UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Appunti del corso di
Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 30, I-44121 Ferrara
e–mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1]Versione aggiornata al 24 ottobre 2019

Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti del corso di Analisi Matematica 2 dal Corso di Laurea Triennale di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Ferrara.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida relativa agli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire un buon libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. Viene fornita in bibliografia una lista di testi che si ritengono validi per lo studio della materia. La funzione di questi appunti è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei sono molto buone e ben fornite di ottimi testi. Tra i vari testi disponibili consigliamo sicuramente il testo [2] o la sua edizione precedente [1]; un altro ottimo testo è [3]

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto è possibile che alcune parti vengano corrette ed integrate durante il corso.

Michele Miranda
Ferrara, 24 ottobre 2019

Indice

Capitolo 4

Superfici e varietà

In questo capitolo studiamo inizialmente le superfici regolari parametrizzate nello spazio; di tali oggetti determineremo tangente e normale e daremo alcuni esempi significativi. Generalizzeremo quindi le nozioni di curve e superfici, sia parametrizzate che in forma implicita alle k-varietà.

4.1 Superfici parametrizzte regolari

Iniziamo col dare la definizione di superficie parametrizzata regolare nello spazio; quella che diamo è la naturale generalizzazione alle superfici della definizione di curva regolare semplice.

Definizione 4.1 *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un insieme di $\mathbb{R}^2$ tale che la parte interna di D sia un aperto connesso per archi. Una superficie parametrizzata regolare è definita da una funzione continua $r : D \to \mathbb{R}^3$ tale che $r \in C^1(D^\circ, \mathbb{R}^3)$, r manda due punti distinti di cui uno almeno interno a D in punti distinti, e tale che*

$$\mathrm{rk} Dr(u) = 2, \qquad \forall u \in D^\circ.$$

L'insieme $\Sigma = r(D)$ viene chiamato sostegno o supporto della superficie.

La condizione di iniettività viene inserita, diversamente da quanto fatto per le curve che potevano essere anche non semplici, per evitare complicazioni nella trattazione. La condizione di rango 2 invece è la naturale generalizzazione della condizione di curva regolare.

Possiamo enunciare il seguente teorema che caratterizza spazio tangente e normale al sostegno di una superficie regolare. Useremo la seguente notazione; un punto $u \in D$ lo denoteremo equivalentemente con $u = (t, s)$, mentre la matrice Jacobiana del differenziale $Dr(u)$ di r in un punto $u \in D^\circ$ la possiamo scrivere come

$$Jr(u) = Jr(t,s) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial r_1}{\partial s}(t,s) \\ \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial r_2}{\partial s}(t,s) \\ \\ \dfrac{\partial r_3}{\partial t}(t,s) & \dfrac{\partial r_3}{\partial s}(t,s) \end{pmatrix} = (r_t(u), r_s(u)) = (r_t(t,s), r_s(t,s)),$$

dove abbiamo posto

$$r_t(u) = r_t(t,s) = \frac{\partial r}{\partial t}(u) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial t}(t,s), \frac{\partial r_2}{\partial t}(t,s), \frac{\partial r_3}{\partial t}(t,s)\right)$$

e

$$r_s(u) = r_s(t,s) = \frac{\partial r}{\partial s}(u) = \left(\frac{\partial r_1}{\partial s}(t,s), \frac{\partial r_2}{\partial s}(t,s), \frac{\partial r_3}{\partial s}(t,s)\right).$$

Teorema 4.2 *Sia $r : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizzata regolare e sia $u_0 = (t_0, s_0) \in D^\circ$. Allora*

$$\mathrm{Tan}(\Sigma, r(u_0)) = T_{r(u_0)}\Sigma = \langle r_t(u_0), r_s(u_0)\rangle$$

mentre

$$\mathrm{Nor}(\Sigma, r(u_0))) = N_{r(u_0)}\Sigma = \langle r_t(u_0) \times r_s(u_0)\rangle.$$

