_i f(x_0)$, $D_{x_i} f(x_0)$ o $D_i f(x_0)$ nel caso di derivate nelle direzioni coordinate e_i e parleremo di derivata parziale i–esima. Se esistono tutte le derivate parziali di f in x_0, si definisce il gradiente *di f il vettore le cui componenti sono le derivate parziali di f; esso viene denotato usualmente con il simbolo*

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right).$$

Osservazione 3.7 Nel caso $n = 2$ e $n = 3$ si conviene anche usare le variabili (x, y) e (x, y, z) rispettivamente; in tal caso si usano le notazioni equivalenti $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\partial_x f$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\partial_y f$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\partial_z f$.

La nozione appena introdotta non implica in generale la continuità della funzione f, come è facile convincersi col seguente esempio.

Esempio 3.3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Un calcolo diretto mostra che tutte le derivate direzionali in $(0, 0)$ esistono e sono uguali a 0, ma la funzione è chiaramente non continua in $(0, 0)$.

Per ovviare ai problemi collegati con la definizione di derivata direzionale, si introduce la seguente nozione.

Definizione 3.8 (Differenziale) *Data una funzione $f : E \to \mathbb{R}$, diremo che f è differenziabile nel punto $x_0 \in E$ di accumulazione per E se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0. \tag{3.1}$$

Il differenziale di f in x_0 viene anche denotato con $Df(x_0)$, $df(x_0)$, $d_{x_0} f$ o $f'(x_0)$.

Osserviamo che la differenziabilità di f in x_0 equivale alla richiesta dell'esistenza di una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|). \tag{3.2}$$

Nella seguente proposizione sono riassunte le principali proprietà delle funzioni differenzibili.

Proposizione 3.9 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ una funzione differenziabile in $x_0 \in E$. Allora:*

1. *esistono tutte le derivate direzionali in x_0 e la derivata direzionale ha dipendenza lineare rispetto alla direzione;*
2. *il differenziale di f è rappresentato dal vettore gradiente di f in x_0;*
3. *il differenziale è unico.*
4. *f è continua in x_0;*

Dimostrazione. Dimostriamo che la derivata direzionale esiste per ogni $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, e vale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = L(v);$$

infatti, dalla linearità di L si ottiene

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} - L(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0) - L(tv)}{t} = 0,$$

che era quanto si voleva dimostrare. In particolare, per la derivata parziale i–esima si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = Le_i, \qquad \forall i = 1, \ldots, n,$$

e quindi, dato che nella base canonica standard L è univocamente determinata dai valori Le_i ne deduciamo che
$$Lv = (L(e_1), \dots, L(e_n)) \cdot v = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right) \cdot v = \nabla f(x_0) \cdot v.$$
Questo argomento mostra in particolare l'unicità del differenziale.

Per la continuità di f, considerare (3.2); dato che
$$|L(x - x_0)| = |\nabla f(x_0) \cdot v| \leq \|\nabla f(x_0)\| \|x - x_0\|,$$
se ne deduce che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$
□

La differenziabilità implica dunque l'esistenza di tutte le derivate direzionali nel punto in considerazione, ma, come abbiamo visto, l'esistenza di tutte le derivate direzionali nel punto non implica la differenziabilità. Il seguente Teorema fornisce tuttavia il metodo che usualmente si utilizza per dimostrare la differenziabilità; esso ci garantisce la differenziabilità se le derivate parziali esistono non solo nel punto in considerazione, ma in un intorno del punto e sono ivi continue. Diremo quindi che $f : E \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 localmente attorno ad un punto $x_0 \in E$ se esiste un $r > 0$ tale che $f \in C^1(B_r(x_0))$, cioè se f e le sue parziali sono definite e continue in $B_r(x_0)$ Diremo infine che f è di classe C^1 in E, $f \in C^1(E)$, se f è di classe C^1 localmente attorno ad ogni punto di E.

