Nel presente fascicolo sono raccolti gli appunti del corso di Analisi Matematica 2 dal Corso di Laurea Triennale di Ingegneria Civile e Ambientale dell'Università di Ferrara.

Il materiale contenuto in queste note vuole essere semplicemente una guida relativa agli argomenti trattati durante il corso; è inevitabilmente incompleto, così come è inevitabile che siano presenti errori ed inesattezze. Non si risponde tuttavia degli errori che possono essere contenuti in questo fascicolo, in quanto è cura del lettore rilevare e segnalare eventuali imprecisioni.

I presenti appunti non hanno la pretesa di sostituire un buon libro di testo, che resta indispensabile per acquisire una conoscenza dignitosa della materia. Viene fornita in bibliografia una lista di testi che si ritengono validi per lo studio della materia. La funzione di questi appunti è piuttosto quella di facilitare gli studenti e indicare loro il bagaglio *minimo* di conoscenze richieste per affrontare l'esame. Si consiglia pertanto sempre di studiare sui testi di Analisi Matematica esistenti in letteratura, sicuramente più affidabili e corretti; fortunatamente le biblioteche dei nostri Atenei sono molto buone e ben fornite di ottimi testi. Tra i vari testi disponibili consigliamo sicuramente il testo [3] o la sua edizione precedente [2]; un altro ottimo testo è [5]

Si consiglia infine di prestare attenzione alla data di aggiornamento della presente dispensa, in quanto è possibile che alcune parti vengano corrette ed integrate durante il corso.

Michele Miranda
Ferrara, 9 dicembre 2019

Indice

Capitolo 9

Equazioni differenziali

Un'equazione differenziale è una espressione del tipo

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t), \ldots) = 0,$$

la cui incognita è una funzione $y(t)$ che appare nell'equazione assieme alle sue derivate. Si parla di equazione differenziale di ordine n un'equazione del tipo

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0.$$

Nella precedente espressione, la variabile t viene detta variabile indipendente, mentre la y viene detta variabile dipendente La forma precedente si chiama forma implicita dell'equazione differenziale, mentre si parla di equazione in forma esplicita o in forma normale quando l'equazione differenziale si presenta nella forma

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)).$$

Una soluzione sarà una funzione $u : I \to R$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ e u derivabile n volte per la quale

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)), \qquad \forall t \in I.$$

Infine, per insieme delle soluzioni si intende l'insieme di tutte le funzioni n volte derivabili che sono soluzione dell'equazione differenziale e si dirà integrale generale di una equazione differenziale una espressione che riassuma tutte le soluzioni.

Le applicazioni principali delle equazioni differenziali vengono dalla fisica, dalle scienze naturali, dalla biologia, d alla finanza, ecc. Ad esempio, una delle formule più importanti della fisica è data dall'equazione di Newton $F = ma$, dove in generale la forza sarà un campo vettoriale di forze $\vec{F}$ e l'accelerazione è data dalla derivata seconda rispetto al tempo della funzione posizione $x(t)$. L'equazione di Newton si puó quindi riscrivere $mx''(t) = F$, che è un'equazione differenziale del secondo ordine (la maggior parte delle equazioni provenienti dalla fisica sono del secondo ordine), con la forza F che può essere in generale funzione del tempo t, della posizione $x(t)$ e della velocità $x'(t)$. Come casi particolari si hanno:

1. caduta di un grave in un campo gravitazionale costante $F = mg$, dove il problema diventa uni–dimensionale, moto lungo la verticale soggetto alla legge $x''(t) = g$; il suo integrale generale, ottenuto con una doppia integrazione, è dato da

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2;$$

2. equazione dell'oscillatore armonico, in cui la forza F dipende dalla posizione:
$$F = -mkx(t),$$
dove $k > 0$ è la costante elastica; il moto è governato dall'equazione
$$x''(t) = -kx(t),$$
il cui integrale generale, come vedremo nel paragrafo 9.3.2, è dato da
$$x(t) = c_1 \cos \sqrt{k}t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{k}t;$$

3. equazione dell'oscillatore armonico smorzato, in cui compare anche la forza di attrito, proporzionale alla velocità, cioè $F = -mkx(t) - \mu x'(t)$; in tal caso l'equazione di Newton diventa
$$x''(t) = -kx(t) - \frac{\mu}{m}x'(t),$$
il cui integrale generale è dato da
$$x(t) = c_1 e^{\frac{-\mu+\sqrt{\mu^2-m^2k^2}}{2m}t} + c_2 e^{\frac{-\mu-\sqrt{\mu^2-m^2k^2}}{2m}t}$$
se $\mu > mk$, altrimenti
$$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(c_1 \cos \frac{t}{2m}\sqrt{m^2k^2-\mu^2} + c_2 \operatorname{sen} \frac{t}{2m}\sqrt{m^2k^2-\mu^2}\right);$$

4. in generale il campo di forze potrà dipendere anche dal tempo, come ad esempio avviene per una particella carica che si muove in un campo elettro–magnetico variabile (fenomeni della risonanza magnetica).

Si noti che negli esempi presentati, nell'integrale generale ci sono sempre due costanti ad indicare che per l'insieme delle soluzioni ci sono sempre due gradi di libertà; questo, come vedremo, dipende dal fatto che stiamo considerando equazioni del secondo ordine.

9.1 Teoria generale delle equazioni differenziali

Raccogliamo in questa sezione i risultati principali sulla teoria delle equazioni differenziali. Ci preoccupiamo soprattutto di dare condizioni sulla funzione f che garantiscano l'esistenza e l'unicità delle soluzioni. Facciamo alcune considerazioni preliminari per capire meglio il problema dell'unicità delle soluzioni.

L'equazione differenziale più semplice che si può presentare è l'equazione che esprime la ricerca della primitiva di una funzione continuta $f : J \to \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$:
$$y'(t) = f(t).$$
Mediante integrazione indefinita, questo problema si risolve arrivando alla soluzione
$$y(t) = \int f(t)dt + c$$

con $c \in \mathbb{R}$ una costante. Di soluzioni se ne trovano quindi infinite, tutte che differiscono tra loro a meno della costante c. Se però tra le soluzioni trovate cerchiamo quella che in un fissato istante $t_0 \in J$ assume un determinato valore $y_0 \in \mathbb{R}$, allora la soluzione è univocamente determinata dall'integrale definito

$$u(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds,$$

per ogni $t \in I$ con $I \subset J$ intervallo che contiene t_0. Allo stesso modo se cerchiamo le soluzioni del problema

$$y''(t) = f(t),$$

mediante un doppio integrale indefinito troviamo che la soluzione è data da

$$y(t) = \int \int f(t)dt + c_1 t + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R};$$

abbiamo quindi ancora infinite soluzioni con grado di infinito espresso dalle due costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione diventa unica se imponiamo per un fissato $t_0 \in J$ il valore sia della funzione che della sua derivata, cioè $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$. In tal caso la soluzione si trova con un doppio integrale definito

$$u(t) = y_0 + y'_0(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} ds \int_{t_0}^{s} f(\tau)d\tau,$$

per ogni $t \in I$ dove $I \subset J$ è un intervallo che contiene t_0.

Notiamo inoltre che una equazione differenziale di ordine n può essere riscritta come equazione differenziale del primo ordine vettoriale. Infatti se

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)),$$

definendo il vettore

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots, v_n(t)) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)),$$

allora

$$v'(t) = (y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = (v_2(t), v_3(t), \ldots, f(t, v(t))) := \vec{f}(t, v(t)).$$

Le condizioni iniziali, cioè la richiesta che per un dato istante t_0 si abbiamo che

$$y(t_0) = y_0, \qquad , y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

si riscrivono in forma vettoriale

$$v(t_0) = v_0, \qquad v_0 = (y_0, \ldots, y_0^{(n-1)}).$$

Introduciamo quindi la seguente definizione.