Dimostrazione. Consideriamo $x_h = r(u_h)$ e $x_0 = r(u_0)$; allora

$$x_h - x_0 = r(u_h) - r(u_0) = Dr(u_0)(u_h - u_0) + o(\|u_h - u_0\|),$$

da cui il fatto che

$$\begin{aligned}\frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|} =& \frac{Dr(u_0)(u_h - u_0) + o(\|u_h - u_0\|)}{\|Dr(u_0)(u_h - u_0) + o(\|u_h - u_0\|)\|} \\ =& \frac{1}{\|Dr(u_0)(\frac{u_h - u_0}{\|u_h - u_0\|}) + \frac{o(\|u_h - u_0\|)}{\|u_h - u_0\|}\|}\left(Dr(u_0)\Big(\frac{u_h - u_0}{\|u_h - u_0\|}\Big) + \frac{o(\|u_h - u_0\|)}{\|u_h - u_0\|}\right).\end{aligned}$$

Se ne deduce che esiste il limite

$$\hat{v} = \lim_{h\to+\infty} \frac{x_h - x_0}{\|x_h - x_0\|}$$

se e solo se esiste il limite

$$\hat{w} = \lim_{h\to+\infty} \frac{u_h - u_0}{\|u_h - u_0\|} \tag{4.1}$$

e vale l'identità

$$\hat{v} = \frac{Dr(u_0)\hat{w}}{\|Dr(u_0)\hat{w}\|}.$$

Dato che $u_0 \in D^\circ$ se ne deduce che

$$\mathrm{Tan}(D, u_0) = T_{u_0}D = \mathbb{R}^2$$

e quindi le direzioni $\hat{w}$ ottenibili in (4.1) sono tutte le direzioni $\hat{w} \in \mathbb{S}^1$. In definitiva $\mathrm{Tan}(\Sigma, r(u_0))$ è lo spazio vettoriale

$$\mathrm{Tan}(\Sigma, r(u_0)) = T_{r(u_0)}\Sigma = Dr(u_0)(\mathbb{R}^2) :$$

tale spazio vettoriale ha dimensione 2 ed è generato dai vettori

$$v_1 = Dr(u_0)e_1 = Jr(u_0)\cdot e_1 = r_t(u_0)$$

e

$$v_2 = Dr(u_0)e_2 = Jr(u_0)\cdot e_2 = r_s(u_0).$$

Per quanto riguarda lo spazio ortogonale basta notare che il vettore

$$r_t(u_0) \times r_s(u_0)$$

è un vettore non nullo grazie alla condizione di rango 2 della matrice Jacobiana di r in u_0 ed è ortogonale sia a $r_t(u_0)$ che a $r_s(u_0)$. □

Come abbiamo visto nel teorema precedente il vettore $r_t(u_0) \times r_s(u_0)$ è un vettore ortogonale a Σ; si definisce quindi versore normale a Σ il versore

$$\hat{n}_\Sigma(u_0) = \frac{r_t(u_0) \times r_s(u_0)}{\|r_t(u_0) \times r_s(u_0)\|}.$$

4.1.1 Superfici cartesiane

Sono queste le superfici ottenute come grafico di una funzione $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Fissiamo quindi la direzione $w \in S^2$, $V = w^\perp$ con base ortonormale $\{v_1, v_2\}$ e consideriamo il grafico di g su D in direzione w

$$\Gamma_w(g, D) = \{u + g(u)w : u \in D \subset V\}.$$

Nel caso particolare $w = e_3$ avremo il grafico di g in direzione e_3, o equivalentemente in direzione z

$$\Gamma_z(g, D) = \{(u, g(u)) \in \mathbb{R}^3 : u \in D\}.$$

Se la funzione g è continua in D e di classe C^1 all'interno di D allora la funzione $r : D \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u) = u + g(u)w$$

definisce una superficie parametrizzata regolare. Infatti la regolarità di r è garantita dalle richieste su g, r è sempre iniettiva e la condizione sul rango è sempre garantita in quanto, se ad esempio consideriamo il caso di grafico in direzione z, la matrice Jacobiana di r è data da

$$Jr(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial t}(t, s) & \dfrac{\partial g}{\partial s}(t, s) \end{pmatrix}.$$