Teorema 3.10 (Differenziale totale) *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzine di classe C^1 localmente attorno al punto $x_0 \in E$; allora f è differenziabile in x_0.*

Dimostrazione. Per quanto è stato detto in precedenza, la differenziabilità in x_0 va verificata con L rappresentato dal vettore $\nabla f(x_0)$. Per semplicità di notazione, supponiamo $n = 2$ ed indichiamo con (x_0, y_0) il punto in cui vogliamo verificare la differenziabilità e con (x, y) un punto generico. Dire che f è di classe C^1 localmente attorno a (x_0, y_0) significa che le funzioni $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue; possiamo quindi applicare gli sviluppi di Taylor per la funzione $y \mapsto f(x, y)$ per ricavare che
$$f(x, y) = f(x, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)(y - y_0) + o(y - y_0)$$
ed analogamente, la continuità di $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)$ ci permette di scrivere
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1).$$
Analogamente, applicando la formula di Taylor approssimata al primo ordine alla funzione $x \mapsto f(x, y_0)$ si ottiene che
$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$
Queste premesse mostrano che
$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = \frac{o(x - x_0) + o(y - y_0)}{\|(x - x_0, y - y_0)\|}.$$
Notiamo che, ad esempio:
$$\begin{aligned}\frac{|o(x - x_0)|}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} &= \frac{|o(x - x_0)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \frac{|o(x - x_0)|}{|x - x_0|} \\ &\leq \frac{|o(x - x_0)|}{|x - x_0|},\end{aligned}$$
da cui si deduce la differenziabilità di f in (x_0, y_0). □

Vediamo con un esempio come e dove si usa il Teorema del differenziale totale.

Esempio 3.4 Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x\sqrt{y}$$

definita e continua nell'insieme

$$D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

Le derivate parziali di f sono date da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sqrt{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{y}};$$

la prima funzione è definita e continua in $D(f)$, mentre la seconda in

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$$

Quindi $f \in C^1(E)$ ed è quindi differenziabile in tutti i punti E.

Nei punti di $D(f)\backslash E$ il teorema non si applica ma questo non vuol dire che in tali punti la funzione non sia differenziabile; in tali punti bisogna usare la definizione di differenziabilità. Vediamo quindi cosa succede nei punti della forma $(x_0, 0)$. La derivata parziale rispetto ad x per continuità è data da

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0,$$

mentre per la derivata parziale rispetto ad y bisogna usare la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, t) - f(x_0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{x_0}{\sqrt{t}}.$$

Tale limite non esiste se $x_0 \neq 0$, mentre è 0 per $x_0 = 0$. Non potendo scrivere il gradiente nei punti $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$ abbiamo che f non è differenziabile in tali punti, mentre in $(0, 0)$ possiamo scrivere il gradiente $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Per verificare la differenziabilità calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

come si può evincere passando alle coordinate polari $(x, y) = (\varrho \cos\vartheta, \varrho \operatorname{sen}\vartheta)$. In definitiva f è differenziabile in $E \cup \{(0, 0)\}$.

Il grafico di una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è definito come l'insieme

$$\Gamma(f) = \Gamma(f, E) = \{(y, f(y)) : y \in E\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Determiniamo tangente e normale a tale insieme in un punto di differenziabilità y_0 di f.

Proposizione 3.11 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $y_0 \in E$ punto di accumulazione per E. Allora, posto $x_0 = (y_0, f(y_0))$, abbiamo che*

$$\operatorname{Tan}(\Gamma(f), x_0) = T(\operatorname{Tan}(E, x_0))$$

dove T è l'applicazione lineare $T(w) = (w, Df(y_0)w)$. In particolare se y_0 è un punto interno ad E, allora il tangente è uno spazio vettoriale di dimensiona n con

$$T_{x_0}\Gamma(f) = T(\mathbb{R}^n) = \left\langle \left(e_1, \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_0)\right), \dots, \left(e_n, \frac{\partial f}{\partial x_n}(y_0)\right) \right\rangle, \quad e_i \in \mathbb{S}^{n-1},$$

e lo spazio normale ha dimensione 1 con

$$N_{x_0}\Gamma(f) = \langle (-\nabla f(y_0), 1) \rangle = \left\langle \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(y_0), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(y_0), 1 \right) \right\rangle.$$

Il versore

$$\hat{n}_f(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla f(y_0)\|^2}}(-\nabla f(y_0), 1)$$

viene detto versore normale al grafico di f.