Definizione 9.1 (Problema di Cauchy) *Data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^{k+1}$ aperto, sI parla di Problema di Cauchy la ricerca della soluzione $u : I \to \mathbb{R}^k$ del seguente sistema:*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{9.1}$$

Per avere esistenza delle soluzioni del Problema di Cauchy è sufficiente la continuità della funzione f. Abbiamo infatti il seguente risultato.

Teorema 9.2 (Peano) *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ funzione continua con $\Omega \subset \mathbb{R}^{k+1}$ aperto; allora per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$, esiste un intervallo aperto I contenente t_0 e $u : I \to \mathbb{R}^k$ funzione di classe C^1 con $\Gamma(u, I) \subset \Omega$ soluzione del Problema di Cauchy* (9.1).

Non dimostriamo il precedente Teorema in quanto ne dimostreremo uno più particolare; osserviamo solo che l'equazione

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

ci dice che se f è di classe C^1, allora dato che anche u è di classe C^1, in realtà troviamo che u è di classe C^2 in quanto $t \mapsto f(t, u(t))$ è di classe C^1. Abbiamo così il seguente risultato di regolarità.

Teorema 9.3 *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ una funzione di classe C^h con $\Omega \subset \mathbb{R}^{k+1}$ aperto. Allora le soluzioni del Problema di Cauchy* (9.1) *sono di classe C^{h+1}.*

La sola continuità di f non basta a garantire l'unicità della soluzione. Si pensi al seguente esempio.

Esempio 9.1 Si risolva il seguente Problema di Cauchy;

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t)^{3/2} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Chiaramente la funzione $y(t) \equiv 0$ è soluzione, ma anche la funzione $y(t) = t^3$ lo è. Tale soluzione, che è nulla solo per $t = 0$, si trova dividendo l'equazione per $3y^{3/2}$

$$\frac{d}{dt}(y(t)^{1/3}) = \frac{y'(t)}{3y(t)^{2/3}} = 1,$$

e si conclude quindi integrando.

Il problema nell'esempio precedente è che la funzione $f(t, y) = 3y^{2/3}$ ha la derivata rispetto ad y

$$\frac{\partial}{\partial y} f(t, y) = 2y^{-1/3}$$

che non è limitata per $y \to 0$. Vederemo ora che se invece tale derivata è limitata, allora la soluzione è unica.

Teorema 9.4 (Esistenza e unicità per il Problema di Cauchy) *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ una funzione continuta con $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ aperto. Supponiamo che f sia localmente Lipschitz nella variabile y, cioè che per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste $L_K > 0$ tale che per ogni $(t, y_1), (t, y_2) \in K$*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \le L_K \|y_1 - y_2\|.$$

Allora, per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$ esiste un intervallo aperto I contenente t_0 e $u : I \to \mathbb{R}^k$ funzione di classe C^1 con $\Gamma(u, I) \subset \Omega$ unica soluzione del Problema di Cauchy (9.1).

Dimostrazione. Dimostriamo intanto l'esistenza della soluzione; fissiamo il compatto $K \subset \Omega$ e (t_0, y_0) interni a K. Osserviamo che u è soluzione di (9.1) se e solo se

$$u(t) = \underbrace{y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds}_{:=Tu(s)}.$$

Cerchiamo pertanto una funzione u tale che $u = Tu$ e per questo costruiamo una successione di funzioni nel seguente modo; si pone $u_0(t) = y_0$ e per $h \geq 1$

$$u_h(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{h-1}(s))ds.$$

Omettiamo la dimostrazione l'esistenza di $\varepsilon > 0$ tale che per $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ allora $(t, u_h(t)) \in K$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e dimostriamo invece che

$$\|u_h(t) - u_{h-1}(t)\| \leq M \frac{L_K^{h-1}|t - t_0|^h}{h!}$$

dove

$$M = \max_{(t,y)\in K} \|f(t, y)\|.$$

Si procede per induzione; supponendo $t > t_0$, la base è data da

$$\|u_1(t) - u_0(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)ds \right\| \leq \int_{t_0)}^{t} \|f(s, y_0)\|ds \leq M|t - t_0|.$$

Inoltre, supponendo

$$\|u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq M \frac{L_K^{h-1}|t - t_0|^h}{h!}$$

possiamo dare una stima di $\|u_{h+1}(t) - u_n(t)\|$:

$$\begin{aligned}
\|u_{h+1}(t) - u_h(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, u_h(s)) - f(s, u_{h-1}(s)ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, u_h(s)) - f(s, u_{h-1}(s))\|ds \\
&\leq L_K \int_{t_0}^{t} \|u_h(s) - u_{h-1}(s)\|ds \\
&\leq L_K \int_{t_0}^{t} M \frac{L_K^{h-1}(s - t_0)^h}{h!} ds = M \frac{L_K^h|t - t_0|^{h+1}}{(h + 1)!}.
\end{aligned}$$

La serie dii funzioni

$$\sum_{h=1}^{\infty} (u_h(t) - u_{h-1}(t))$$

è quindi uniformemente convergente per $t \in I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, e quindi la successione di funzioni

$$v_n(t) = \sum_{h=1}^{n} (u_h(t) - u_{h-1}(t)) = u_n(t) - y_0$$

converge uniformemente ad una funzione $v : I \to \mathbb{R}^k$. Quindi la successione $\{u_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su I alla funzione $u(t) = v(t) + y_0$. La stima

$$\|f(s, u_h(s)) - f(s, u(s))\| \leq L_K\|u_h(s) - u(s)\|$$

implica la convergenza uniforme della successione $\{f(s, u_h(s))\|_{h\in\mathbb{N}}$ alla funzione $f(s, u(s))$. Grazie al Teorema di passagio al limite sotto al segno di integrale per convergenza uniforme troviamo quindi che

$$u(s) = \lim_{h\to+\infty} u_h(s) = y_0 + \lim_{h\to+\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, u_{h-1}(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds,$$

e quindi $u : I \to \mathbb{R}^k$ è soluzione del Problema di Cauchy su I. □

Per dimostrare l'unicità delle soluzionii serve il seguente risultato.

Lemma 9.5 (Gronwall) *Sia $v : I \to [0, +\infty)$ una funzione continua; se esistono $a, b > 0$ tali che*

$$v(t) \le a + b\int_{t_0}^t v(s)ds, \qquad \forall t_0, t \in I,$$

allora

$$v(t)] \le ae^{b(t-t_0)}, \qquad \forall t_0, t \in I.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$w(t) = a + b\int_{t_0}^t v(s)ds;$$

siccome

$$w'(t) = bv(t) \le b\left(a + b\int_{t_0}^t v(s)ds\right) = bw(t).$$

Siccome $w(t) > 0$, dividendo per w si trova che

$$\frac{d}{dt}\ln w(t) = \frac{w'(t)}{w(t)} \le b,$$

da cui integrando tra t_0 e t

$$\ln w(t) - \ln w(t_0) \le b(t - t_0),$$

cioè

$$w(t) \le ae^{b(t-t_0)}.$$

Il risultato segue notando semplicemente che $v(t) \le w(t)$. $\square$

Veniamo ora alla dimostrazione dell'unicità delle soluzioni.