Più in generale, avremo che

$$r_t(t, s) = v_1 + \frac{\partial g}{\partial t}(t, s)w, \qquad r_s(t, s) = v_2 + \frac{\partial g}{\partial s}(t, s)w$$

sono una base per lo spazio tangente mentre

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = -\frac{\partial g}{\partial t}(t, s)v_2 \times w - \frac{\partial g}{\partial s}(t, s)w \times v_1 + v_1 \times v_2;$$

se la scelta dei vettori viene fatta in modo che $\{v_1, v_2, w\}$ sia una base ortonormale destrorsa di $\mathbb{R}^3$, cioè in modo tale che $w = v_1 \times v_2$, la formula precedente diventa

$$r_t(t, s) \times r_s(t, s) = -\frac{\partial g}{\partial t}(t, s)v_1 - \frac{\partial g}{\partial s}(t, s)v_2 + w.$$

La normale alla superficie diventa quindi

$$\hat{n}_\Sigma(t, s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g(t, s)\|^2}} \left(-\frac{\partial g}{\partial t}(t, s)v_1 - \frac{\partial g}{\partial s}(t, s)v_2 + w \right).$$

Esempio 4.1 Consieriamo la funzione $g : D = B_1 \to \mathbb{R}$

$$g(t, s) = t^2 + s^2;$$

la superficie cartesiana $r : B_1 \to \mathbb{R}^3$

$$r(u) = (u, g(u)) = (t, s, t^2 + s^2)$$

definisce un paraboloide in $\mathbb{R}^3$. Lo spazio tangente in tal caso è dato da

$$\mathrm{Tan}(\Sigma, r(u_0)) = T_{r(u_0)}\Sigma = \langle (1,0,2t_0), (0,1,2s_0) \rangle, \qquad \forall u_0 = (t_0, s_0) \in B_1,$$

mentre lo spazio ortogonale è generato dal vettore

$$r_t(t_0,s_0) \times r_s(t_0,s_0) = (-2t_0, -2s_0, 1),$$

o equivalentemente dal versore normale alla superficie

$$\hat{n}_\Sigma(t_0,s_0) = \frac{1}{\sqrt{1+4t_0^2+4s_0^2}}(-2t_0,-2s_0,1).$$

4.1.2 Superfici di rotazione

Supponiamo di avere una curva regolare e semplice nel piano $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$. Immergiamo tale curva nello spazio in modo che sia contenuta nel piano $y = 0$, cioè $r(t) = (r_1(t), 0, r_2(t))$. Se tale curva la ruotiamo attorno all'asse z si ottiene una superficie detta superficie di rotazione attorno all'asse z generata da r. La parametrizzazione di tale superficie si ottiene considerando la matrice di rotazione attorno all'asse z in senso antiorario di un angolo s definita da

$$R_z(s) = \begin{pmatrix} \cos s & -\operatorname{sen} s & 0 \\ \operatorname{sen} s & \cos s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, 2\pi].$$

Abbiamo quindi la parametrizzazione $r : I \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$r(t,s) = R_z(s) \cdot r(t) = (r_1(t)\cos s, r_1(t)\operatorname{sen} s, r_2(t));$$

tale funzione è sicuramente di classe C^1 e

$$r_t(t,s) = R_z(s) \cdot r'(t) = (r_1'(t)\cos s, r_1'(t)\operatorname{sen} s, r_2'(t)),$$

$$r_s(t,s) = R_z'(s) \cdot r(t) = (-r_1(t)\operatorname{sen} s, r_1(t)\cos s, 0).$$

Avremo quindi che

$$r_t(t,s) \times r_s(t,s) = r_1(t)(-r_2'(t)\cos s, -r_2'(t)\operatorname{sen} s, r_1'(t)),$$

da cui il fatto che

$$\|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| = |r_1(t)|\|r'(t)\|;$$

la superficie è regolare se $r_1(t) \neq 0$, cioè se la curva data non tocca l'asse di rotazione.

