Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti del corso di Analisi Matematica 2 dal Corso di Laurea Triennale di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Ferrara.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida relativa agli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire un buon libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. Viene fornita in bibliografia una lista di testi che si ritengono validi per lo studio della materia. La funzione di questi appunti è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei sono molto buone e ben fornite di ottimi testi. Tra i vari testi disponibili consigliamo sicuramente il testo [3] o la sua edizione precedente [2]; un altro ottimo testo è [4]

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto è possibile che alcune parti vengano corrette ed integrate durante il corso.

Michele Miranda
Ferrara, 2 dicembre 2019

Indice

Capitolo 7

Integrali curvilinei e di superficie; formule di Gauss–Green

In questo capitolo ci occupiamo della generaliizzazione agli integrali multipli della formula di integrazione per parti. Esistono due tipologie di integrazione per parti, che vanno sotto il nome di formule di Gauss–Green; il primo tipo è dato dal Teorema della divergenza, il secondo che vedremo in questo corso è dato dal Teorema del rotore o di Stokes. Queste due formule di integrazione le vedremo e dimostreremo solo nel caso $n = 2$ o $n = 3$, ma hanno una validità più ampia in ogni dimensione. Le formule di Gauss–Green coinvolgono gli operatori differenziali divergenza e rotore; inizieremo il capitolo quindi introducendo tali operatori e descrivendone alcune proprietà.

7.1 Operatori differenziali

Durante il corso abbiamo definito il gradiente di una funzione scalare e più in generale il differenziale di una funzione vettoriale; questo è un primo esempio di operatore differenziale. Per poter enunciare le formule di Gauss–Green abbiamo bisogno di introdurre altri operatori differenziali; la divergenza, il Laplaciano e il rotore.

Definizione 7.1 *Nel seguito denoteremo con $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ una funzione scalare e con $F : E \to \mathbb{R}^n$ una funzione vettoriale. Si definiscono:*

1. *gradiente di f il vettore*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right);$$

2. *divergenza di F lo scalare*

$$\mathrm{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x);$$

3. *Laplaciano di f lo scalare*

$$\Delta f(x) = \mathrm{div}\nabla f(x) = \mathrm{tr}Hf(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x);$$

4. *nel caso $n = 3$, rotore di F il vettore*

$$\mathrm{rot}F = \det \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{i}} & \widehat{\mathbf{j}} & \widehat{\mathbf{k}} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

Osservazione 7.2 L'operatore rotore è ovviamente definito anche per funzioni $F : R \to \mathbb{R}^2$ e se si pensa al calmpo come ad un campo in $\mathbb{R}^3$ che non dipende da z scrivendo quindi $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), 0)$, il rotore è dato da

$$\mathrm{rot}F(x, y) = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)\right).$$

Si tende quindi ad identificare il rotore di un campo in $\mathbb{R}^2$ con lo scalare

$$\mathrm{rot}F(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y).$$

Gli operatori differenziali appena definiti si possono combinare tra loro. Diamo di seguito una piccola lista di combinazioni che più si usano nelle applicazioni; lasciamo come esercizio le loro dimostrazioni che seguono direttamente dalle definizioni.

Proposizione 7.3 *Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ e $F : E \to \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$, due funzioni, di classe C^1 o C^2 a seconda dei casi. Allora;*

1. *se $n = 3$*
$$\mathrm{rot}\nabla f(x, y, z) = 0;$$

2. *se $n = 3$*
$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}F(x, y, z) = 0;$$

3.
$$\mathrm{div}(f(x)F(x)) = \nabla f(x) \cdot F(x) + f(x)\,\mathrm{div}F(x);$$

4.
$$\mathrm{div}(f(x)\nabla g(x)) = \nabla f(x) \cdot \nabla g(x) + f(x)\Delta g(x);$$

5. *se $n = 3$*
$$\mathrm{div}(f(x, y, z)\,\mathrm{rot}F(x, y, z)) = \nabla f(x, y, z) \cdot F(x, y, z);$$

6. *se $n = 3$*
$$\mathrm{rot}(f(x, y, z)F(x, y, z)) = \nabla f(x, y, z) \times F(x, y, z) + f(x, y, z)\,\mathrm{rot}F(x, y, z);$$

7. *se* $n = 3$
$$\mathrm{rot}(f(x,y,z)\nabla g(x,y,z)) = \nabla f(x,y,z) \times \nabla g(x,y,z);$$

8. *se* $n = 3$
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}F(x,y,z) = \nabla \mathrm{div} F(x,y,z) - \Delta F(x,y,z),$$
dove ΔF *è il vettore*
$$\Delta F(x,y,z) = (\Delta F_1(x,y,z), \Delta F_2(x,y,z), \Delta F_3(x,y,z)).$$

7.2 Integrali curvilinei

In questa sezione diamo la defnizione di integrale curvilineo; esistono due tipologie di integrale curvilineo a seconda che si voglia calcolare l'integrale di una funzione scalare o di una funzione vettoriale.

Definizione 7.4 (Integrali curvilinei) *Date una funzione continua* $f : E \to \mathbb{R}$*, un campo continuo* $F : E \to \mathbb{R}^n$ *con* $E \subset \mathbb{R}^n$ *e una curva regolare a tratti* $r : [a,b] \to E$*, si definiscono:*

1. *l'integrale curvilineo di prima specie di* f *lungo* r *la quantità*
$$\int_r f dr = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt;$$

2. *l'Integrale curvilineo di seconda specie del campo* F *lungo* r *la quantità*
$$\int_r F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

L'integrale curvilineo di prima specie, nel caso in cui la funzione f rappresenti la densità di massa di un filo parametrizzato da r, definisce la massa totale del filo. Tale integrale è indipendente dalla parametrizzazione, nel senso che se $\tilde{r} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ è una curva equivalente ad r, allora
$$\int_r f dr = \int_{\tilde{r}} f d\tilde{r}.$$
L'intgegrale curvilineo di seconda specie, nel caso in cui F rappresenti un campo di forze, ha il significato di lavoro del campo lungo la curva r. Notando che
$$\int_r F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(r(t)) \cdot \hat{\tau}_r(t) \|r'(t)\| dt,$$
si nota che nel caso in cui $\tilde{r} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ è una curva equivalente ad r, se r ed $\tilde{r}$ hanno la stessa orientazione, allora $\hat{\tau}_r = \hat{\tau}_{\tilde{r}}$ e quindi
$$\int_r F \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{r}} F \cdot \tilde{r},$$
mentre se r ed $\tilde{r}$ hanno orientazione opposta, essendo $\hat{\tau}_r = -\hat{\tau}_{\tilde{r}}$, allora
$$\int_r F \cdot d\vec{r} = -\int_{\tilde{r}} F \cdot \tilde{r}.$$

Come notazione, se la curva r è chiusa, si parla di circuitazione del campo F lungo la curva r e si usa la notazione

$$\oint_r F \cdot d\vec{r} := \int_r F \cdot d\vec{r}.$$

Esempio 7.1 Calcoliamo il baricentro della curva $r : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = R(\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Ricordiamo che il baricentro di una curva la cui densità di massa è 1 è il punto del piano $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ di le cui coordinate sono date da

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell(r, I)} \int_I r(t) \|r'(t)\| dt.$$

Dato che nel nostro caso $\ell(r, [0, \pi]) = \pi R$, abbiamo che il baricetro ha coordinate

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R \cos t R dt = 0,$$

mentre

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R \operatorname{sen} t R dt = \frac{2R}{\pi}.$$

Quindi il baricentro della nostra curva ha coordinate $(0, \frac{2R}{\pi})$.