Dimostrazione. Per dimostrare l'unicità delle soluzioni, si supponga esistano due funzioni $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}^k$ che soddisfano lo stesso problema di Cauchy e si consideri la differenza

$$v(t) = \|u_1(t) - u_2(t)\|;$$

si ottiene che, per $t > t_0$,

$$\begin{aligned} v(t) =&|u_1(t) - u_2(t)| \le \int_{t_0}^t \|f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\|ds \le L_K\int_{t_0}^t \|u_1(s) - u_2(s)\|ds \\ =&L_K\int_{t_0}^t v(s)ds. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che per ogni $\varepsilon > 0$

$$v(t) \le \varepsilon + L_K\int_{t_0}^t v(s)ds;$$

grazie al Lemma di Gronwall allora

$$v(t) \le \varepsilon e^{L_K(t-t_0)}, \qquad \forall t_0, t \in I.$$

Passando al limite $\varepsilon \to 0$ troviamo quindi $v(t) \equiv 0$ per $t \in I$ e quindi $u_1(t) = u_2(t)$ per ogni $t \in I$. $\square$

Funzioni che soddisfano la condizione Lipschitz sono funzioni $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ per cui $J_y f(t, y)$, matrice Jacobiana di f costruita con le derivate rispetto alle varabili y, è continua.

Abbiamo dimostrato l'esistenza locale di una soluzione per ogni $(t_0, y_0) \in \Omega$; l'esistenza è stata data nel precedente teorema per $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Ci si può chiedere quanto l'intervallo I può essere grande. Introduciamo la nozione di soluzione massimale.

Definizione 9.6 (Soluzione massimale) *Supponiamo di avere due soluzioni del Problema di Cauchy* (9.1) *$u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^k$, $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^k$ con $t_0 \in I_1 \cap I_2$; si dice che u_2 è una estensione di u_1 se $I_1 \subset I_2$. L'unicità delle soluzioni ci dice che per $t \in I_1$, $u_1(t) = u_2(t)$. Una funzione $u : I \to \mathbb{R}^k$ viene detta soluzione massimale del Problema di Cauchy* (9.1) *se ogni altra soluzione $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^k$ è tale che $I_1 \subset I$.*

La soluzione massimale è sempre definita in un intervallo aperto I; infatti se ad esempio si avesse che $I = [t_0, T]$, allora $(T, u(T)) \in \Omega$ e potremmo applicare il Teorema di esistenza e unicità partendo da $(T, u(T))$ e trovare una soluzione anche in $[t_0, T + \varepsilon)$. Il seguente esempio mostra che anche nel caso in cui $\Omega = I \times A$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $A \subset \mathbb{R}^k$ aperto, non è detto che la soluzione massimale sia definita in tutto l'intervallo I.

Esempio 9.2 Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = -2ty(t)^2 \\ \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

e consideriamo i casi particolare $y_0 = 1$ e $y_0 = -1$. Notiamo che la funzione $f(t, y) = -2ty^2$, definita in tutto $\mathbb{R}^2$, è sicuramente localmente Lipschitz in quanto

$$\frac{\partial}{\partial y} f(t, y) = -4ty.$$

Quindi fissati y_1, y_2 e $t \in [a, b]$ chiuso e limitato, possiamo porre

$$L_K = 4 \max\{|a|, |b|, |y_1|, |y_2|\}$$

per trovare che

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} f(t, y) \right| \leq L_K, \qquad \forall t \in [a, b], y \in [y_1, y_2].$$

Ne deduciamo quindi che

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| = \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} f(t, y) dy \right| \leq L_K |y_2 - y_1|.$$

Quindi per ogni scelta di punti $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ possiamo applicare il teorema di esistenza e unicità. Siccome la funzione $u(t) \equiv 0$ è soluzione del Problema di Cauchy con $y_0 = 0$, ne deduciamo che ogni soluzione u del di Cauchy con $y_0 \neq 0$ è sempre diversa da zero. Se infatti esistesse t_1 per cui $u(t_1) = 0$, considerando il Problema di Cauchy con istante iniziale t_1 avremmo due soluzioni, quella nulla e u. Dividendo l'equazione per $-y^2$ possiamo riscrivere

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{y(t)} = -\frac{y'(t)}{y(t)^2} = 2t.$$

Integrando troviamo quindi che per $y_0 = 1$ la soluzione è data da

$$y(t) = \frac{1}{t^2 + 1},$$

mentre per $y_0 = -1$ la soluzione è data da

$$y(t) = \frac{1}{t^2 - 1}.$$

La prima soluzione è definita in $\mathbb{R}$, mentre la seconda in $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$; siccome l'unico intervallo che contiene 0 in questo caso è $(-1, 1)$, ne dediciamo che la soluzione massimale per $y_0 = -1$ è data da $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$.

Abbiamo il seguente risultato.

Proposizione 9.7 (Esistenza globale) *Sia $\Omega = I \times \mathbb{R}^k$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ continua e localmente Lipschitz in y. Se esistono due punzioni continue $p, q : I \to [0, +\infty)$ per cui*

$$\|f(t, y)\| \le p(t) + q(t)\|y\|, \qquad \forall t \in I, y \in \mathbb{R}^k,$$

allora tutte le soluzioni massimali sono definite in tutto I.

Dimostrazione. Supponiamo che l'intervallo di definizione della soluzione massimale non coincida con I. Ci concentriamo sugli istanti $t > t_0$ essendo la dimostrazione del caso $t < t_0$ analoga. Supponiamo quindi di avere $u : [t_0, \beta) \to \mathbb{R}^k$ soluzione del Problema di Cauchy e scriviamo $I = (a, b)$ con $\beta < b$. Le funzioni $p, q : [t_0, \beta] \to [0, +\infty)$ sono continue e quindi limitate; poniamo

$$M = \sup_{t \in [t_0, \beta]} \max\{p(t), q(t)\}.$$

Allora si ottiene che

$$\begin{aligned}\|u(t)\| = &\left\| u(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, u(s))ds \right\| \le \|u(t_0)\| + \int_{t_0}^t \Big(p(s) + q(s)\|u(s)\| \Big) ds \\ \le &\|u(t_0)\| + M(\beta - t_0) + M \int_{t_0}^t \|u(s)\|ds = a + b\int_{t_0}^t \|u(s)\|ds\end{aligned}$$

con

$$a = \|u(t_0)\| + M(\beta - t_0), \qquad b = M.$$

Grazie al Lemma di Gronwall, se ne deduce che

$$\|u(t)\| \le a e^{b(\beta - t_0)}, \qquad \forall t \in [t_0, \beta).$$

Pertanto u è limitata. Inoltre se $\{t_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione conergente a β, allora se $t_h < t_k$, allora

$$\|u(t_h) - u(t_k)\| = \left\| \int_{t_h}^{t_k} f(s, u(s))ds \right\| \le \int_{t_h}^{t_k} \Big(p(s) + q(s)\|u(s)\| \Big) ds \le M(1 + a e^{b(\beta - t_0)})(t_k - t_h).$$

Quindi la successione $\{u(t_h)\}_{h \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi convergente; esiste quindi il limite

$$u(t) := \lim_{h \to \infty} u(t_h),$$

cioè la funzione può essere estesa continua nell'intervallo $[t_0, \beta]$, contraddicendo la condizione di massimalità. □

Chiudiamo questa sezione col seguente risultato, che mostra come le soluzioni dipendono in modo continuo dai dati iniziali.

Teorema 9.8 (Dipendenza continua dai dati) *Supponiamo di avere due funzioni continue $f, \bar{f} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ localmente Lipschitz e $(t_0, y_0), (t_0, \bar{y}_0) \in \Omega$ tali che $\|y_0 - \bar{y}_0\| < \varepsilon$. Allora se*

$$\sup_{(t,y) \in \Omega} \|f(t, y) - \bar{f}(t, y)| < \varepsilon,$$

dette $u : I \to \mathbb{R}^k$ e $\bar{u} : \bar{I} \to \mathbb{R}^k$ le due soluzioni massimali, per $t_0 < T \in I \cap \bar{I}$ vale la stima

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\| \le \varepsilon(1 + (T - t_0))e^{L_f(t - t_0)}, \qquad \forall t \in [t_0, T]$$

dove L_f è la costante di Lipschitz locale di f.