Esempio 4.2 (Sfera) Se partiamo dalla semicirconferenza di raggio R $r : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ $r(t) = (R\operatorname{sen} t, R\cos t)$, ruotando attorno all'asse z si ottiene la parametrizzazione della sfera di raggio R definita da $r : [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t,s) = (R\operatorname{sen} t\cos s, R\operatorname{sen} t\operatorname{sen} s, R\cos t).$$

Esempio 4.3 (Ellissoide di rotazione) Si consideri la semiellisse di semiassi $a, b > 0$ $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (a \operatorname{sen} t, b \cos t)$; l'ellissoide di rotazione si ottiene mediante la parametrizzazione $r : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t, s) = (a \operatorname{sen} t \cos s, a \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s, b \cos t).;$$

in questo caso il sostegno di tale superficie è l'ellissoide

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Esempio 4.4 (Cilindro) Possiamo parametrizzare il cilindro di raggio di base a e altezza determinata dall'intervallo I partendo dalla curva $r : I \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (a, t)$. Si ottiene quindi la parametrizzazione $r : I \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t, s) = (a \cos s, a \operatorname{sen} s, t),$$

il cui sostegno è dato da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = a^2, z \in I\}.$$

Esempio 4.5 (Cono) Il cono può essere costruito partendo dalla curva $r : I \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t, \frac{ht}{a})$; si ottiene così la parametrizzazione $r : I \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t, s) = \left(t \cos s, t \operatorname{sen} s, \frac{ht}{a} \right)$$

il cui sostegno è dato da

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \frac{h^2}{a^2} z^2, z \in I \right\}.$$

Esempio 4.6 (Toro) Si fissino $0 < r < R$ e si consideri la circonferenza di raggio r centrata in $(R, 0)$, cioè la curva parametrizzata da $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (R + r \cos t, r \operatorname{sen} t)$. Il toro è la superficie parametrizzata da $r : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$r(t, s) = ((R + r \cos t) \cos s, (R + r \cos t) \operatorname{sen} s, r \operatorname{sen} t),$$

il cui sostegno è dato da

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2 \right\}.$$

4.2 k–varietà

Abbiamo fino ad ora visto come si possono definire le curve parametrizzate in ogni dimensione e le superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^3$. Abbiamo anche visto che grazie al Teorema del Dini mediante funzioni scalari si possono definire curve nel piano e superfici nello spazio mediante insiemi di livelli. Vedremo ora che nello spazio le curve possono essere anche definite mediante insiemi di livelli di funzioni regolari; una curva nello spazio si può ottenere come intersezione di due superfici, purchè tali superfici siano tra loro trasversali. Se le due superfici sono liivelli di due funzioni regolari, allora la curva la si ottiene come insieme di livello di una funzione vettoriale le cui componenti sono date dalle due funzioni. Questo modo di costruire una curva viene detta definizione implicita della curva.

Vedremo ora come definire più in generale le k–varietà dove con k intendiamo la dimensione di tale varietà; ci saranno due modi, parametrico ed implicito e vedremo che almeno localmente le due definizioni sono equivalenti.

4.2.1 k–varietà parametrizzate

Iniziamo con la seguente definizione.

Definizione 4.3 *Una k–varietà parametrizzata in $\mathbb{R}^n$, $k < n$ è definita assegnando una funzione continua $r : D \to \mathbb{R}^n$ con $D \subset \mathbb{R}^k$ insieme tale che la parte interna è un aperto connesso per archi, $r \in C^1(D^\circ, \mathbb{R}^n)$, r manda due punti distinti di cui uno almeno interno a D in punti distintii, e tale che*

$$\mathrm{rk} Dr(u) = k, \qquad \forall u \in D^\circ.$$

L'insieme $\Sigma = r(D)$ viene chiamato sostegno o supporto della k–varietà.