Esempio 7.2 Calcoliamo il lavoro del campo $F(x, y) = (-y, x)$ lungo la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Usando la definizione, abbiamo che

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = \oint_r F \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi.$$

7.3 Integrali di superficie

Come per gli integrali curvilinei, esistono due tipologie di integrali di superfici, a seconda che si voglia integrare una funzione scalare o una funzione vettoriale. A differenza degli integrali curvilinei, considerermo in questa sezione solo gli iintegrali per superfici parametrizzate in $\mathbb{R}^3$.

Iniziamo col dare, analogamente con quanto fatto per le curve, la nozione di area di una superficie parametrizzata. Per una curva parametrizzata regolare a tratti $r : I \to \mathbb{R}^n$ abbiamo visto che la lunghezza della curva puó essere calcolata mediante il seguente integrale

$$\ell(r, I) = \int_I \|r'(t)\| dt.$$

La quantitè $ds = \|r'(t)\| dt$ rappresenta quindi un elemento infinitesimo di lunghezza il cui integrale mi da la lunghezza totale della curva.

Per quanto riguarda una superficie parametrizzata regolare $r : D \to \mathbb{R}^3$ i vettori $r_t(t, s)$ e $r_s(t, s)$ sono vettori tangenti; essi individuano un parallelogramma tangente alla superfiicie e quindi, come nel caso della curva, la quantità

$$d\Sigma = \|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\| dt ds$$

rappresenta l'elemento di area infinitesima della superficie $\Sigma = r(D)$ (si pensi all'analogia della formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli). Fatte queste considerazioni, ha senso definire l'area di una superficie regolare come segue.

Definizione 7.5 *Data una superficie parametrizzata regolare $r : D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$ dominio connesso, si definisce area della superficie $\Sigma = r(D)$ ponendo*

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_D \|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| dtds.$$

Esempio 7.3 Calcoliamo l'area del paraboloide $z = g(x,y) = x^2 + y^2$ con $(x,y) \in B_1$. Stiamo quindi considerando la superficie parametrizzata $r : B_1 \to \mathbb{R}^3$

$$r(t,s) = (t,s,g(t,s)) = (t,s,t^2+s^2).$$

Dato che

$$\|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| = \sqrt{1 + \|\nabla g(t,s)\|^2} = \sqrt{1+4t^2+4s^2},$$

troviamo che

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_{B_1} \sqrt{1+4t^2+4s^2}dtds = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 \varrho\sqrt{1+4\varrho^2}d\varrho = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

Nel caso di una superficie di rotazione ottenuta ruotando una curva $r : I \to \mathbb{R}^2$ ricordiamo che vale l'identità

$$\|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| = |r_1(t)| \cdot \|r'(t)\|,$$

quindi l'area della superficiie di rotazione diventa

$$\text{Area}(\Sigma) = 2\pi \int_I |r_1(t)| \cdot \|r'(t)\| dt.$$

Esempio 7.4 La sfera di raggio R è ottenuta ruotando la curva $r : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (R\sin t, R\cos t);$$

pertanto l'area della sfera di raggio R è data da

$$\text{Area}(S_R) = 2\pi \int_0^{\pi} R^2 \sin t dt = 4\pi R^2.$$

Esempio 7.5 La superficie laterale di un cilindro di raggio da base R e altezza h si parametrizza mediante rotazione della curva $r : [0,h] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (R,t)$, Pertanto l'area della superficie laterale C del cilindro è data da

$$\text{Area}(C) = 2\pi \int_0^h R dt = 2\pi Rh.$$

Esempio 7.6 La superficie laterale dii un cono di circonferenza di base R e altezza h può essere parametrizzata dalla rotazione della curva $r : [0,R] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = \left(t, \frac{ht}{R}\right).$$

Pertanto l'area della superficie laterale C del cono è data da

$$\text{Area}(C) = 2\pi \int_0^R t\sqrt{1+\frac{h^2}{R^2}}dt = \pi R\sqrt{R^2+h^2}.$$

Esempio 7.7 Il toro T è la superficie ottenuta ruotando la curva $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (R + r\cos t, r\sin t).$$

Pertanto l'area del toro è data da

$$\text{Area}(T) = 2\pi \int_0^{2\pi} (R + r\cos t) r dt = 4\pi^2 Rr.$$

Veniamo ora alla definizione degli integrali di superficie; gli integrali di superficie di prima specie sono ben definiti per ogni tipo di superficie, mentre quelli di seconda specie sono ben definiti per le superfici orientabili. Non esiste una defiinizione semplice, nel linguaggio di questo corso, di superficie orientabile; la definizione che presentiamo qui, valida per una superficie in $\mathbb{R}^3$ e generalizzabile a ipersuperfici in $\mathbb{R}^n$, è data in termini di esistenza di un campo normale alla superficie che sia continuo globalmente.

Definizione 7.6 (Superficie orientabile) *Una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ si dice orientabile se esiste una funzione $\hat{n} : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ continua e tale che $\hat{n}(x) \in \text{Nor}(\Sigma, x)$ per ogni $x \in \Sigma$.*

Se una funzione $\hat{n}$ fornisce una orientazione di Σ, allora anche $-\hat{n}$ fornisce una orientazione di Σ.

Esempi di superfici orientabili sono le superfici cartesiane; infatti in tal caso, se vediamo la superficie come grafico in direzione z di una funzione g, $\Sigma = \Gamma_z(g, D)$, il campo normale che orienta Σ è dato da

$$\hat{n}_\Sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g(x')\|^2}}(-\nabla g(x'), 1) \qquad x = (x', g(x')).$$

Sono sicuramente orientabili tutte le superfici Σ che sono contenute in frontiere di insiemi regolari, $\Sigma \subset \partial E$; in tal caso infatti il campo normale continuo che orienta la superficie è ad esempio o la normale interna o la normale esterna ad E che ora definiamo. Per un insieme dire che ∂E è regolare significa dire che localmente ∂E è il grafico di una funzione regolare; il campo normale a ∂E viene costruito in termini del gradiente della funzione di cui ∂E è localmente grafico. Si parla di normale esterna se la funzione $\hat{n} : \partial E \to \mathbb{S}^2$ ha la proprietà che per ogni $x \in \partial E$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$t\hat{n}(x) \in E \quad \text{per } t \in (-\varepsilon, 0), \qquad t\hat{n}(x) \notin E \quad \text{per } t \in (0, \varepsilon),$$

cioè $\hat{n}$ indica in ogni punto la direzione di uscita dall'insieme E. Si parla di normale interna se $-\hat{n}$ definisce la normale esterna, e quindi se $\hat{n}$ indica in ogni punto la direzione di entrata nell'insieme E.

Le superfici che sono scrivibili come livelli $\Sigma = \{g = c\}$ di funzioni regolari $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ per le quali si applica il Teorema della funzione implicita, cioè $\nabla g(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Sigma$, sono superfici orientabili, perchè in tal caso l'orientazione è data ad esempio da

$$\hat{n}(x) = \frac{\nabla g(x)}{\|\nabla g(x)\|}.$$

Sono orientabili tutte le superfici parametrizzate $\Sigma = r(D)$ nel caso in cui $D \subset \mathbb{R}^2$ sia un insieme aperto, con campo normale

$$\hat{n}_\Sigma(t, s) = \frac{r_t(t, s) \times r_s(t, s)}{\|r_t(t, s) \times r_s(t, s)\|}$$

è continuo. Se la parametrizzazione r è invece definita su $D \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, non è detto che la superficie sia orientabile; un esempio classico è dato dal nastro di Möbius parametrizzato da $r : [-1, 1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t,s) = \left(\left(1 + \frac{t}{2} \cos \frac{s}{2}\right) \cos s, \left(1 + \frac{t}{2} \cos \frac{s}{2}\right) \sin s, \frac{t}{2} \sin \frac{s}{2} \right).$$

Per tale superficie si ha che $r(0,0) = r(0,2\pi) = (1,0,0)$ ma

$$\frac{r_t(0,0) \times r_s(0,0)}{\|r_t(0,0) \times r_s(0,0)\|} = (0,0,1), \qquad \frac{r_t(0,2\pi) \times r_s(0,2\pi)}{\|r_t(0,2\pi) \times r_s(0,2\pi)\|} = (0,0,-1).$$

Fissata la nozione di superficie orientabile possiamo dare la definizione di intgrale di superficie.