Dimostrazione. Basta calcolare

$$\begin{aligned}\|u(t) - \bar{u}(t)\| \le &\|y_0 - \bar{y}_0\| + \int_{t_0}^t \left(\|f(s, u(s)) - f(s, \bar{u}(s))\| + \|f(s, \bar{u}(s)) - \bar{f}(s, \bar{u}(s))\| \right) ds \\ \le &\varepsilon + \varepsilon(T - t_0) + L_f \int_{t_0}^t \|u(s) - \bar{u}(s)\|ds.\end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Gronwall si ottiene quindi il risultato. □

Una volta studiata la teoria generale delle equazioni differenziali e soprattutto dimostrato sotto quali ipotesi si ha esistenza e unicità delle soluzioni, il resto del capitolo è la presentazioni di metodi per la determinazione delle soluzioni a seconda della tipologia di equazione differenziale.

9.2 Equazioni del primo ordine

Vediamo ora alcuni esempi di equazioni differenziali del primo ordine, cioè di equazioni del tipo

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

9.2.1 Equazione di Malthus

L'equazione di Malthus, nota anche come equazione della dinamica delle popolazioni o dell'interesse bancario, si ottiene nel seguente modo. Se ad un dato istante t si è in possesso di un capitale $y(t)$, dopo h giorni tale capitale verrà incrementato di una percentuale p (l'interesse bancario) del capitale stesso moltiplicato per il numero di giorni h in cui il capitale resta depositato in banca. In formule:

$$y(t + h) = y(t) + py(t)h.$$

Se tale incremente venisse calcolato istantaneamente, si avrebbe la possibilità di considerare il limite per $h \to 0$ ottenendo quindi l'equazione

$$py(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t + h) - y(t)}{h} = y'(t).$$

Questa è quindi una equazione differenziale del primo ordine con $f(t, y) = py$, $p \in \mathbb{R}$ constante. La funzione f è continua e definita in tutto $\mathbb{R}^2$, lineare e quindi Lipschitz nella variabile y. Pertanto si può applicare il Teorema di esistenza e unicità e anche il Teorema di esistenza globale.

Per trovare soluzioni a tale equazioni, si nota anzitutto che $y(t) = 0$ è una soluzione, mentre se y è non nulla, si può dividere per $y(t)$ ed ottenere

$$p = \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{d}{dt} \ln |y(t)|,$$

da cui $|y(t)| = e^{pt+c} = e^c e^{pt} = ce^{pt}$ con l'ultima costante $c > 0$. Eliminando il valore assoluto si ottengono quindi le soluzioni $y(t) = ce^{pt}$ con $c \in \mathbb{R}$ (includendo anche il valore 0 che già avevamo considerato all'inizio della discussione). Se si fissa per $t = t_0$ il capitale $y(t_0) = y_0$, si arriva alla soluzione

$$u(t) = y_0 e^{p(t-t_0)}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

9.2.2 Equazioni a variabili separabili

Gli esempi di equazioni differenzialii incontrati finora rientrano nella categoria delle equazioni a variabili separabili, cioè equazioni della forma

$$y'(t) = f(t, y(t)) = a(t)b(y(t)),$$

con $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : J \to \mathbb{R}$ funzioni continue. L'esistenza delle soluzioni mediante il Teorema di Peano 9.2 si ha grazie alla continuità delle funzioni a e b, mentre per l'unicità, per poter usare il Teorema (9.4) serve richiedere che b sia localmente Lipshitz, cioè che per ogni $K \subset J$ compatto esista $L_K > 0$ talc che $|b(y_1) - b(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$, $y_1, y_2 \in K$; tale condizione è ad esempio soddisfatta quando b è derivabile con derivata continua, avendosi come L_K il massimo del modulo della derivata di b sul compatto K.

Per ricavare le soluzioni di una equazione a variabili separabili si procede come segue;

1. si cercano anzitutto gli zeri di b; infatti, se $y_0 \in J$ è tale che $b(y_0) = 0$, allora la funzione costante $u(t) = y_0$ è una soluzione, detta soluzione stazionaria;

2. sotto la condizione $b(y) \neq 0$, si divide per $b(y)$ ottenendo

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t).$$

   Quindi, se A denota una primitiva di a e B una primitiva di $\frac{1}{b}$, con una integrazione si ottiene

$$B(y(t)) = A(t) + c$$

   con $c \in \mathbb{R}$. Tale formula fornisce la soluzione generale in forma implicita; se B è invertibile e se la sua inversa è nota, si può ottenere la soluzione in forma esplicita tramite

$$y(t) = B^{-1}(A(t) + c).$$

Esempio 9.3 Si consideri l'equazione $y' = 2t\sqrt{1 - y^2}$; $y(t) = \pm 1$ s sono le soluzioni stazionarie; nel caso $y \neq \pm 1$, si ottiene

$$\frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}} = 2t$$

da cui

$$\operatorname{arcsen}(y(t)) = t^2 + c.$$

Notiamo che, visto che il codominio di arcsen è l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, la precedente espressione ha senso fintanto che $t^2 + c \in [-\pi/2, \pi/2]$; in particolare, la costante c, nel caso di un Problema di Cauchy, andrà scelta in modo che $t_0^2 + c \in [-\pi/2, \pi/2]$. Invertendo la precedente espressione, si trova che la soluzione generale è data da $y(t) = \sin(t^2 + c)$. Se si vuole ad esempio risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} y' = 2t\sqrt{1 - y^2} \\ \\ y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

allora la soluzione è data da $u(t) = \sin(t^2 - 5\pi/6)$, e tale soluzione è definita per

$$t \in \left[\sqrt{\frac{\pi}{3}}, 2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right].$$

Esempio 9.4 Cerchiamo le soluizioni dell'equazione

$$y'(t) = ay(t)(1 - by(t))$$

con a e b due numeri reali positivi. Un caso particolare di questa equazione è l'equazione di Verhulst $y'(t) = \varepsilon y(1 - \frac{y(t)}{k})$. L'equazione data oltre a essere a variabili separabili è anche un'equazione di tipo autonomo, in quanto non compare esplicitamente la variabile t. Le soluzioni delle equazioni autonome hanno la proprietà che sono invarianti per traslazioni, nel senso che se $u(t)$ è una soluzione, allora anche la funzione $v(t) = u(t-h)$ è soluzione per ogni $h \in \mathbb{R}$. Le soluzioni stazionari dell'equazione precedente sono date da $y(t) \equiv 0$ e $y(t) \equiv 1/b$. Cerchiamo le soluzioni non stazionarie; siccome

$$\frac{1}{y(1-by)} = \frac{1}{y} + \frac{b}{1-by},$$

troviamo che le soluzioni in forma implicita sono date da

$$\ln\left|\frac{y(t)}{1-by(t)}\right| = at + c,$$

e quindi

$$y(t) = \frac{ce^{at}}{1+bce^{at}} = \frac{1}{b+ce^{-at}};$$

Se si impone la condizione iniziale $y(0) = y_0$ si trova che

$$u(t) = \frac{y_0 e^{at}}{1 - by_0 + by_0 e^{at}} = \frac{y_0}{by_0 + (1-by_0)e^{-at}};$$

tali funzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$ se $1/by_0 \geq 0$, altrimenti grazie alla condizione $t \neq t_1 = \frac{1}{a}\ln(1 - 1/by_0)$, troviamo che le soluzioni sono definite su $(-\infty, t_1)$ se $t_1 > 0$, altrimenti su $(t_1, +\infty)$.