La condizione sul rango di $Dr(u)$ implica che i k vettori

$$r_{u_i}(u) = \frac{\partial r}{\partial u_i}(u), \qquad i = 1, \dots, k$$

sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per lo spazio tangente a Σ,

$$\mathrm{Tan}(\Sigma, r(u)) = T_{r(u)}\Sigma = Dr(u)(\mathbb{R}^k) = \langle r_{u_1}(u), \dots, r_{u_k}(u) \rangle, \qquad \forall u \in D^\circ.$$

Un vettore w è ortogonale a Σ in $r(u)$ se

$$r_{u_i}(u) \cdot w = 0, \qquad \forall i = 1, \dots, k,$$

cioè se

$$Jr(u)^T \cdot w = 0.$$

Siccome la matrice trasposta di $Jr(u)$ rappresenta l'applicazione aggiunta di $Dr(u)$, abbiamo che

$$\mathrm{Nor}(\Sigma, r(u)) = N_{r(u)}\Sigma = \ker(Dr(u)^*).$$

Esempi di k–varietà parametrizzate sono i k–grafici di funzioni di classe C^1. Introduciamo a tal fine un pó di notazioni. Fissiamo uno spazio vettoriale $W \leq \mathbb{R}^n$ di dimensione $n-k$ e fissiamo una base ortonormale $\{w_1, \dots, w_{n-k}\}$ di W. Definiamo quindi $V = W^\perp$ e fissiamo una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_k\}$ di V. Data una funzione $g : D \to \mathbb{R}^{n-k}$ definiamo

$$\vec{g}(u) = g_1(u)w_1 + \ldots + g_{n-k}(u)w_{n-k}$$

e poniamo

$$D_V = \{u \in V : u = u_1 v_1 + \ldots + u_k v_k, (u_1, \ldots u_k) \in D\}$$

che identificheremo nel seguito con D scrivendo $D_V = D \subset V$. Il k–grafico di g in direzione W è definito mediante

$$\Gamma_W(g, D) = \{u + \vec{g}(u) : u \in D \subset V\}.$$

Si ottiene la parametrizzazione di tale insieme considerando la funzione $r : D \to \mathbb{R}^n$

$$r(u) = u + \vec{g}(u);$$

tale parametrizzazione sarà di classe C^1 se lo è g e lo spazio tangente a $\Sigma = r(D) = \Gamma_W(g, D)$ è lo spazio generato dai vettori

$$r_{u_i}(u) = v_i + \frac{\partial \vec{g}}{\partial u_i}(u), \qquad i = 1, \dots, k.$$

Tali vettori sono sempre linearmente indipendenti in quanto i vettori v_i sono ortonormali e $\vec{g}(u)$ è ad essi ortogonale.

Finiamo questa sezione con la seguente definizione.

Definizione 4.4 *Un insieme* $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *si dice* k*–grafico se esiste* W *spazio vettoriale di dimensione* $n-k$ *tale che* Σ *è un* k*–grafico in direzione* W*. Diremo poi che* Σ *è localmente attorno ad un punto* $x_0 \in \Sigma$ *un* k*–grafico se esiste* $r > 0$ *tale che* $\Sigma \cap B_r(x_0)$ *è un* k*–grafico.*

4.2.2 k–varietà implicite

Diamo la seguente definizione.