Definizione 7.7 *Siano $f : E \to \mathbb{R}$ e $F : E \to \mathbb{R}^3$ due funzioni continue, $E \subset \mathbb{R}^3$ e $\Sigma = r(D)$ una superficie parametrizzata regolare. Si definiscono:*

1. *l'ntegrale di superficie di prima specie della funzione f*

$$\int_\Sigma f d\Sigma = \int_D f(r(D)) \|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| dtds;$$

2. *l'integrale di superficie di seconda specie della funzione F nel caso in cui Σ sia orientata*

$$\begin{aligned} \int_\Sigma F \cdot \nu_\Sigma \, d\Sigma &= \int_D F(r(t,s)) \cdot \hat{n}_\Sigma(t,s) \|r_t(t,s) \times r_s(t,s)\| \, dtds \\ &= \int_D F(r(t,s)) \cdot r_t(t,s) \times r_s(t,s) \, dtds \end{aligned}$$

La nozione di integrale di superficie di prima specie ha il significato, nel caso in cui la funzione rappresenti la densità di massa di una lamiera Σ, di massa totale di Σ.

Esempio 7.8 Calcoliamo l'integrale di $f(x,y,z) = z$ sulla superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Possiamo parametrizzare Σ mediante $r : [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$

$$r(t,s) = (\cos s \sin t, \sin s \sin t, \cos t);$$

l'integrale da calcolare diventa

$$\int_\Sigma z \; d\Sigma = \int_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} \cos t \sin t \, dtds = \pi.$$

L'integrale di superficie di seconda specie ha il significato, nel caso in cui F rappresenti le linee di un campo di forze, di flusso del campo F passante attraverso la superficie Σ. Si usa quindi la notazione

$$\Phi(F, \Sigma) := \int_\Sigma F \cdot \hat{n}_\Sigma \, d\Sigma;$$

tale quantità è ben definita a meno del segno, a seconda che per orientare Σ si scelga un campo normale $\hat{n}_\Sigma$ o il suo opposto $-\hat{n}_\Sigma$.

Esempio 7.9 Calcoliamo il flusso del campo $F(x,y,z) = (yz, xz, x^2y^2)$ passante per il paraboloiide $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, (x,y) \in B_1\}$. Visto che Σ è una superficie cartesiana, è orentabile con campo normale che orienta dato da

$$\hat{n}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla g(x,y)\|}}(-\nabla g(x,y), 1)$$

con $g(x,y) = x^2 + y^2$. Troviamo quindi che

$$\begin{aligned}\Phi(F,\Sigma) &= \int_\Sigma F \cdot \hat{n}_\Sigma \, d\Sigma = \int_{B_1} (y(x^2+y^2), x(x^2+y^2), x^2y^2) \cdot (-2x, -2y, 1) dxdy \\ &= \int_{B_1} (-2xy(x^2+y^2) - 2xy(x^2+y^2) + x^2y^2) dxdy \\ &= \int_{B_1} x^2y^2 \, dxdy = \frac{\pi}{24}.\end{aligned}$$

Esempio 7.10 Calcoliamo il flusso del campo

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$$

uscente dalla sfera di raggio R. Possiamo notare che per $(x,y,z) \in S_R$, $\|(x,y,z)\| = R$ e che

$$\hat{n}_\Sigma(x,y,z) = \frac{1}{R}(x,y,z).$$

Quindi

$$\Phi(F, S_R) = \int_{S_R} \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3} \cdot \frac{1}{R}(x,y,z) \, d\Sigma = \frac{1}{R^2} \int_{S_R} d\Sigma = \frac{1}{R^2} \mathrm{Area}(S_R) = 4\pi.$$

7.4 Teorema della divergenza e del rotore nel piano

Iniziamo con le formule di Gauss–Green nel piano. Premettiamo il seguente Lemma.

Lemma 7.8 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 con*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \alpha(x) \le y \le \beta(x)\},$$

$\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1, $\alpha(x) \le \beta(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Allora

$$\int_E \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) dxdy = \int_{\partial E} f \nu_E \cdot e_2 dr$$

dove con ν_E si indica la normale esterna ad E e l'integrale di destra è un integrale curvilineo di prima specie esteso alla curva regolare a tratti chiusa ∂E.

Dimostrazione. Per la formula di riduzione sugli insiemi semplici possiamo scrivere

$$\int_E \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) dxdy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) dy = \int_a^b \Big(f(x, \beta(x)) - f(x, \alpha(x)) \Big) dx.$$

Si tratta ora di vedere l'ultimo integrale come un integrale curvilineo. L'insieme E ha la frontiera ∂E che è dato da una curva regolare a tratti; due tratti sono i tratti verticali

$$V_1 = \{a\} \times [\alpha(a), \beta(a)], \qquad V_2 = \{b\} \times [\alpha(b), \beta(b)],$$

e gli altri due tratti sono i grafici di α e β. Il tratto V_1 è parametrizzato da

$$r(t) = (a, t), \qquad t \in [\alpha(a), \beta(a)]$$

e la normale uscente da E in tali punti è costante ed uguale a $\hat{n}_E(a, t) = (-1, 0)$. Dato che $\hat{n}_E \cdot e_2 = 0$ si ha che

$$\int_{V_1} f\hat{n}_E \cdot e_2 dr = 0.$$

Nello stesso modo si vede che

$$\int_{V_2} f\hat{n}_E \cdot e_2 dr = 0.$$

Veniamo ora ai grafici di α e β; per il grafico di α, la parametrizzazione è data da

$$r(t) = (t, \alpha(t)), \qquad t \in [a, b]$$

e la normale esterna ad E da

$$\hat{n}_E(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'(t)^2}}(\alpha'(t), -1);$$

quindi $\hat{n}_E \cdot e_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha'(t)^2}}$ e

$$\int_{\Gamma(\alpha,[a,b])} f\hat{n}_E \cdot e_2 dr = -\int_a^b f(r(t)) \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha'(t)^2}} \|r'(t)\| dt = -\int_a^b f(x, \alpha(x)) dx.$$

Sul grafico di β l'unica cosa che cambia è che la normale esterna è data da

$$\hat{n}_E(r(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta'(t)^2}}(-\beta'(t), 1),$$

e quindi

$$\int_{\Gamma(\beta,[a,b])} f\hat{n}_E \cdot e_2 dr = \int_a^b f(x, \beta(x)) dx,$$

e questo conclude la dimostrazione del Lemma. □

Il risultato del Lemma precedente può essere esteso all'unione di insiemi E semplici in direzione y; se ad esempio $E = E_1 \cup E_2$ con E_1 e E_2 semplici in direzione y tali che $|E_1 \cap E_1| =$, tenendo presente che su $\partial E_1 \cap \partial E_2$ la normale esterna di E_1 coincide con la normale interna di E_2, cioè

$$\hat{n}_{E_1}(x) = -\hat{n}_{E_2}(x), \qquad \forall x \in \partial E_1 \cap \partial E_2,$$

se ne deduce che i contributi degli integrali curvilinei su $\partial E_1 \cap \partial E_2$ si compensano. Per il resto i punti di ∂E appartengono o a ∂E_1 o a ∂E_2 e quindi la normale esterna ad E coincide o con la normale esterna ad E_1 o con la normale esterna ad E_2. Se ne deduce che

$$\begin{aligned}\int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dxdy &= \int_{E_1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dxdy + \int_{E_2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dxdy \\ &= \int_{\partial E_1} f\hat{n}_{E_1} \cdot e_2 dr + \int_{\partial E_2} f\hat{n}_{E_2} \cdot e_2 dr = \int_{\partial E} f\hat{n}_E \cdot e_2 dr.\end{aligned}$$

Quindi il lemma vale per ogni unione finita di insiemi semplici in direzione y, che praticamente sono tutti gli insiemi con frontiera regolare a tratti che si considerano in questo corso.