9.2.3 Equazioni omogenee

La forma più semplice di equazione omogenea è data da

$$y'(t) = g\Big(\frac{y(t)}{t}\Big);$$

queste equazioni sono definite per $t \neq 0$ e il Teorema 9.4 si applica se per esempio g è di C^1. Per determinare le soluzioni si pone $z(t) = y(t)/t$, cioè $y(t) = tz(t)$; si trova quindi l'equazione differenziale per z data da

$$z'(t) = \frac{1}{t}(g(z) - z)$$

che è una equazione a variabili separabili.

Esempio 9.5 Risolvere il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{y^2(t)-t^2}{ty(t)} \\ \\ y(-1) = 3. \end{cases}$$

Ponendo $z(t) = y(t)/t$, si ha che

$$g(z) = \frac{z^2-1}{z},$$

e quindi si trova il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = \frac{1}{t}\frac{z^2(t)-1}{z(t)} \\ \\ z(-1) = -3. \end{cases}$$

La soluzione stazionaria $z(t) \equiv \pm 1$ non soddisfa la condizione iniziale, quindi la soluzione va cercata tra le soluzioni non stazionarie; si trova che

$$z(t) = -\sqrt{8t^2+1},$$

e quindi la soluzione del Problema di Cauchy originario è data da

$$y(t) = -t\sqrt{8t^2+1}.$$

9.2.4 Equazioni lineari del primo ordine

Per equazione differenziale lineare del primo ordine si intende un'equazione della forma

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t);$$

il Teorema 9.4 garantisce l'esistenza e l'unicità delle soluzioni nel caso in cui $a, f : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, con dato iniziale (t_0, y_0) dove $t_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Nel caso in cui $f = 0$ si parla di equazione omogenea, mentre con $f \neq 0$ si parla di equazione completa e l'equazione $y' = ay$ si chiama omogenea associata.

Per determinare la soluzione si può procedere in due modi; mediante il fattore integrale o col metodo della variazione delle costanti.

Nel primo caso si moltiplica l'equazione per $e^{-A(t)}$, dove A è una primitiva di a

$$A(t) = \int a(t)dt,$$

oppure, nel caso si stia cercando la soluzione del Problema di Cauchy

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds.$$

Otteniamo quindi l'equazione

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-A(t)}\right) = y'(t)e^{-A(t)} - y(t)a(t)e^{-A(t)} = f(t)e^{-A(t)},$$

da cui mediante integrazione

$$y(t)e^{-A(t)} = \int f(t)e^{-A(t)}dt + c$$

oppure nel caso di Problema di Cauchy

$$y(t)e^{-A(t)} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)e^{-A(s)}ds.$$

In definitiva si trova che la soluzione è data da

$$y(t) = e^{A(t)} \left(c + \int f(t) e^{-A(t)} dt \right), \tag{9.2}$$

o nel caso di Problema di Cauchy

$$u(t) = e^{A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s) e^{-A(s)} ds \right). \tag{9.3}$$

Il metodo della variazione delle costanti parte dalla ricerca della soluzione dell'omogenea associata

$$y'(t) = a(t)y(t);$$

tale equazione è a variabili separabili e la soluzione è data da

$$y(t) = ce^{A(t)}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

A questo punto si pensa alla costante c come ad una funzione del tempo $c = c(t)$ e si deriva

$$y(t) = c(t)e^{A(t)}, \qquad y'(t) = c'(t)e^{A(t)} + c(t)a(t)e^{A(t)} = c'(t)e^{A(t)} + c(t)y(t).$$

Avremo che $y(t)$ è soluzione dell'equazione completa se e solo se

$$c'(t)e^{A(t)} = f(t),$$

e quindi

$$c'(t) = f(t)e^{-A(t)};$$

integrando si ritrovano le formule (9.2) e (9.3).

Esempio 9.6 Determiniamo la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{2}{t} y(t) = \dfrac{1}{t^2} \\[2ex] y(-1) = 2. \end{cases}$$

Siamo in presenza di una equazione differenziale del primo ordine lineare con

$$a(t) = -\frac{2}{t}, \qquad f(t) = \frac{1}{t^2};$$

applicando la formula (9.3), dato che

$$A(t) = -\int_{-1}^{t} \frac{2}{s} ds = \ln \frac{1}{t^2}$$

troviamo quindi che la soluzione è data da

$$u(t) = \frac{t+3}{t^2}, \qquad t \in (-\infty, 0).$$

9.2.5 Equazioni di Bernoulli

Le equazioni di Bernoulli sono del tipo

$$y'(t) = a(t)y(t) + f(t)y(t)^{\alpha}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, 1$ Questo tipo di equazioni si può ricondurre ad una equazione lineare; infatti, se si divide per y^{α} si ottiene

$$y(T)^{-\alpha}y'(t) = a(t)y(t)^{1-\alpha} + f(t)$$

e quindi, ponendo $v(t) = y(t)^{1-\alpha}$ si giunge all'equazione

$$\frac{1}{1-\alpha}v(t)' = a(t)v(t) + f(t).$$

Esempio 9.7 Risolviamo il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t) + t\sqrt{y(t)} \\ \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Tale equazione potrebbe essere risulta anche come equazione a variabili separabili con $a(t) = t$ e $b(y) = y + \sqrt{y}$, ma la trattiamo come equazione di Bernoulli con $\alpha = 1/2$ e la riconduciamo ad una equazione lineare ponendo $v(t) = \sqrt{y(t)}$. Troviamo per v il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(t) = \dfrac{t}{2}v(t) + \dfrac{t}{2} \\ \\ v(1) = 1. \end{cases}$$

Troviamo quindi che

$$v(t) = 2e^{\frac{t^2-1}{4}} - 1,$$

La soluzione del Problema di Cauchy originario è quindi data da

$$u(t) = \left(2e^{\frac{t^2-1}{4}} - 1\right)^2.$$

9.3 Equazioni del secondo ordine

Tratteremo solo alcuni esempi particolari di equazioni del secondo ordine; alcuni casi di equazioni che possono essere risolte passando per equazioni del primo ordine e le equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

9.3.1 Equazioni riconducibili al primo ordine

Ci sono due esempi particolari di equazioni differenziali del secondo ordine riconducibili al primo ordine.

Equazioni intrinsecamente del primo ordine

Sono queste equazioni in cui non compare la dipendenza esplicita dalla funzione $y(t)$, cioè della forma

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) = g(t, y'(t));$$

in questo caso si pone $v(t) = y'(t)$ e si risolve quindi l'equazione del primo ordine

$$v'(t) = g(t, v(t));$$

determinata la soluzione, si integra l'equazione

$$y'(t) = v(t)$$

per determinare la soluzione del problema originario.