Dimostrazione. Fissiamo il punto $x_0 \in \Gamma(f)$ e consideriamo una successione $x_h \in \Gamma(f)$ che tende a x_0. Allora

$$\begin{aligned} \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|} &= \frac{(y_h, f(y_h) - (y_0, f(y_0))}{\|(y_h, f(y_h) - (y_0, f(y_0))\|} = \frac{(y_h - y_0, f(y_h) - f(y_0))}{\sqrt{\|y_h - y_0\|^2 + (f(y_h) - f(y_0))^2}} \\ &= \frac{\|y_h - y_0\|}{\sqrt{\|y_h - y_0\|^2 + (f(y_h) - f(y_0))^2}} \left(\frac{y_h - y_0}{\|y_h - y_0\|}, \frac{f(y_h) - f(y_0)}{\|y_h - y_0\|} \right). \end{aligned}$$

Dalla differenziabilità sappiamo che

$$\frac{f(y_h) - f(y_0)}{\|y_h - y_0\|} = Df(y_0)\left(\frac{y_h - y_0}{\|y_h - y_0\|}\right) + \frac{o(\|y_h - y_0\|)}{\|y_h - y_0\|}$$

e quindi il limite

$$\hat{v} = \lim_{h \to +\infty} \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|}$$

esiste se e solo se esiste il limite

$$\hat{w} = \lim_{h \to +\infty} \frac{y_h - y_0}{\|y_h - y_0\|}$$

e vale la relazione

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{1 + |Df(y_0)\hat{w}|^2}}(\hat{w}, Df(y_0)\hat{w}).$$

I vettori $\hat{w}$ definiscono $\mathrm{Tan}(E, y_0)$. Se y_0 è interno allora $\mathrm{Tan}(E, y_0) = \mathbb{R}^n$ e quindi si deduce la prima parte del teorema. Si conclude notando che il vettore $(-\nabla f(y_0), 1)$ è ortogonale a tutti i vettori $(e_i, \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_0))$, $i = 1, \dots, n$. □

Vediamo ora la relazione tra insiemi di livello e gradiente di una funzione.

Proposizione 3.12 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $x_0 \in E$. Posto $c = f(x_0)$, se x_0 è un punto di accumulazione per $E_c(f)$, si ha che $\nabla f(x_0) \in \mathrm{Nor}(E_c(f), x_0)$.*

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 \in E$ e consideriamo una successione $x_h \in E_c(f)$ convergente a x_0. Siccome $c = f(x_0) = f(x_h)$, ne deduciamo che

$$c = f(x_h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x_h - x_0) + o(\|x_h - x_0\|) = c + \nabla f(x_0) \cdot (x_h - x_0) + o(\|x_h - x_0\|),$$

da cui

$$\nabla f(x_0) \cdot \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|} + \frac{o(\|x_h - x_0\|)}{\|x_h - x_0\|} = 0.$$

Quindi se

$$\hat{v} = \lim_{h \to +\infty} \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|}$$

troviamo che

$$\nabla f(x_0) \cdot \hat{v} = 0.$$

Quindo $\nabla f(x_0)$ è ortogonale ad ogni vettore $v \in \mathrm{Tan}(E_c(f), x_0)$, come volevasi dimostrare. □

Vogliamo ora caratterizzare completamente $\mathrm{Tan}(E_c(f), x_0)$ e $\mathrm{Nor}(E_c(f), x_0)$. Per fare ciò ci servono alcune definizioni.

Definizione 3.13 *Fissato $w \in \mathbb{S}^{n-1}$, diremo che un insieme Σ è un grafico in direzione $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ se esiste $g : D \subset V \to \mathbb{R}$, $V = w^{\perp}$ tale che*

$$\Sigma = \Gamma_w(g, D) = \{y + g(y)w : y \in D\}.$$

Diremo più in generale che Σ è un grafico se esiste $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ tale che Σ è grafico in direzione w. Diremo infine che Σ è localmente grafico intorno ad un punto $x_0 \in \Sigma$ se esiste $r > 0$ tale che $\Sigma \cap B_r(x_0)$ è grafico.