Definizione 4.5 *Diremo che* $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *è una* k*–varietà implicita se esiste una funzione* $f : E \to \mathbb{R}^{n-k}$ *di classe* C^1 *tale che* $\Sigma \subset E \subset \mathbb{R}^n$*,* $\Sigma = \{f = 0\} = E_0(f)$ *e*

$$\mathrm{rk} Df(x) = n-k, \qquad \forall x \in \Sigma.$$

Data una funzione $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^h$ fissiamo $W \leq \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale di dimensione m. Data una base ortonormale $\{w_1, \dots, w_m\}$ di W denoteremo con $J_W f(x)$ la matrice Jacobiana di f relativa a W definita da

$$J_W f(x) = \begin{pmatrix} \nabla_W f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla_W f_{n-k}(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_j}(x) \right)_{\substack{i=1,\dots,h, \\ j=1,\dots,m}},$$

dove abbiamo posto

$$\nabla_W f_i(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial w_1}(x), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial w_m}(x) \right), \qquad i = 1, \dots, h.$$

Teorema 4.6 (Teorema della funzione implicita) *Sia* $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ *una funzione di classe* C^1 *e sia* $x_0 \in E$ *un punto interno ad* E*. Posto* $c = f(x_0)$*, se*

$$\mathrm{rk} Df(x_0) = n-k,$$

allora localmente attorno ad x_0 *l'insieme* $E_c(f)$ *è un* k*–grafico. Sarà in particolare un* k*–grafico in tutte le direzioni* W *con* W *spazio vettoriale di dimensione* $n-k$ *per cui*

$$\det J_W f(x_0) \neq 0.$$

Siccome una k–varietà implicita è localmente un k–grafico, è di conseguenza localmente una k–varietà parametrizzata. Se ne deduce che il tangente a Σ in x_0 è uno spazio vettoriale di dimensione k e il normale è uno spazio vettoriale di dimensione $n-k$. Notiamo inoltre che se scriviamo $f(x) = (f_1(x), \dots, f_{n-k}(x))$, allora la condizione sul rango implica che gli $n-k$ vettori

$$\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x)$$

sono linearmente indipendenti e quindi in particolare non nulli. Per quanto visto nel capitolo precedente il vettore $\nabla f_i(x)$ è ortogonale all'insieme $E_0(f_i)$ in x e quindi grazie all'inclusione $E_0(f) \subset E_0(f_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n-k$ che segue dall'identità

$$E_0(f) = E_0(f_1) \cap \ldots \cap E_0(f_{n-k}),$$

se ne deduce che i vettori $\nabla f_i(x)$, $i = 1, \dots, n-k$ sono ortogonali a Σ in x. Per questione di dimensione si conclude che

$$\mathrm{Nor}(\Sigma, x) = N_x\Sigma = \langle \nabla f_1(x), \dots, \nabla f_{n-k}(x) \rangle = Df(x)^*(\mathbb{R}^{n-k}),$$

immagine dell'applicazione aggiunta di $Df(x)$.

Un vettore v sarà ora tangente a Σ in x se è ortogonale ai vettori $\nabla f_i(x)$, cioè se $\nabla f_i(x) \cdot v = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n-k$; in definitiva $Df(x)v = 0$ e quindi

$$\mathrm{Tan}(\Sigma, x) = T_x\Sigma = \ker(Df(x)).$$

Abbiamo visto che una k–varietà implicita è localmente anche una k–varietà parametrizzata. Vale anche l'implicazione inversa, come mostra il seguente risultato.

Proposizione 4.7 *Sia $r : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ una k–varietà parametrizzata. Per ogni fissato $u_0 \in D^\circ$, posto $x_0 = r(u_0)$, avremo che localmente attorno a x_0 l'insieme $\Sigma = r(D)$ è una k–varietà implicita.*

Dimostrazione. Fissato u_0, $x_0 = r(u_0)$, mostriamo che esiste $r > 0$ tale che $\Sigma \cap B_r(x_0)$ è lo zero di una opportuna funzione. Scriviamo

$$r(u) = (r_{(k)}(u), r_{(n-k)}(u)),$$

con $r_{(k)}(u) \in \mathbb{R}^k$ e $r_{(n-k)}(u) \in \mathbb{R}^{n-k}$. Grazie alla condizione $\mathrm{rk}(Dr(u_0)) = k$, possiamo pensare di aver fissato il sistema di coordinate in modo tale che