Esempio 9.8 Determiniamo le soluzioni dell'equazione

$$y''(t) = y'(t)^2 + 1;$$

ponendo $v(t) = y'(t)$ troviamo l'equazione

$$v'(t) = v(t)^2 + 1$$

la cui soluzione in forma implicita è data da

$$\arctan(v(t)) = t + c_1$$

definita finanto che $t + c_1 \in (-\pi/2, \pi/2)$. In forma esplicita

$$v(t) = \tan(t + c_1), \qquad t \in \left(-c_1 - \frac{\pi}{2}, -c_1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Integrando l'equazione $y'(t) = v(t)$ si trova quindi che

$$y(t) = -\ln|\cos(t + c_1)| + c_2, \qquad t \in \left(-c_1 - \frac{\pi}{2}, -c_1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Equazioni autonome

Sono queste equazioni in cui non compare esplicitamente la dipendenza dalla variabile indipendente t, cioè equazioni della forma

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) = g(y(t), y'(t));$$

in queste equazioni si effettua un cambio di variabili e si pensa ad y come variabile indipendente e si pensa ad y' come funzione di y. Si pone cioè

$$y'(t) = z(y);$$

derivando rispetto al tempo si ottiene quindi che

$$y''(t) = \frac{d}{dt} z(y) = \frac{d}{dt} z(y(y)) = \frac{d}{dy} z(y(t)) y'(t) = z'(y) z(y),$$

dove abbiamo indicato ancora con z' la derivata di z rispetto ad y. L'equazione diventa quindi

$$z(y)z'(y) = g(y, z(y))$$

che va quindi risolta come equazione del primo ordine. Una volta determinata la soluzione si risolve l'equazione, ancora del primo ordine e a variabili separabili

$$y'(t) = z(y(t)).$$

Esempio 9.9 Si risolva il seguente Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = y'(t)(1 + y(t)) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ponendo $y'(t) = z(y)$, tenendo presente che $1/2 = y'(0) = z(y(0)) = z(0)$, troviamo per z il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z(y)z'(y) = z(y)(1 + y(t)) \\ z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Tale problema ha per soluzione

$$z(y) = \frac{(y+1)^2}{2}.$$

Dobbiamo quindi ora risolvere il Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{(y(t)+1)^2}{2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Troviamo quindi la soluzione

$$y(t) = \frac{t}{2-t}.$$

9.3.2 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Le equazioni lineari del secondo ordine sono equazioni del tipo

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t). \tag{9.4}$$

Analogamente a quanto detto nel caso di equazione lineare del primo ordine, si dice che l'equazione è omogenea se $f = 0$, completa se $f \neq 0$ mentre nel caso $f \neq 0$ l'equazione

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

viene detta omoegenea associata.

L'equazione viene detta lineare in quanto la funzione

$$Ly(t) = y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)$$

è lineare.

Il problema di Cauchy nel caso di equazione del secondo ordine si traduce nella determinazione della soluzione di

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases} \tag{9.5}$$

dove ancora t_0 viene detto istante iniziale e i valori y_0 e y_1 valori iniziali.

Siccome tale equazione si può scrivere nella forma

$$v'(t) = \vec{a}(t) \cdot v(t) + \vec{f}(t)$$

con $v(t) = (y(t), y'(t))$ e

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

notiamo che si ha esistenza e unicità delle soluzioni sotto la condizione $a, b, f : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue; le soluzioni sono soluzioni globali, nel senso che se I è un intervallo allora le soluzioni sono definite in tutto I, altrimenti se I non è un intervallo, per ogni $t_0 \in I$, le soluzioni sono contenute nel più grande intervallo J per cui $t_0 \in J \subset I$.

Formalmente, se si pone $v_0 = (y_0, y_1)$, la soluzione del Problema di Cauchy (9.5) è dato da

$$v(t) = e^{\vec{A}(t)} \left(v_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\vec{A}(s)} \vec{f}(s) ds \right),$$

con

$$\vec{A}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(s) ds = \begin{pmatrix} 0 & t_0 - t \\ -B(t) & -A(t) \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) ds, B(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) ds$$

e

$$e^{\vec{A}(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \vec{A}(t)^k.$$

Il problema fondamentale di questa riformulazione del problema sta nella difficoltà, in generale, del calcolo esplicito della funzione $e^{\vec{A}(t)}$. Vedremo in seguito che tale calcolo si potrà eseguire sostanzialmente solo quando a e b sono funzioni costanti.

Vediamo ora di studiare le proprietà dell'insieme delle soluzioni di una equazione differenziale lineare del secondo ordine; si parla di soluzione particolare dell'equazione (9.4) una funzione $y_p(t)$ tale che $Ly_p = f$.

Teorema 9.9 *Lo spazio delle soluzioni della omogenea associata*

$$V = \{u \in C^2(I) : Lu = 0\}$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2*. Inoltre, la soluzione generale di una equazione differenziale del secondo ordine è data dalla somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare. Quindi*

$$S = \{y \in C^2(I) : Ly = f\}$$

si può scrivere nella forma $S = V + y_p$ *e quindi è uno spazio affine di dimensione* 2.

Dimostrazione. Per vedere che l'insieme delle soluzioni dell'omogenea associata è uno spazio vettoriale di dimensione 2 basta fornire una base costituita da due elementi. Basta cioé trovare due funzioni linearmente indipendenti u_1 e u_2 tali che per ogni altra soluzione y esistano due numeri $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali $y(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$.
Fissiamo $t_0 \in I$ e consideriamo le due funzioni u_1 e u_2 soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1. \end{cases}$$

Il Teorema di esistenza e unicità garantisce che u_1 ed u_2 esistono e sono uniche. Esse sono linearmente indipendenti in quanto se esistessero $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$

valutando in t_0 tale espressione si otterrebbe $0 = c_1u_1(t_0) + c_2u_2(t_0) = c_1$, cioè $c_1 = 0$. Inoltre, siccome si ha anche che $0 = u'(t) = c_1u_1'(t) + c_2u'(t)$, si otterrebbe anche che $0 = u'(t_0) = c_2$, cioè $c_2 = 0$.
Presa ora una qualsiasi funzione $v \in V$ e scegliendo $c_1 = v(t_0)$, $c_2 = v'(t_0)$, abbiamo che la funzione $u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ ha la proprietà che $u(t_0) = c_1 = v(t_0)$ e $u'(t_0) = c_1u_1'(t_0) + c_2u_2'(t_0) = v'(t_0)$, cioè sia u che v risolvono lo stesso problema di Cauchy, quindi per l'unicità delle soluzioni si deve avere

$$v(t) = u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t), \qquad \forall t \in I,$$

e quindi $V = \langle u_1, u_2 \rangle$.

Veniamo ora alla seconda parte del Teorema. Se y è una soluzione generale e y_p è una soluzione particolare, allora $y_0 = y - y_p$ è soluzione dell'omogenea associata e viceversa, se y_0 è soluzione dell'omogenea e y_p è soluzione particolare, $y = y_0 + y_p$ è soluzione. □

Diventa interessante capire l'indipendenza lineare tra funzioni. Date un insieme di n funzioni $u_1, \ldots, u_n$ di classe C^{n-1} introduciamo la seguente matrice, che viene chiamata matrice Wronskiana associata alle funzioni $u_1, \ldots, u_n$

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & \ldots & u_n(t) \\ u_1'(t) & \ldots & u_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & \ldots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Abbiamo il seguente interessante risultato, che vale in generale per le soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$Ly(t) = y^{(n)}(t) + a_0(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}(t)y(t).$$

Proposizione 9.10 *Siano $u_1, \ldots, u_n \in C^{(n-1)}(I)$ soluzioni dell'equazione*

$$Ly(t) = 0.$$

Sono equivalenti:

1. *$u_1, \ldots, u_n$ sono linearmente indipendenti;*
2. *per ogni $t \in I$, $\det W(t) \neq 0$;*
3. *esiste $t_0 \in I$ tale che $\det W(t_0) \neq 0$.*

Dimostrazione.

1. ⇒ 2. Supponiamo esista $t_0 \in I$ tale che $\det W(t_0) = 0$; allora esiste una soluzione non nulla $c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$ del sistema $W(t_0)c = 0$. Consideriamo allora la funzione

$$v(t) = c_1u_1(t) + \ldots + c_nu_n(t).$$

Tale funzione risolve $Lv = 0$ e la condizione $W(t_0)c = 0$ implica che

$$v(t_0) = v'(t_0) = \ldots v^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Per l'unicità delle soluzioni necessariamente $v(t) \equiv 0$, cosa che contraddice l'indipendenza lineare delle funzioni $u_1, \ldots, u_n$.