Fissata una direzione $w \in \mathbb{S}^{n-1}$, poniamo $V = w^{\perp}$; se $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è una base ortonormale di V, per una funzione $f : D \subset V \to \mathbb{R}$ definiamo

$$\nabla_V f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial v_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial v_{n-1}}(x) \right).$$

Possiamo enunciare e dimostrare il seguente risultato.

Teorema 3.14 (Del Dini o della funzione implicita) *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ con $E \subset \mathbb{R}^n$ una funzione localmente di classe C^1 attorno al punto $x_0 \in E$. Posto $c = f(x_0)$, se $\nabla f(x_0) \neq 0$, allora $E_c(f)$ è localmente grafico attorno al punto x_0. In particolare $E_c(f)$ è localmente grafico attorno ad x_0 in tutte le direzioni $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ per cui*

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot w \neq 0. \tag{3.3}$$

La funzione g di cui $E_c(f)$ è localmente grafico viene chiamata funzione implicita ed ha la stessa regolarità della funzione f; se $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ è tale che valga (3.3) si ha che posto $V = w^{\perp}$

$$\nabla g(y) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial w}(y + g(y)w)} \nabla_V f(y + g(y)v).$$

Dimostrazione. Scriviamo $x = (x', x_n)$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e supponiamo si abbia $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) > 0$ e che $c = 0$ (basta sostituire f con $f - c$); la continuità di $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ implica l'esistenza di $\delta_0 > 0$ tale che $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) > 0$ per ogni $x \in Q_{\delta_0}(x_0)$ La funzione $y \mapsto f(x_0', y)$ è strettamente monotona crescente in un intorno di $x_{n,0}$ e nulla per $y = x_{n,0}$. Indichiamo con $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta_0/2$, un numero positivo in modo tale che $f(x_0', \cdot)$ sia monotona in $(x_{n,0} - \delta_1, x_{n,0} + \delta_1)$. Dalla continuità di f e dal fatto che $f(x_0', x_{n,0} - \delta_1) < 0$, $f(x_0', x_{n,0} + \delta_1) > 0$, deduciamo l'esistenza di un $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \delta_0/2$, tale che per per ogni $x' \in Q_{\delta_2}(x_0')$ valga ancora $f(x', x_{n,0} - \delta_1) < 0$ e $f(x', x_{n,0} + \delta_1)$. Per come sono stati scelti i parametri, abbiamo che per ogni $x' \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ la funzione $y \mapsto f(x', y)$ è strettamente monotona crescente, strettamente negativa per $y = x_{n,0} - \delta_1$ e strettamente positiva per $y = x_{n,0} + \delta_1$. Quindi, esiste un unico punto $y = g(x')$ tale che $f(x', g(x')) = 0$. Abbiamo così definito la funzione $g : Q_{\delta_2}(x_0') \to (x_{n,0} - \delta_1, x_{n,0} + \delta_1)$, che prende il nome di funzione implicita, che parametrizza $E_c \cap Q_{\delta_2}(x_0') \times (x_{n,0} - \delta_1, x_{n,0} + \delta_1)$.

Dimostriamo la continuità di g; se $x_h' \to x_0'$, allora siccome $g(x_h') \in [x_{n,0} - \delta_1, x_{n,0} + \delta_1]$, per compattezza a meno di sottosuccessioni $g(x_h') \to y$ Dalla continuità di f e dal fatto che $f(x_h', g(x_h')) = 0$ per ogni h, deduciamo che

$$f(x_0', y) = \lim_{h \to 0} f(x_h', g(x_h')) = 0,$$

e quindi necessariamente $y = g(x_0')$, cioè la continuitià di g.