Mettendo lnsieme il risultato del Lemma e le considerazioni appena fatte, possiamo enuncuiare il Teorema della divergenza nel piano; supporremo che E sia un insieme regolare a tratti, cioè unione finita di insiemi semplici; per tali insiemi è quindi possibile definire la normale esterna $\hat{n}_E$, eventualmente tranne che in un numero finito di punti di ∂E.

Teorema 7.9 (Teorema della divergenza nel piano) *Sia $F : E \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1 con $E \subset \mathbb{R}^2$ insieme limitato tale che ∂E regolare a tratti. Allora*

$$\int_E \mathrm{div} F(x,y)\,dxdy = \int_{\partial E} F \cdot \hat{n}_E\,dr.$$

Dimostrazione. Basta scrivere

$$\mathrm{div} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(x,y)$$

ed applicare il Lemma con $f = F_2$ e l'analogo del Lemma per insiemi semplici in direzione x con $f = F_1$. □

Esempio 7.11 Verifichiamo la validità del Teorema della divergenza con $F(x,y) = (xy, x^2)$ e $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \le 1\}$. Da un lato abbiamo che

$$\int_E \mathrm{divF}(x,y) dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x y dy = \frac{1}{6}.$$

Dall'altra parte, ∂E è una curva regolare a tratti

$$\partial E = C_1 \cup C_2 \cup C_3;$$

il tratto C_1 è parametrizzato ad esempio da $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t,0)$ con la normale esterna è data da $\hat{n}_E = (0,-1)$, C_2 invece è parametrizzato ad esempio da $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (1,t)$ con normale esterna $\hat{n}_E = (1,0)$ e C_3 è parametrizzato ad esempio da $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t,t)$ con normale esterna $\hat{n}_E = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. Troviamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} (xy, x^2) \cdot \hat{n}_E dr &= \int_0^1 (0,t^2) \cdot (0,-1) dt + \int_0^1 (t,1) \cdot (1,0) dt + \int_0^1 (t^2,t^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\sqrt{2} dt \\ &= \int_0^1 (t - t^2) dt = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Il Teorema della divergenza può anche essere usato per il calcolo delle aree di regioni del piano in cui viene fornita una parametrizzazione della frontiera. Infatti se F è un campo con divergenza pari a 1, allora

$$\mathrm{Area}(E) = \int_E \mathrm{div} F(x,y)\,dxdy = \int_{\partial E} F \cdot \hat{n}_E dr.$$

Esempi di campi con divergenza 1 sono dati da

$$F(x,y) = (ax, by), \qquad a,b \in \mathbb{R}, a + b = 1.$$

Esempio 7.12 Calcoliamo l'area dell'asteroide, cioè della regione del piano la cui frontiera è parametrizzata da $r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Tenendo presente che

$$r'(t) = 3 \sin t \cos t (-\cos t, \sin t), \qquad \|r'(t)\| = 3|\sin t||\cos t|,$$

abbiamo che, tranne che per $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$,

$$\hat{\tau}_r(t) = \frac{\sin t}{|\sin t|}\frac{\cos t}{|\cos t|}(-\cos t, \sin t).$$

La normale uscente è quindi ottenuta come rotazione di $\pi/2$ in senso anti-orario del versore tangente, troviamo che

$$\hat{n}_r(t) = \frac{\sin t}{|\sin t|}\frac{\cos t}{|\cos t|}(\sin t, \cos t).$$

Prendendo come campo ad esempio $F(x, y) = (x, 0)$, si trova che

$$\begin{aligned}\text{Area}(E) =& \int_{\partial E}(x, 0) \cdot \hat{n}_E dr = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t, 0) \cdot \frac{\sin t}{|\sin t|}\frac{\cos t}{|\cos t|}(\sin t, \cos t)3|\sin t||\cos t|dt \\ =& 3\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^4 t dt = \frac{3}{8}\pi.\end{aligned}$$

Dal Teorema della divergenza nel piano si ricava immediatamente il Teorema del rotore nel piano, applicandolo al campo vettoriale G ottenuto ruotando di $\pi/2$ in senso orario il campo F

$$G(x, y) = R_{-\frac{\pi}{2}} F(x, y) = (-F_2(x, y), F_1(x, y)).$$

Fissiamo $(x, y) \in \partial E$; posto $\hat{\tau} = R_{-\frac{\pi}{2}}\hat{n}_E(x, y)$, dato che $\hat{n}_E(x, y) = R_{\frac{\pi}{2}}\hat{\tau}$ e che l'aggiunto di $R_{\frac{\pi}{2}}$ è $R_{-\frac{\pi}{2}}$, se ne deduce che

$$F(x, y) \cdot \hat{n}_E(x, y) = F(x, y) \cdot R_{\frac{\pi}{2}}\hat{\tau} = R^*_{\frac{\pi}{2}}F(x, y) \cdot \hat{\tau} = R_{-\frac{\pi}{2}}F(x, y) \cdot \hat{\tau} = G(x, y) \cdot \hat{\tau}.$$

Notiamo quindi che

$$\text{rot}G(x, y) = \text{div}F(x, y);$$

se parametrizziamo quindi ∂E con parametrizzazioni r per cui $\hat{\tau}_r(t) = \hat{\tau} = R_{\frac{\pi}{2}}\hat{n}_E(r(t))$, abbiamo la dimostrazione del seguente risultato. In tale enunciato denotiamo con $\partial^+ E$ la frontiera di E intesa parametrizzata in modo tale che

$$\hat{\tau}_r(t) = R_{\frac{\pi}{2}}\hat{n}_E(r(t)).$$

Se E è un dominio connesso, allora ∂E è composto tipicamente da un numero finito di curve chiuse di cui una racchiude tutte le altre. La parametrizzazione $\partial^+ E$ si ottiene parametrizzando in in senso anti–orario la curva esterna ed in senso orario le altre.

Teorema 7.10 (Teorema del rotore nel piano) *Sia $F : E \to \mathbb{R}^2$ un campi di classe C^1, $E \subset \mathbb{R}^2$ insieme connesso tale che ∂E sia regolare a tratti. Allora*

$$\int_E \text{rot}F(x, y)\ dxdy = \oint_{\partial^+ E} F \cdot d\vec{r}.$$

Esempio 7.13 Verifichiamo la validitè del Teorema del rotore con $F(x, y) = (xy^2, xy)$ e $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x \leq 1\}$. Da una parte abbiamo che

$$\int_E \text{rot}F(x, y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (y - 2xy)dy = \frac{1}{12}.$$

Dall'altra parte abbiamo che ∂E è una curva regolare a tratti $\partial E = C_1 \cup C_2 \cup C_3$; per rispettare le orientazioni, C_1 la parametrizziamo usando $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (t, 0)$, C_2 la parametrizziamo usando $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (1-t, 1)$ mentre C_3 la parametrizziamo usando $r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (0, 1-t)$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ E} F \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 (0,0)\cdot(1,0)dt + \int_0^1 (t^2(1-t), t(1-t))\cdot(-1,1)dt + \int_0^1 (0,0)\cdot(0,-1)dt \\ &= \int_0^1 (t^3 - 2t^2 + t)dt = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

7.5 Teorema della divergenza e del rotore nello spazio

L'enunciato e la dimostrazione del Teorema della diivergenza nello spazio è molto simile a quella vista nel piano; si inizia con insiemi semplici in direzione z.