2. $\Rightarrow$ 3. è ovvia.

3. $\Rightarrow$ 2. Supponiamo di avere $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$c_1 u_1(t) + \ldots + c_n u_n(t) = 0$$

Derivando $n-1$ volte la precedente equazione e valutando il tutto in $t = t_0$ si trova che, posto $c = (c_1, \ldots, c_n)$,

$$W(t_0)c = 0.$$

La condizione $\det W(t_0) \neq 0$ implica che $c = 0$, e quindi l'indipendenza lineare delle $u_1, \ldots, u_n$.

$\square$

Come detto in precedenza, il calcolo esplicito delle soluzioni è spesso un problema difficile e fattibile solo in casi molto particolari, come nel seguente esempio.

Esempio 9.10 Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$t^2 y''(t) - 3ty'(t) + 3y(t) = 0.$$

In questo caso infatti, quando $t \neq 0$, si ottiene che

$$y''(t) = \frac{3}{t}y'(t) - \frac{3}{t^2}y(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{t}y(t)\right)$$

da cui $y'(t) = \frac{3}{t}y(t) + c_1$. Questa è poi una equazione differenziale lineare del primo ordine con $a(t) = -\frac{3}{t}$ e $f(t) = c_1$, la cui soluzione è data da

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(c_2 + \int \frac{c_1}{|t|^3}dx\right)|t|^3 = \left(c_2 + \frac{t}{|t|}\int \frac{c_1}{t^3}dx\right)|t|^3 \\ &= -\frac{c_1 t}{2} + c_2|t|^3. \end{aligned}$$

Equazioni a coefficienti costanti

È questo il caso in cui a e b sono costanti; cerchiamo prima di tutto le soluzioni dell'equazione omogenea associata. Il vantaggio in questo caso sta nel fatto che il problema può essere ricondotto ad un problema algebrico; infatti, se consideriamo le funzioni $y_\lambda(t) = e^{\lambda t}$, allora y_λ è soluzione dell'equazione omogenea se e solo se $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, cioè se e solo se λ è radice del polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b,$$

detto polinomio caratteristico. Abbiamo tre differenti possibilità a seconda del valore del discriminante

$$\Delta = a^2 - 4b$$

di tale polinomio.

1. Se $\Delta > 0$ allora abbiamo due radici reali distinte

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \qquad \lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

   Quindi le due funzioni $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea. Inoltre

$$\det W(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0,$$

quindi le due funzioni sono linearmente indipendenti. In definitiva

$$V = \langle e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\rangle = \{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

2. Se $\Delta = 0$, allora abbiamo una sola radice reale con molteplicità 2 data da $\lambda_1 = -\frac{a}{2}$. Quindi abbiamo sicuramente una soluzione dell'equazione omogenea data da $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$; in questo caso è facile notare che anche la funzione $u_2(t) = te^{\lambda_1 t}$ è soluzione dell'omogenea in quanto

$$u_2''(t) + au_2'(t) + bu_2(t) = tp(\lambda_1)e^{\lambda_1 t} + (2\lambda_1 + a)e^{\lambda_1 t} = 0$$

in quanto $p(\lambda_1) = 0$ e $a = -2\lambda_1$. Infine u_1 E u_2 sono linearmente indipendenti in quanto

$$\det W(t) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & (1 + t\lambda_1)e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} = e^{2\lambda_1 t} \neq 0.$$

In definitiva

$$V = \langle e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}\rangle = \{(c_1 + c_2 t)e^{\lambda_1 t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

3. Se $\Delta < 0$, allora il polinomio ha due radici complesse coniugate

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

con

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \neq 0.$$

Abbiamo quindi le due soluzioni

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha t}\Big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\Big), \qquad e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha t}\Big(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)\Big)$$

soluzioni dell'omogenea, che però sono funzioni a valori complessi. Non è difficile fare vedere che le funzioni

$$u_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), \qquad u_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

sono funzioni reali soluzioni dell'equazione omogenea. Inoltre sono linearmente indipendenti in quanto

$$\begin{aligned}\det W(t) =& \det \begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ e^{\alpha t}(\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)) & e^{\alpha t}(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t)) \end{pmatrix} \\ =& \beta e^{2\alpha t} \neq 0.\end{aligned}$$

Quindi

$$V = \langle e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\rangle = \{e^{\alpha t}(c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t)) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Esempio 9.11 Risolviamo le seguenti equazioni differenziali:

1. $y'' - \omega^2 y = 0$;
2. $y'' - 2\omega y' + \omega^2 y = 0$;

3. oscillatore armonico $y'' + \omega^2 y = 0$;
4. oscillatore armonico con attrito $y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$, $\omega, \delta > 0$;

Nel primo caso abbiamo due radici reali distinte $\lambda_1 = \omega$, $\lambda_2 = -\omega$, quindi la soluzione generale è data da
$$y(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}.$$
Nel secondo caso abbiamo una sola radice reale $\lambda_1 = \omega$ con molteplicità due, quindi la soluzione generale è data da
$$y(t) = e^{\omega t}(c_1 + c_2 t).$$
Nel terzo caso abbiamo le radici complesse $\lambda_1 = i\omega$ e $\lambda_2 = -i\omega$, quindi la soluzione generale è data da
$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$
Nel quarto caso il polinomio caratteristico è dato da
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = (\lambda + \delta)^2 + \omega^2 - \delta^2.$$
Si distinguono tre possibilità; se $\delta > \omega$ allora il polinomio ha due radici reali e la soluzione generale è data da
$$y(t) = c_1 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}t} + c_2 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}t}.$$
Se $\delta = \omega$ abbiamo una radice con molteplicità due e quindi la soluzione generale è data da
$$y(t) = e^{-\delta t}(c_1 + c_2 t).$$
Se $\delta < \omega$ abbiamo radici complesse coniugate e la soluzione generale è data da
$$y(t) = e^{-\delta t}(c_1 \cos(t\sqrt{\omega^2 - \delta^2}) + c_2 \sin(t\sqrt{\omega^2 - \delta^2})).$$

Vediamo ora come si risolve un'equazione differenziale del secondo ordine completa, cioè come si fa a trovare la soluzione particolare. Si hanno sostanzialmente due metodi.

Metodo per somiglianza Questo metodo si può applicare quando il termine forzante f assume forme particolari, più precisamente quando
$$f(t) = e^{\alpha t}\left(p_n(t)\cos(\beta t) + q_m(t)\sin(\beta t)\right)$$
con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e p_n, q_m due polinomi di grado rispettivamente n ed m. Prima di tutto si considera il numero complesso $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ e si pone h uguale alla molteplicità di λ_0 come radice del polinomio caratteristico; in particolare $h = 0$ se $Pp(\lambda_0) \neq 0$, $h = 1$ se $p(\lambda_0) = 0$ ma p ammette una seconda radice diversa da λ_0, mentre $h = 2$ se $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$. Si considera poi $k = \max(n, m)$, cioè il massimo tra i gradi di p_n e q_m, e si cerca la soluzione particolare nella forma
$$y_p(t) = t^h e^{\alpha t}\left(\bar{p}_k(t)\cos(\beta t) + \bar{q}_k(t)\sin(\beta t)\right)$$
con $\bar{p}_k$ e $\bar{q}_k$ polinomi da determinare, imponendo che y_p sia una soluzione dell'equazione completa.