Dimostriamo che g ammette la derivata i–esima; dalle relazioni $f(x_0', g(x_0')) = f(x_0'+te_i, g(x_0'+te_i)) = 0$ deduciamo che

$$\begin{aligned}
0 =& f(x_0' + te_i, g(x_0' + te_i)) \\
=& f(x_0', g(x_0')) + Df(x_0', g(x_0'))\Big((x_0' + te_i, g(x_0' + te_i)(x_0', g(x_0'))\Big) + \\
&+ o\left(\left\|\Big((x_0' + te_i, g(x_0' + te_i)(x_0', g(x_0'))\Big)\right\|\right) \\
=& Df(x_0', g(x_0'))(te_i, g(x_0' + te_i) - g(x_0')) + o\left(\|(te_i, g(x_0' + te_i) - g(x_0'))\|\right) \\
=& t\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0', g(x_0')) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0', g(x_0'))\left(g(x_0' + te_i) - g(x_0')\right) + o\left(\|(te_i, g(x_0' + te_i) - g(x_0'))\|\right).
\end{aligned}$$

Dividendo per t e passando al limite $t \to 0$, troviamo che esiste la derivata parziale i–esima di g e si ha che

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0').$$

□

Da questo Teorema deduciamo che in quanto $E_c(f)$ è localmente un grafico di una funzione di $n-1$ variabili, allora il tangente di $E_c(f)$ in x_0 è uno spazio vettoriale di dimensione $n-1$ e il normale è uno spazio vettoriale di dimensione 1. In definitiva

$$N_{x_0}E_c(f) = \langle \nabla f(x_0) \rangle$$

mentre

$$T_{x_0}E_c(f) = \nabla f(x_0)^{\perp}.$$

3.3 Differenziabilità per funzioni vettoriali

Estendiamo qui il concetto di differenziabilità alle funzioni vettoriali.

Definizione 3.15 (Differenziabilità per funzioni vettoriali) *Data una funzione $F : E \to \mathbb{R}^k$ con $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in E$ punto di accumulazione per E, diremo che F è differenziabile in x_0 se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tale che*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0) - L(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0. \tag{3.4}$$

In tal caso chiameremo L differenziale di F in x_0 e lo denoteremo con $DF(x_0)$, $d_{x_0}F$ o $F'(x_0)$.

La differenziabilità può essere riscritta chiedendo l'esistenza dell'applicazione lineare L per cui

$$F(x) = F(x_0) + L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

Decomponendo la funzione F nelle sue componenti $F(x) = (F_1(x), \dots, F_k(x))$, possiamo riscrivere la (3.4) in modo equivalente richiedendo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F_i(x) - F_i(x_0) - L_i(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0, \qquad \forall i = 1, \dots, k,$$

dove con L_i è l'applicazione lineare

$$L_i v = (Lv) \cdot e_i.$$

Quindi, richiedere la differenziabilità di F equivale a richiedere la differenziabilità delle sue componenti. Se ne deduce che il differenziale L di F è rappresentato dalla matrice $k \times n$

$$JF(x_0) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(x_0) \\ \dots \\ \nabla F_k(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

che prende il nome di *Matrice Jacobiana*.

Possiamo enunciare il seguente risultato di differenziabilità della funzione composta.

Proposizione 3.16 *Siano $F : E \to \mathbb{R}^k$, $E \subset \mathbb{R}^n$, una funzione differenziabile in x_0 e $G : B \to \mathbb{R}^m$, $F(E) \subset B \subset \mathbb{R}^k$ una funzione differenziabile in $F(x_0)$; allora la funzione $H = G \circ F : E \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in x_0 e si ha*

$$DH(x_0) = D(G \circ F)(x_0) = DG(F(x_0)) \circ DF(x_0),$$

che in termini di matrici Jacobiane si riscrive come

$$JH(x_0) = J(G \circ F)(x_0) = JG(F(x_0)) \cdot JF(x_0)$$

dove nell'ultimo passaggio col simbolo $\cdot$ si intende il prodotto matriciale righe per colonne.