Lemma 7.11 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

con $D \subset \mathbb{R}^2$ insieme misurabile con ∂D regolare a tratti, $\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}$ funzioni regolari limitate tali che $\alpha(x,y) \le \beta(x,y)$ per ogni $(x,y) \in D$. Allora

$$\int_E \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\, dxdxdz = \int_{\partial E} f \hat{n}_E \cdot e_3 d\Sigma,$$

dove $\hat{n}_E$ è la normale esterna ad E.

Dimostrazione. Come nel caso del piano

$$\int_E \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\, dxdxdz = \int_D \Big(f(x,y,\beta(x,y)) - f(x,y,\alpha(x,y)) \Big)\, dxdy;$$

resta solo da riscrivere l'intergrale di destra come integrale di superficie. Usando le limitazioni

$$-M \le \alpha(x,y) \le \beta(x,y) \le M, \qquad \forall (x,y) \in D,$$

abbiamo che

$$\partial E = \Gamma_z(\alpha, D) \cup \Gamma_z(\beta, D) \cup \Sigma$$

con $\Sigma \subset \partial D \times [-M, M]$. Per i punti di Σ la normale esterna di E è data da

$$\hat{n}_E(x,y,z) = (\hat{n}_D(x,y), 0),$$

$\hat{n}_D$ normale esterna di D, mentre su $\Gamma_z(\alpha, D)$

$$\hat{n}_E(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla\alpha(x,y)\|^2}} (\nabla\alpha(x,y), -1)$$

e su $\Gamma_z(\beta, D)$

$$\hat{n}_E(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla\beta(x,y)\|^2}} (-\nabla\beta(x,y), 1).$$

In definitiva

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} f\hat{n}_E \cdot e_3 d\Sigma &= \int_{\Gamma_z(\beta,D)} f\hat{n}_E \cdot e_3 d\Sigma + \int_{\Gamma_z(\alpha)} f\hat{n}_E \cdot e_3 d\Sigma \\ &= \int_D f(x,y,\beta(x,y))\, dxdy - \int_D f(x,y,\alpha(x,y))\, dxdy.\end{aligned}$$

□

Come nel caso del piano, la validità della formula precedente può essere estesa ad insiemi E per cui ∂E sia regolare a tratti. Si dimostra così il seguente risultato.

Teorema 7.12 (Teorma della divergenza nello spazio) *Sia $F : E \to \mathbb{R}^3$ un campo di classe C^1 con $E \subset \mathbb{R}^3$ insieme limitato tale che ∂E regolare a tratti. Allora*

$$\int_E \mathrm{div} F(x,y,z)\, dxdydz = \int_{\partial E} F \cdot \hat{n}_E \, d\Sigma.$$

Esempio 7.14 Verifichiamo la validità del Teorema della divergenza con il campo

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

e l'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le z \le 1\}.$$

Da una parte abbiamo che $\mathrm{div} F(x,y,z) = 3$ e quindi

$$\int_E \mathrm{div} F(x,y,z)\, dxdydz = 3|E| = 3 \int_{\overline{B}_1} (1 - x^2 - y^2)\, dxdy = \frac{3\pi}{2}.$$

D'altra parte

$$\partial E = \underbrace{\{z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 1\}}_{:=\Sigma_1} \cup \underbrace{\{z = 1, x^2 + y^2 \le 1\}}_{:=\Sigma_2}.$$

Quindi tenendo presente che su Σ_1 la normale esterna ad E è data da

$$\hat{n}_E(x,y,x^2+y^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}(2x, 2y, -1)$$

mentre su Σ_2 è data da

$$\hat{n}_E(x,y,z) = (0,0,1),$$

troviamo che

$$\begin{aligned}
\Phi(F, \partial E) =& \Phi(F, \Sigma_1) + \Phi(F, \Sigma_2) \\
=& \int_{\overline{B}_1} (x, y, x^2 + y^2) \cdot (2x, 2y, -1)\, dxdy + \int_{\overline{B}_1} (x, y, 1) \cdot (0,0,1)\, dxdx \\
=& \int_{\overline{B}_1} (x^2 + y^2 + 1)\, dxdy = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Il Teorema della divergenza può essere usato per ridurre il calcolo di un flusso di un campo ad un integrale triplo se la superficie Σ sulla quale si vuole calcolare il flusso è chiusa, cioè se $\Sigma = \partial E$ per un qualche insieme E. Alle volte può anche essere usato per il calcolo di flussi su superfici non chiuse, nel caso in cui ad esempio la divergenza del campo sia nulla e se unendo alla superficie Σ una seconda superficie Σ_1 si abbia $\Sigma \cup \Sigma_1 = \partial E$ per un qualche insieme E. In tal caso infatti si ha che

$$\Phi(F, \Sigma) = \Phi(F, \Sigma_1);$$

questa osservazione diventa utlie nel caso in cui il calcolo del flusso attraverso Σ_1 sia più semplice di quello del flusso attraverso Σ.

Esempio 7.15 Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (y^2z^2, xz^3, x^2y^3)$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, z \geq 0\}$$

Si nota che $\mathrm{div}F(x,y,z) = 0$ e che se consideriamo

$$\Sigma_1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4\},$$

allora $\Sigma \cup \Sigma_1 = \partial E$ con

$$E = \overline{B}_2^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4, z \geq 0\}.$$

Quindi prendendo come normale a Σ_1 il vettore $\hat{n} = (0,0,1)$, troviamo che

$$\Phi(F,\Sigma) = \Phi(F,\Sigma_1) = \int_{\overline{B}_2} F(x,y,0)\cdot(0,0,1)\,dxdy = 0.$$

Come interessante corollario del Teorema della divergenza abbiamo il seguente risultato.

Teorema 7.13 (Gauß) *Sia* $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ *il campo*

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|}.$$

Allora, dato $E \subset \mathbb{R}^3$ *con* ∂E *regolare a tratti, se* $(0,0,0)$ *non appartiene a* $\overline{E}$, *allora*

$$\Phi(F,\partial E) = 0,$$

se invece $(0,0,0)$ *è interno ad* E

$$\Phi(F,\partial E) = 4\pi$$

se la superficie ∂E *viene orientata usando la normale esterna ad* E.

Dimostrazione. È immediato notare che per $(x,y,z) \neq 0$

$$\mathrm{div}F(x,y,z) = 0;$$

quindi dal Teorema della divergenza

$$\Phi(F,\partial E) = \int_E \mathrm{div}F(x,y,z)\,dxdydz = 0.$$

Se $(0,0,0)$ è interno ad E, il Teorema della divergenza non si può usare su E perchè F non è definita in $(0,0,0)$. Si considera allora l'insieme

$$E_r = E \setminus B_r,$$

con $r > 0$ scelto in modo tale che $B_r \subset E$. Su E_r il Teorema della divergenza si applica e notando che $\partial E_r = \partial E \cup \partial B_r$ e che per i punti di ∂E la normale uscente da E_r coincide con la normale uscente da E e su ∂B_r la normale uscente da E_r coincide con la normale entrante in B_r, troviamo che

$$0 = \int_{E_r} \mathrm{div}F(x,y,z)\,dxdydz = \Phi(F,\partial E_r) = \Phi(F,\partial E) - \Phi(F,\partial B_r).$$

Per quanto visto nell'Esempio 7.10, abbiamo che $\Phi(F,\partial B_r) = 4\pi$, ne deduciamo che

$$\Phi(F,\partial E) = 4\pi.$$

□

Per enunciare il Teorema del rotore nello spazio abbiamo bisogno di introdurre una ulteriore nozione, che è quella di bordo di una superficie in $\mathbb{R}^3$. La definizione rigorosa di bordo è un pó delicata e ne daremo una che è corretta per le superfici che incontreremo in questo corso.