Esempio 9.12 Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni

1. $y'' + 3y = t + 2\cos t$;
2. $y'' - \omega^2 y = 1 + t^2$;
3. $y'' + 2y' = t$;
4. $y'' + 2y' + 3y = 2e^{3t}$;
5. $y'' + 2y' - 3y = 2e^{-3t}$;
6. $y'' + 2y' - y = 2e^x \cos(3t)$;
7. $2y'' + y' + 2y = 3\,\mathrm{sen}(2x)$.

Vediamo solo la prima equazione; la soluzione generale dell'omogenea associata è data da

$$y_0(t) = c_1 \cos(t\sqrt{3}) + c_2 \sin(t\sqrt{3}),$$

ricavata utilizzando il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3$$

le cui radici sono $\pm i\sqrt{3}$. Per la soluzione particolare, usiamo un principio detto *principio di sovrapposizione*; siccome il termine forzante $f(t) = t + 2\cos t$ non è in forma] particolare, ma somma di due funzioni $f_1(t) = t$ e $f_2(t) = 2\cos t$, entrambe in forma particolare, basterà trovare due soluzioni particolari y_1 ed y_2 associate rispettivamente a f_1 e f_2, per ottenere che la somma $y_p = y_1 + y_2$ sia una soluzione particolare associata a $f = f_1 + f_2$. Nel caso di f_1, una soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_1(t) = (at + b)$$

in quanto

$$f_1(t) = t = e^{0t}(t\cos(0t) + 0\sin(0t)),$$

cioè $\alpha = \beta = 0$, $p_1(t) = t$ polinomio di primo grado, $q_0(t) = 0$ polinomio di grado zero e il numero complesso $\lambda = \alpha + i\beta = 0$ non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda)$, cioè $h = 0$. Imponendo $y_1'' + 3y_1 = t$ si ricava $a = 1$ e $b = 0$, cioè $y_1(t) = t$. La seconda soluzione particolare va cercata nella forma

$$y_2(t) = a\cos t + b\sin t$$

in quanto il termine forzante $f_2(t) = 2\cos t$ ha $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $p_0(t) = 2$ e $q_0(t) = 0$ polinomi di grado zero e $\lambda = \alpha + i\beta = i$ non è radice del polinomio caratteristico. Imponendo $y_2'' + 3y_2 = 2\cos t$ si ricava $a = 1$ e $b = 0$. In definitiva, la soluzione generale dell'equazione differenziale è data da

$$y(t) = c_1 \cos(t\sqrt{3}) + c_2 \sin(t\sqrt{3}) + t + \cos t.$$

Metodo della variazione delle costanti Il metodo è lo stesso visto nel caso dell'equazione lineare del primo ordine; si parte dalla soluzione generale dell'omogenea

$$y(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

e si considerano $c_1 = c_1(t)$ e $c_2 = c_2(t)$ come funzioni. Derivando si ottiene

$$y'(t) = c_1'(t)u_1(t) + c_2'(t)u_2(t) + c_1(t)u_1'(t) + c_2(t)u_2'(t)$$

e al primo passo si pone

$$c_1'(t)u_1(t) + c_2'(t)u_2(t) = 0.$$

In questo modo la derivata seconda diventa

$$y''(t) = c_1'(t)u_1'(t) + c_2'(t)u -_2 (t) + c_1(t)u_1''(t) + c_2(t)u_2''(t).$$

Imponendo quindi che $y'' + ay' + by = f$ e sapendo che u_1 e u_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea, si giunge alla condizione

$$c_1'(t)u_1'(t) + c_2'(t)u_2'(t) = f(t).$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema, nelle incognite c_1' e c_2':

$$\begin{cases} c_1'(t)u_1(t) + c_2'(t)u_2(t) \\ \\ c_1'(t)u_1'(t) + c_2'(t)u_2'(t) = f(t). \end{cases}$$

Tale sistema ha come incognita il vettore $c' = (c_1'(t), c_2'(t))$ e come matrice dei coefficienti la matrice Wronskiana $W(t)$ associata alle funzioni u_1 e u_2, quindi invertibile; il sistema ammette quindi sempre soluzione c' e le funzioni $c_1(t)$ e $c_2(t)$ si ottengono per integrazione.

Esempio 9.13 Risolviamo la seguente equazione: $y'' + y = \tan t$. Partendo dalla soluzione generale dell'equazione omogenea associata

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

risolvere l'equazione con il metodo della variazione delle costanti si riduce nel risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = 0 \\ \\ -c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \sin t = \tan t, \end{cases}$$

che diventa

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\frac{\sin^2 t}{\cos t} = -\frac{1}{\cos t} + \cos t \\ \\ c_2'(t) = \sin t. \end{cases}$$

È immediato verificare che

$$c_2(t) = c_2 - \cos t,$$

mentre per determinare c_1 si ricordi che

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos t} =& \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - t)} = \frac{1}{2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}) + \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})}{2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})} \\ =& \frac{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})}{2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})} + \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})}{2\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})} \end{aligned}$$

e quindi

$$c_1(t) = c_1 + \sin t - \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \right| .$$

In definitiva, la soluzione generale dell'equazione completa è data da

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{\cos t}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) \right| .$$

9.4 Equazioni lineari di ordine superiore

I risultati visti nella sezione precedente si possono generalizzare ad equazioni di ordine superiore, cioè al caso dell'equazione

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)y(t) = f(t)$$

con $a_1, \ldots, a_n, f : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue. In particolare si avrà che:

1. la soluzione generale sarà data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare;

2. l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è un sottospazio vettoriale di dimensione n di $C^n(I)$;

3. nel caso di equazione a coefficienti costanti, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione omogenea si cercano nella forma $e^{\lambda t}$ con λ radice del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda + \ldots + a_n$: la soluzione generale dell'omogenea sarà quindi sempre combinazione lineare di esponenziali e seni e coseni;

4. per l'individuazione della soluzione particolare, si potranno sempre usare i metodi per somiglianza e della variazione delle costanti.

Esempio 9.14 Vediamo l'equazione della linea elastica o della trave elastica, cioè dell'equazione

$$EJy^{(4)}(t) = q$$

dove E è il modulo di Young, J il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse baricentrico ($B = EJ$ viene detto modulo di rigidezza a flessione) e q è il carico che viene esercitato sulla trave, supposto in questo esempio costante per motivi di semplicità. La soluzione generale di tale equazione, nell'ipotesi q costante, è data da

$$y(t) = c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + c_4 + \frac{q}{24B} t^4 .$$

Una variante di questo esempio è dato quando la trave è supposta appoggiata ad un supporto con resistenza di tipo elastico; con questo si intende che il profilo della trave soddisfa l'equazione differenziale

$$EJy^{(4)}(t) + ky(t) = q.$$

La soluzione generale è data qui da

$$y(t) = e^{\omega t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)) + e^{-\omega t}(c_3 \cos(\omega t) + c_4 \sin(\omega t)) + \frac{q}{k},$$

dove $\omega = \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}}$.

Bibliografia

[1] M.Bertsch, R.Dal Passo, L.Giacomelli. *Analisi matematica*. McGraw-Hill Education, 2014.

[2] M.Bramanti, S.Pagani, C.D. Salsa. *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare*. Zanichelli, 2004.

[3] M.Bramanti, S.Pagani, C.D. Salsa. *Analisi Matematica 2*. Zanichelli, 2009.

[4] G.Gilardi. *Analisi Due*. McGraw-Hill Libri Italia srl, 1992.

[5] E.Giusti. *Analisi Matematica vol 2*. Progr. Matem. Fisica Elettronica. Boringhieri, 2003.

[6] P.M.Morse, H.Feshbach. *Stokes Theorem* In Methods of Theoretical Physics, Part I. New York: McGraw-Hill, p. 43, 1953.