Dimostrazione. Basta riscrivere le condizioni di differenziabilità di F in x_0

$$F(x) = F(x_0) + DF(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

e per G in $y_0 = F(x_0)$

$$G(y) = G(y_0) + DG(y_0)(y - y_0) + o(\|y - y_0\|).$$

Se nell'ultima equazione si prende $y = F(x)$ si ottiene

$$\begin{aligned} H(x) =& G(F(x)) = G(F(x_0)) + DG(F(x_0))(F(x) - F(x_0)) + o(\|F(x) - F(x_0)\|) \\ =& H(x_0) + DG(F(x_0))(DF(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)) + o(\|F(x) - F(x_0)\|) \\ =& H(x_0) + DG(F(x_0)) \circ DF(x_0)(x - x_0) + DG(F(x_0))(o(\|x - x_0\|)) + o(\|F(x) - F(x_0)\|). \end{aligned}$$

Si conclude notando che sia $DG(F(x_0))(o(\|x - x_0\|))$ che $o(\|F(x) - F(x_0))\|)$ sono $o(\|x - x_0\|)$. □

Come applicazione del differenziale della funzione composta enunciamo e dimostriamo il seguente risultato.

Teorema 3.17 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(E)$ con E insieme connesso per archi; se $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in E$, allora f è costante in E.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che per ogni $x, y \in E$, $f(x) = f(y)$. Consideriamo quindi un arco $r : [0, 1] \to E$ che connette x con y e la funzione $g(t) = f(r(t))$; $g(t)$ è derivabile e vale

$$g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t) = 0$$

da cui g costante e quindi $f(x) = f(y)$. □

3.3.1 Diffeomorfismi globali e locali

Presentiamo in questa sezione il concetto di diffeomorfismo, sia globale che locale che ci permette di introdurre il concetto di cambiamento di coordinate in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 3.18 *Una funzione $F : A \to B$ funzione di classe C^1 con $A, B \subset \mathbb{R}^n$ si definisce diffemorfismo globale o cambio di variabili o di coordinate se:*

1. *F è iniettiva;*

2. *F è suriettiva;*

3. $\det(JF(x)) \neq 0$ *per ogni* $x \in A$.

Diremo invece che F definisce un diffeomorfismo locale se oltre alla richiesta di essere di classe C^1 si richiede solamente che $\det(JF(x)) \neq 0$ *per ogni* $x \in A$.

Nella definizione di diffeomorfismo locale non si richiede quindi che F sia iniettiva e suriettiva. La suriettività solitamente si riesce sempre ad ottenere se al posto di B si considera $F(A)$; per l'iniettività invece la questione è un pó più delicata. Abbiamo però il seguente importante risultato.

Teorema 3.19 (Teorema della funzione inversa) *Sia $F : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$ aperti, una funzione di classe C^1 su A. Se $x_0 \in A$ è un punto tale che*

$$\det(JF(x_0)) \neq 0,$$

esistono due aperti $\tilde{A} \subset A$ e $\tilde{B} \subset B$ con $x_0 \in \tilde{A}$ e $F(x_0) \in \tilde{B}$ tali che $F : \tilde{A} \to \tilde{B}$ è un diffeomorfismo globale. In particolare F è invertibile con funzione $G : \tilde{B} \to \tilde{A}$ di classe C^1 e $DG(y) = DF(G(y))^{-1}$.

Esempio 3.5

1. **Coordinate polari nel piano**. Definiamo la funzione $F : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tramite $F(\varrho, \vartheta) = (\varrho \cos\vartheta, \varrho \operatorname{sen}\vartheta)$. Tale funzione consiste nel cambio di variabili
$$\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen}\vartheta. \end{cases}$$
Avendo scelto $\varrho > 0$, si nota subito che la funzione F è iniettiva e suriettiva (ammettendo il caso $\varrho = 0$ si avrebbe mancanza di iniettività). Inoltre,
$$DF(\varrho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\varrho \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \varrho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$
da cui si deduce che $\det DF(\varrho, \vartheta) = \varrho \neq 0$, e quindi F soddisfa tutti i requisiti di un cambiamento di variabili.