$$\det Jr_{(k)}(u_0) \neq 0.$$

Applichiamo il Teorema della funzione inversa alla funzione $r_{(k)} : A \to B$ con $A \subset D$ e $B \subset \mathbb{R}^k$ per trovare che esiste l'inversa $r^{-1}_{(k)} : B \to A$. Definiamo quindi $f : B \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$ ponendo

$$f(x) = f(y, z) = r_{(n-k)}(r^{-1}_{(k)}(y)) - z,$$

dove abbiamo scritto $x = (y, z)$, $y \in \mathbb{R}^k$, $z \in \mathbb{R}^{n-k}$. Con tale definizione abbiamo che

$$f(r(u)) = f(r_{(k)}(u), r_{(n-k)}(u)) = r_{(n-k)}(r^{-1}_{(k)}(r_{(k)}(u))) - r_{(n-k)}(u) = r_{(n-k)}(u) - r_{(n-k)}(u) = 0,$$

e cioè $\Sigma_A = r(A)$ è il livello 0 della funzione f. □

Concludiamo il capitolo con un esempio.

Esempio 4.7 Consideriamo l'insieme dello spazio definito da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1\}.$$

Tale insieme è definito come livello $(1, 1)$ della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x^2 + y^2, x^2 + z^2).$$

La matrice Jacobiana di tale funzione è data da

$$Jf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix};$$

tale matrice ha rango 2 tranne che nei punti della forma $(x, 0, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$, $(0, y, 0)$ con $y \in \mathbb{R}$ e $(0, 0, z)$ con $z \in \mathbb{R}$. Abbiamo che $(x, 0, 0) \in E_{(1,1)}(f)$ se e solo se $x = \pm 1$, mentre i punti $(0, y, 0)$ e $(0, 0, z)$ non appartengono mai a $E_{(1,1)}(f)$. In conclusione Σ è una 1–varietà implicita se si escludono i due punti $(\pm 1, 0, 0)$. L'insieme Σ è unione di due curve parametrizzate e più precisamente delle curve

$$(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t), \quad (\cos t, \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

mentre l'insieme $\Sigma \setminus \{(\pm 1, 0, 0)\}$ è costituito da 4 curve parametrizzate da

$$(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t), \quad (\cos t, \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t), \qquad t \in (0, \pi),$$

$$(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t), \quad (\cos t, \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t), \qquad t \in (\pi, 2\pi).$$

Fissiamo a titolo esemplificatvo il punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$; La matrice Jacobiana di f in tale punto è data da

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix};$$

i vettori $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ sono quindi una base dello spazio normale

$$N_{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})}\Sigma = \langle(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})\rangle,$$

mentre per determinare lo spazio tangente possiamo considerare il vettore

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \times (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}) = (2, -2, -2),$$

e quindi

$$T_{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})}\Sigma = \langle(2, -, 2, -2)\rangle = \langle(1, -, 1 - 1)\rangle.$$

In questo esempio nei punti $(\pm 1, 0, 0)$ il tangente a Σ non è uno spazio vettoriale ma, usando le parametrizzazioni di Σ si vede che

$$\operatorname{Tan}(\Sigma, (\pm 1, 0, 0)) = \langle(0, 1, 1)\rangle \cup \langle(0, 1, -1)\rangle,$$

mentre per il normale si ha che

$$\operatorname{Nor}(\Sigma, (\pm 1, 0, 0)) = N_{(\pm 1,0,0)}\Sigma = \langle(1, 0, 0)\rangle.$$

Bibliografia

[1] Marco Bramanti and Sandro Pagani, Carlo Domenico e Salsa. *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare*. Zanichelli, 2004.

[2] Marco Bramanti and Sandro Pagani, Carlo Domenico e Salsa. *Analisi Matematica 2*. Zanichelli, 2009.

[3] Enrico Giusti. *Analisi Matematica vol 2*. Progr. Matem. Fisica Elettronica. Boringhieri, 2003.