Definizione 7.14 (Bordo di una superficie) *Data una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$; definiamo bordo di Σ, e lo denotiamo con $\partial\Sigma$, l'insieme dei punti $x \in \overline{\Sigma}$ per i quali $\mathrm{Tan}(\Sigma, x) \neq \emptyset$ non è uno spazio vettoriale di dimensione 2.*

La definizione precedente funziona bene per le cosiddette varietà embedded (tralasciamo la definizione). Ci sono altre caratterizzazioni del bordo di una superficie; se ad esempio la superficie è parametrizzata $\Sigma = r(D)$, con $D \subset \mathbb{R}^2$ aperto, allora il bordo $\partial\Sigma$ è contenuto in $\overline{\Sigma} \setminus \Sigma$. Se invece $D \subset \mathbb{R}^2$ è un chiuso e r è iniettiva su tutto D, allora $\partial\Sigma = r(\partial D)$, ottenendo quindi anche una parametrizzazione del bordo di Σ.

Nel caso di superfici che siano globalmente livelli di una funzione regolare $\Sigma = \{g = c\}$, $g : R^2 \to \mathbb{R}$ con $\nabla g(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Sigma$, allora dato che Σ è chiusa, $\partial\Sigma = \emptyset$.

Esempio 7.16 La sfera è una superficie senza bordo in quanto

$$\Sigma = S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Esempio 7.17 La superficie

$$\Sigma = S_1 \cap \{0 \leq z \leq 1\}$$

ha come brodo

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 = 3\}$$

perchè quelli a destra sono gli unici insiemi di punti di $\overline{\Sigma}$ il cui tangente è un semipiano.

Esempio 7.18 La superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

è una superficie con bordo dato da

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Infatti $\Sigma = r(D)$ con $r : \overline{B}_1 \to \mathbb{R}^3$

$$r(t, s) = (t, s, t^2 + s^2);$$

la funzione r è iniettiva su $\overline{B}_1$ e quindi $\partial\Sigma = r(\mathbb{S}^2) = r(\partial B_1)$. Una parametrizzazione di $\partial\Sigma$ è quindi data da

$$r(t) = r(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, 1).$$

Osservazione 7.15 Nella quasi totatlità degli esempio che considereremo il bordo $\partial\Sigma$ di una superficie Σ è costituito da una somma finita di curve regolari a tratti. Quindi, tranne che per un numero finito di punti $x \in \partial\Sigma$, avremo che $\mathrm{Tan}(\Sigma, x)$ sarà un semipiano.

Una superficie orientata Σ induce una orientazione anche su $\partial\Sigma$ nel seguente modo; dato il campo normale $\hat{n}_\Sigma : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ continua, supponendo che tale campo si possa estendere in modo continuo anche a $\overline{\Sigma}$, per i punti $x \in \partial\Sigma$ per i quali $\partial\Sigma \cap B_r(x)$ sia una curva regolare per un opportuno $r > 0$ abbiamo i versori $\hat{n}_\Sigma(x)$ e $v(x) \in \mathrm{Tan}(\Sigma, x)$ scelto in modo che sia ortogonale non solo a $\hat{n}_\Sigma(x)$ ma anche a $\partial\Sigma$ e che punti verso l'esterno di Σ. Definiamo orientazione indotta su $\partial\Sigma$ in modo che la paremtrizzazione r che parametrizza $\partial\Sigma$ attorno ad x sia tale che

$$\hat{\tau}_r(x) = \hat{n}_\Sigma(x) \times v(x).$$

In questo modo avremo che $\{\hat{n}_\Sigma(x), v(x), \hat{\tau}_r(x)\}$ è una terna destrorsa e

$$\mathrm{Tan}(\Sigma, x) = \{\lambda v(x) + \mu \hat{n}_\Sigma(x) : \lambda \leq 0, \mu \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Nor}(\Sigma, x) = \{\lambda v(x) + \mu \hat{n}_\Sigma(x) : \lambda \geq 0, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Definizione 7.16 (Orientazione indotta) *Data una superficie Σ orientabile, denoteremo con $\partial^+\Sigma$ il bordo di Σ orientato con l'orientazione indotta da Σ, e quindi $\partial\Sigma$ la pensiamo parametrizzata in modo tale che per ogni $x \in \partial\Sigma$*

$$\hat{\tau}_r(x) = \hat{n}_\Sigma(x) \times v(x).$$

Esempio 7.19 Nell'Esempio 7.17 abbiamo che $\partial\Sigma$ è l'unione di due circonferenze, una nel piano $z = 0$ ed una in quello $z = 1$. Se orientiamo Σ con la normale uscente dalla sfera di raggio R, allora l'orientazione indotta si ottiene considerando

$$\partial^+\Sigma = r([0, 2\pi]) \cup \tilde{r}([0, 2\pi])$$

con $r, \tilde{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definite da

$$r(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0), \qquad \tilde{r}(t) = (-\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1).$$

In fatti nei punti con $z = 0$ avremo che

$$\hat{n}_\Sigma(x, y, 0) = \frac{1}{2}(x, y, 0),$$

mentre $v(x)$ deve essere un vettore che punta verso il basso e quindi dato da $v(x) = (0, 0, -1)$. Quindi nei punti $(x, y, 0)$ con $x^2 + y^2 = 4$ si deve avere

$$\hat{\tau}_r(x, y, 0) = \frac{1}{2}(x, y, 0) \times (0, 0, -1) = \frac{1}{2}(-y, x, 0);$$

in effetti la parametrizzazione $r(t) = (2\cos, 2\sin t, 0)$ ha la proprietà che

$$\hat{\tau}_r(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = (-\sin t, \cos t, 0) = \frac{1}{2}(-2\sin t, 2\cos t, 0).$$

Nei punti con $z = 1$ invece abbiamo che $(x, y, 1) \in \partial\Sigma$ se e solo se $x^2 + y^2 = 3$ e quindi

$$\hat{n}_\Sigma(x, y, z) = \frac{1}{2}(x, y, 1),$$

mentre

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x, y, -3).$$

Quindi l'orientazione indotta deve avere che

$$\hat{\tau}_r(x,y,1) = \frac{1}{2}(x,y,1) \times \frac{1}{2\sqrt{3}}(-x,-y,3) = \frac{1}{\sqrt{3}}(y,-x,0).$$

La paramtrizzazione $\tilde{r} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\tilde{r}(t) = (-\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1)$$

rispetta questa orientazione.

Esempio 7.20 Nell'Esempio 7.18 il bordo è dato dalla circonferenza di raggio 1 contenuta nel piano $z = 1$; se orientiamo Σ con il campo normale

$$\hat{n}_\Sigma(t,s) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2+4s^2}}(-2t,-2s,1),$$

allora la paramtrizzazione che rispetta l'orientazione indotta è data da $r : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$,

$$r(t) = (-\cos t, \sin t, 1).$$

Una volta data la nozione di bordo e di orientazione indotta sul bordo, possiamo enunciare il Teorema del rotore o di Stokes; omettiamo la sua dimostrazione in quanto delicata.