2. **Coordinate cilindriche nello spazio**. Sia $F : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$ definita tramite $F(\varrho, \vartheta, t) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho \operatorname{sen}\vartheta, t)$ che corrisponde al cambio di coordinate
$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \\ z = t. \end{cases}$$
Tale funzione è iniettiva e suriettiva, mentre
$$DF(\varrho, \vartheta, t) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\varrho\operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta & \varrho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
da cui $\det DF(\varrho, \vartheta, t) = \varrho \neq 0$.

3. **Coordinate sferiche nello spazio**. Sia $F : (0,+\infty)\times[0,2\pi)\times(0,\pi) \to \mathbb{R}^3\setminus(\{(0,0)\}\times\mathbb{R})$ definita da $F(\varrho,\vartheta,\varphi) = (\varrho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi, \varrho\cos\varphi)$ che corrisponde al cambio di coordinate
$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = \varrho\cos\varphi. \end{cases}$$
Tale funzione è iniettiva e suriettiva, mentre
$$DF(\varrho,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi & -\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \varrho\cos\vartheta\cos\varphi \\ \mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \varrho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\varphi & \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\varrho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{pmatrix}$$
da cui $\det DF(\varrho,\vartheta,t) = -\varrho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi \neq 0$.

Osservazione 3.20 Abbiamo presentato qui gli esempi più comuni di cambiamento di coordinate; tutte le funzioni che soddisfano le ipotesi delle Definizione 3.18 possono essere considerate cambiamento di coordinate. Così ad esempio, se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0\}$, la funzione $F : A \to A$ $F(x,y) = (xy, x/y)$ definisce un cambio di variabili.

3.4 Derivate di ordine superiore

Consideriamo in questa sezione le derivate di ordine superiore al primo per una funzione di più variabiili.

Definizione 3.21 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione localmente di classe C^1 intorno al punto $x_0 \in E$. Diremo che f è differenziabile due volte in x_0 se sono differenziabili in x_0 le n funzioni*
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Come applicazione del Teorema del differenziale totale abbiamo che una condizione sufficiente per la differenziabilità seconda è la continuità delle derivate parziali localmente attorno al punto x_0. Diremo in tal caso che f è localmente di classe C^2 intorno ad x_0. Per una funzione differenziabile due volte in x_0 sono ben definiti gli n-vettori gradienti delle derivate parziali
$$\nabla f_i(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\right), \qquad i = 1,\dots,n.$$
Si usa la seguente notazione
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0), \qquad i,j = 1,\dots,n,$$
e
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_0), \qquad i = 1,\dots,n.$$

Per una funzione differenziabile due volte in x_0 è quindi ben definita la matrice quadrata

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

detta matrice Hessiana di f in x_0. Grazie al seguente risultato, la matrice Hessiana risulta in molti dei casi che considereremo una matrice simmetrica.

Teorema 3.22 (Lemma di Schwarz) *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione localmente di classe C^2 attorno ad x_0 punto interno ad E. Allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità di notazione il caso $n = 2$ e definiamo la quantità

$$\begin{aligned} Q(h,k) =& f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0) \\ =& \Big(\underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)}_{=u(k)}\Big) - \Big(\underbrace{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}_{=u(0)}\Big) \\ =& \Big(\underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}_{=v(h)}\Big) - \Big(\underbrace{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}_{=v(0)}\Big) \end{aligned}$$

dove abbiamo definito

$$u(s) = f(x_0+h, y_0+s) - f(x_0, y_0+s), \qquad v(t) = f(x_0+t, y_0+k) - f(x_0+t, y_0).$$

Per il Teorema di Lagrange esistono t_h nell'intervallo di estremi 0 e h e s_k nell'intervallo di estremi 0 e k tali che

$$v(h) - v(0) = v'(t_h)h = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t_h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+t_h, y_0)\right)h,$$
$$u(k) - u(0) = u'(t_k)k = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+s_k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+s_k)\right)k.$$