Teorema 7.17 (Teorema di Stokes o del rotore nello spazio) *Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare orientabile e sia $F : E \to \mathbb{R}^3$ funzione di classe C^1 con $\Sigma \subset E \subset \mathbb{R}^3$. Allora*

$$\Phi(\mathrm{rot}F, \Sigma) = \int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \oint_{\partial^+\Sigma} F \cdot d\vec{r}.$$

Esempio 7.21 Verifichiamo la validità del Teorema di Stokes nel caso di Σ la superficie dell'esercizio 7.17 e $F(x,y,z) = (0,x,z)$. In questo esempio abbiamo $\mathrm{rot}F(x,y,z) = (0,0,1)$ e quindi parametrizzando Σ mediante $r : [\pi/6,\pi/2] \times [0,2\pi] \to R^3$.

$$r(t,s) = (2\sin t\cos s, 2\sin t\sin s, 2\cos t),$$

troviamo che

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{rot}F \cdot n_\Sigma d\Sigma &= \int_{[\pi/6,\pi/2]\times[0,2\pi]} (0,0,1)\cdot(\sin t\cos s, \sin t\sin s, \cos t)4\sin t\, dtds \\ &= \int_0^{2\pi} ds \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4\sin t\cos t dt = \pi.\end{aligned}$$

Per l'integrale di bordo usiamo le parametrizzazioni trovate nell'Esempio 7.19;

$$\begin{aligned}\oint_{\partial^+\Sigma} F\dot{\vec{r}} &= \int_0^{2\pi} F(r(t))\cdot r'(t)dt + \int_0^{2\pi} F(\tilde{r}(t))\cdot \tilde{r}'(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} F(2\cos t, 2\sin t, 0)\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 0)dt + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} F(-\sqrt{3}\cos t, \sqrt{3}\sin t, 1)\cdot(\sqrt{3}\sin t, \sqrt{3}\cos t, 0)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi.\end{aligned}$$

7.6 Formule di Integrazione per parti

Il Teorema della divergenza e del rotore possono essere scritti in ogni dimensione $n \in \mathbb{N}$. Il Teorema della divergenza ha una immediata generalizzazione; se $F : E \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale di classe C^1 e ∂E è regolare a tratti, nel senso che eccetto che per un insieme trascurabile di punti ∂E è una $(n-1)$–varietà regolare, cioè localmente una ipersuperficie, denotando con $d\Sigma$ l'elemento di ipersuperficie $(n-1)$–dimensionale, avremo che

$$\int_E \operatorname{div} F(x)\ dx = \int_{\partial E} F \cdot \hat{n}_E d\Sigma,$$

dove al solito abbiamo denotato con $\hat{n}_E$ la normale esterna ad E. L'integrale di sinistra è quindi un integrale multiplo n–dimensionale, quello di sinistra un integrale di ipersuperficie $(n-1)$–dimensionale. Nel caso particolare in cui il campo F è dato da $F(x) = f(x)G(x)$, con $f : E \to \mathbb{R}$ e $G : E \to \mathbb{R}^n$ funzioni di classe C^1, troviamo che

$$\operatorname{div} F(x) = \operatorname{div}(f(x)G(x)) = \nabla f(x) \cdot G(x) + f(x)\operatorname{div} G(x).$$

Abbiamo quindi le due seguenti formule di integrazione per parti:

$$\int_E f(x)\operatorname{div} G(x)dx = \int_{\partial E} fG \cdot \hat{n}_E d\Sigma - \int_E \nabla f(x) \cdot G(x)dx,$$

e

$$\int_E \nabla f(x) \cdot G(x)dx = \int_{\partial E} fG \cdot \hat{n}_E d\Sigma - \int_E f(x)\operatorname{div} G(x)dx.$$

Se poi ancora supponiamo che $G(x) = \nabla g(x)$ con $g : E \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^2, abbiamo le due formule di integrazione per parti

$$\int_E f(x)\Delta g(x)dx = \int_{\partial E} f\nabla g \cdot \hat{n}_E d\Sigma - \int_E \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)dx,$$

e

$$\int_E \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)dx = \int_{\partial E} fG \cdot \hat{n}_E d\Sigma - \int_E f(x)\Delta g(x)dx.$$

Il Teorema di Stokes nello spazio ci da invece le seguenti formule di integrazione per parti; prendendo $F = fG$ con f e G funzioni di classe C^1, dato che

$$\operatorname{rot}(f(x)G(x)) = \nabla f(x) \times G(x) + f(x)\operatorname{rot} G(x),$$

troviamo che

$$\int_\Sigma \nabla f \times G \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \oint_{\partial^+\Sigma} fG \cdot d\vec{r} - \int_\Sigma f\operatorname{rot} G \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma,$$

o equivalentemente

$$\int_\Sigma f\operatorname{rot} G \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma = \oint_{\partial^+\Sigma} fG \cdot d\vec{r} - \int_\Sigma \nabla f \times G \cdot \hat{n}_\Sigma d\Sigma.$$

Nel caso particolare di $G = \nabla g$ con g funzione di classe C^2, dato che in questo caso

$$\operatorname{rot} G(x) = \operatorname{rot} \nabla g(x) = 0,$$

troviamo che

$$\int_{\Sigma} \nabla f \times \nabla g \cdot \hat{n}_{\Sigma} d\Sigma = \oint_{\partial^+\Sigma} f \nabla g \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial^+\Sigma} g \nabla f \cdot d\vec{r}.$$

La generalizzazione del Teorema di Stokes è un pó più delicata; non si definisce il rotore in dimensione $n > 3$, ma si può enunciare il teorema usando il linguaggio delle forme differenziali. L'enunciato del Teorema di Stokes nel caso generale include anche quello del Teorema della divergenza ed afferma che se Σ è una k–varietà orientabile e regolare a tratti, $k = 1, \ldots, n$, allora denotato con $\partial^+\Sigma$ il bordo di Σ che è in generale una $(k-1)$–varietà orientabile regolare a tratti con orientazione indotta dall'orientazione di Σ, se ω è una $(k-1)$–forma differenziale

$$\int_{\Sigma} d\omega = \int_{\partial^+\Sigma} \omega,$$

dove $d\omega$ è il differenziale della forma ω ed è una k–forma differenziale. Per i dettagli su questo argomento rimandiamo ad esempio a [5].

7.7 Campi vettoriali e campi conservativi

In questa sezione studiamo le proprietà dei campi vettoriali $F : E \to \mathbb{R}^n$, con $E \subset \mathbb{R}^n$.

Abbiamo la seguente proposizione che useremo per dare la definizione di campo conservativo.

Proposizione 7.18 *Sia $F : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua con $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto.. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *esiste $U : E \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1 t.c. $F(x) = \nabla U(x)$ per ogni $x \in E$;*
2. *per ogni curva chiusa $r : [a, b] \to \mathbb{R}$ regolare a tratti con $ra, b \subset E$,*

$$\oint_r F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt = 0;$$

3. *per ogni curva $r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{r} : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ regolari a tratti con $r[a, b] \subset E$, $\tilde{r}[c, d] \subset E$ e $r(a) = \tilde{r}(c)$, $r(b) = \tilde{r}(d)$,*

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{r}} F \cdot d\vec{\tilde{r}}.$$

Dimostrazione.

1.⇒2. Dato che $F = \nabla U$, allora dalla formula di derivazione della funzione composta troviamo che

$$F(r(t)) \cdot r'(t) = \nabla U(r(t)) \cdot r'(t) = \frac{d}{dt} U(r(t)),$$

e quindi

$$\oint_r F \cdot \vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}(U(r(t)))dt = U(r(b)) - U(r(a)) = 0$$

dato che r è chiusa e quindi $r(a) = r(b)$.