Ancora applicando il Teorema di Lagrange possiamo dire che esistono $\bar{t}_h$ nell'intervallo di estremi 0 e h e $\bar{s}_k$ nell'intervallo di estremi 0 e k per cui

$$u(k) - u(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\bar{t}_h, y_0+s_k)hk.$$

$$v(h) - v(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+t_h, y_0+\bar{s}_k)kh.$$

Mettendo insieme questi fatti troviamo che

$$Q(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\bar{t}_h, y_0+s_k)hk = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+t_h, y_0+\bar{s}_k)kh.$$

Dividendo per hk e sfruttando la continuità delle derivate seconde si ottiene in definitiva che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

□

Osservazione 3.23 La richiesta f di classe C^2 garantisce ovviamente la differenziabilità seconda di f e la simmetria della sua matrice Hessiana. La funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è un esempio di funzione la cui matrice Hessiana in $(0,0)$ è definita ed è data

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tale funzione non sarà pertanto di classe C^2 localmente attorno a $(0,0)$ e si può anche vedere che non è differenziabile due volte in $(0,0)$.

Chiudiamo questo capitolo con il seguente risultato.

Proposizione 3.24 (Formula di Taylor del secondo ordine) *Sia $f : E \to R$ una funzione localmente di classe C^2 attorno al punto x_0; allora*

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} Hf(x_0) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2).$$

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità di notazione il caso $n = 2$. Siccome le funzioni $x \mapsto f(x,y)$ e $y \mapsto f(x,y)$ sono di classe C^2, per la formula di Taylor di ordine 2 in dimensione 1 possiamo scrivere

$$f(x,y) = f(x_0,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0,y)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2),$$
$$f(x_0,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + o((y-y_0)^2).$$

Abbiamo anche che le funzioni derivate parziali sono di classe C^1 quindi per la formula di Taylor di ordine 1 in dimensione 1 possiamo scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(y-y_0).$$

Infine la continuità delle derivate seconde implica che

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0,y) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + o(1).$$

Mettendo insieme il tutto troviamo che

$$\begin{aligned} f(x,y) =& f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 + \sigma \\ =& f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0) + \\ &+ \frac{1}{2} Hf(x_0,y_0) \cdot (x-x_0 . y-y_0) \cdot (x-x_0) \cdot (x-x_0, y-y_0) + \sigma \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned} \sigma =& o((x-x_0)^2) + o((y-y_0)^2) + (x-x_0)o(y-y_0) + (x-x_0)^2 o(1) \\ =& o(\|(x-x_0, y-y_0)\|^2). \end{aligned}$$

□

Chiudiamo questo capitolo col seguente esempio.

Esempio 3.6 Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice radiale se esiste $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = g(\|x\|).$$

Se supponiamo che $g \in C([0, +\infty))$ abbiamo che f è continua, mentre se $g \in C^1((0, +\infty))$ troviamo che $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ e

$$\nabla f(x) = g'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}.$$

La continuitè di g in 0 non garantisce la differenziabilità di f in 0 per la presenza del termine $\frac{x}{\|x\|}$. Avremo differenziabilità in 0 se g' è continua in 0 con $g'(0) = 0$. Per quanto riguarda la derivata seconda, se si suppone che $g \in C^2(0, +\infty))$ allora

$$Hf(x) = g''(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} \otimes \frac{x}{\|x\|} + \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|}\left(I_n - \frac{x}{\|x\|} \otimes \frac{x}{\|x\|}\right).$$

Se definiamo infine il Laplaciano Δf di una funzione f come la traccia della sua matrice Hessiana, troviamo che per una funzione radiale vale la formula

$$\Delta f(x) = \mathrm{tr} Hf(x) = g''(\|x\|) + (n-1)\frac{g'(\|x\|)}{\|x\|}.$$

Bibliografia

[1] Marco Bramanti and Sandro Pagani, Carlo Domenico e Salsa. *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare*. Zanichelli, 2004.

[2] Marco Bramanti and Sandro Pagani, Carlo Domenico e Salsa. *Analisi Matematica 2*. Zanichelli, 2009.

[3] Enrico Giusti. *Analisi Matematica vol 2*. Progr. Matem. Fisica Elettronica. Boringhieri, 2003.