2.⇒3. Date le due curve r e $\tilde{r}$, consideriamo la curva chiusa $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} r(a + 2t(b-a)) & t \in [0, 1/2] \\ \tilde{r}(d + (1-2t)(d-c)) & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

La curva γ è regolare a tratti, $\gamma(0) = r(a) = \tilde{r}(d) = \gamma(1)$, cioè γ è chiusa. Quindi

$$\begin{aligned} 0 = \oint_\gamma F \cdot d\vec{\gamma} = & \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ = & 2(b-a) \int_0^{1/2} F(r(a + 2t(b-1))) \cdot r'(a + 2t(b-1)) dt - 2 \int_{1/2}^1 F(\tilde{r}(d + (1-2t)(d-c))) dt \\ = & \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) dt - \int_c^d F(\tilde{r}(t)) \cdot \tilde{r}'(t) dt, \end{aligned}$$

come si deduce grazie ai due cambi di variabili $s = a + 2t(b-a)$ e $s = d + (1-2t)(d-c)$. Quindi

$$\int_r F \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{r}} F \cdot d\vec{\tilde{r}}.$$

3.⇒1. Iniziamo col supporre E connesso per archi; si fissa $x_0 \in E$ e si definisce la funzione U ponendo

$$U(x) = \int_r F \cdot d\vec{r},$$

con r una qualsiasi curva contenuta in E che connette x_0 con x; supponiamo di avere quindi r nella forma $r : [0,1] \to E$ con $r(0) = x_0$ e $r(1) = x$. La definizione di U è ben posta grazie all'ipotesi. Dimostriamo che $F = \nabla U$; fissato $e_i \in \mathbb{S}^{n-1}$, come curva che connette x_0 con $x + he_i$ prendiamo la curva $\gamma : [0,2] \to E$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} r(t) & t \in [0,1] \\ x + (t-1)he_i & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Dato che E è aperto e $x \in E$, per h sufficientemente piccolo $x + t - 1he_i \in E$ per ogni $t \in [1,2]$. Troviamo quindi che

$$\begin{aligned} \frac{U(x + he_i) - U(x)}{h} = & \frac{1}{h} \left(\int_\gamma F d\vec{\gamma} - \int_r F d\vec{r} \right) \\ = & \frac{1}{h} \int_1^2 F(x + (t-1)he_i) \cdot he_i dt = \int_1^2 F(x + (t-1)he_i) \cdot e_i dt. \end{aligned}$$

Grazie alla continuità di F, passando al limite per $h \to 0$ troviamo quindi che

$$\exists \frac{\partial}{\partial x_i} U(x) = \lim_{h \to 0} \int_1^2 F(x + (t-1)he_i) \cdot e_i dt. = F_i(x).$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\nabla U = F$ nel caso E connesso per archi. Il caso generale si tratta scrivendo

$$E = \bigcup_{i \in I} E_i$$

con E_i insiemi connessi per archi, $I \subset \mathbb{N}$ e fissando al posto di x_0 un punto x_i in ogni insieme E_i.

□

Siccome tra le tre condizioni precedenti quella che solitamente è più facile da verificare è la prima, diamo la seguente definizione.

Definizione 7.19 (Campi conservativi) *Un campo continuo $F : E \to \mathbb{R}^n$ si dice conservativo se esiste una funzione $U : E \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $F = \nabla U$.*

Osservazione 7.20 La funzione U viene chiamata potenziale del campo F ed è importante notare che per avere un campo conservativo F e U devono essere definiti sullo stesso insieme. Le caratterizzazioni equivalenti date dalla Proposizione 7.18 vengono solitamente usate quando non si riesce a determinare un potenziale per F, cercando di dimostrare che in tal caso allora il campo non è conservativo. Solitamente basta trovare un cammino chiuso contenuto in E la cui circuitazione non è nulla. Notiamo infine che il potenziale, se esiste, non è mai unico perchè anche $U(x)+c$, $c \in \mathbb{R}$ è un potenziale per F.

Esempio 7.22 Verifichiamo se il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

è conservativo o meno. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; cerchiamo U tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} U(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} U(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione rispetto ad x si trova che

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + c(y),$$

con $c(y)$ funzione che può dipendere da y ma non da x. Imponendo la seconda equazione si trova che $c'(y) = 0$, e quind

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Tale funzione ha lo stesso dominio di F, pertanto F è conservativo.

Esempio 7.23 Verifichiamo se il campo

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

è conservativo o meno. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; procedendo come nell'esempio precedente, troviamo che un potenziale può essere dato da

$$U(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

oppure da

$$U(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Il primo potenziale è definito per $\{x \neq 0\}$, mentre il secondo per $\{y \neq 0\}$, pertanto visto che i domini non sono quelli di F, non possiamo concludere che F sia conservativo. Al momento in realtà neanche che F non lo sia; sarà conservativo nei due insiemi $\{x \neq 0\}$ e $\{y \neq 0\}$ dato che in tali insiemi abbiamo trovato i potenziali. Per vedere se il campo è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ prendiamo un cammino chiuso che non sia contenuto in $\{x \neq 0\}$ o in $\{y \neq 0\}$; prendiamo ad esempio la circonferenza $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (\cos t, \sin t)$. Su tale cammino si ha che

$$\oint_r F \cdot d\vec{r} = 2\pi,$$

quindi il campo non può essere conservativo.

Osservazione 7.21 Notiamo che nel caso $n = 2$ e $n = 3$, se $F = \nabla U$, allora

$$\mathrm{rot}F = \mathrm{rot}\nabla U = 0.$$

Quindi condizione necessaria per la conservatività di un campo è che il campo stesso sia irrotazionale, cioè $\mathrm{rot}F = 0$. Questa condizione diventa anche sufficiente se si può applicare il Teorema del rotore; il poter avere irrotazionalità condizione sufficiente per la conservatività diventa una condizione sull'insieme E. La condizione si può enunciare dicendo che per ogni cammino chiuso contenuto in E esiste una superficie il cui bordo sia il cammino dato. Tale condizione su E viene chiamata semplice connessione di E. Esempi di insiemi semplicemente connessi sono gli insiemi convessi e più in generale gli insiemi stellati. Non è semplicemente connesso ad esempio l'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$, mentre è semplicemente connesso $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Abbiamo quindi il seguente risultato.

Teorema 7.22 *Sia $F : E \to \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ un campo di classe C^1 con E semplicemente connesso. Allora F è conservativo se e solo se* $\mathrm{rot}F = 0$.

Esempio 7.24 Il campo $F(x, y, z) = (0, x, z)$ non è conservativo in quanto $\mathrm{rot}F(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Il campo

$$F(x, y, z) = (yz + ye^z, xz + xe^z, xye^z + \cos z)$$

è conservativo perchè $\mathrm{rot}F = 0$ e il suo dominio è il convesso $\mathbb{R}^3$.

Bibliografia

[1] M.Bertsch, R.Dal Passo, L.Giacomelli. *Analisi matematica.* McGraw-Hill Education, 2014.

[2] M.Bramanti, S.Pagani, C.D. Salsa. *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare.* Zanichelli, 2004.

[3] M.Bramanti, S.Pagani, C.D. Salsa. *Analisi Matematica 2.* Zanichelli, 2009.

[4] E.Giusti. *Analisi Matematica vol 2.* Progr. Matem. Fisica Elettronica. Boringhieri, 2003.

[5] P.M.Morse, H.Feshbach. *Stokes Theorem* In Methods of Theoretical Physics, Part I. New York: McGraw-Hill, p. 43, 1953.