UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Eserciziario di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferara
e-mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1]versione aggiornata al 4 ottobre 2019

Indice

Capitolo 1

Funzioni continue in più variabili

Esercizio 1.1 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 - y^2} & |x| \neq |y| \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 1.2 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\} \cup \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 - y^2} & |x| \neq |y| \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 1.3 Studiare la continuità della funzione

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

in particolare, dire se la funzione può essere estesa in $(0,0)$. Si dica infine se esiste il seguente limite

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y).$$

Esercizio 1.4 Si disegnino gli insiemi di livello della funzione dell'esercizio 1.3,

$$f(x,y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

si determini quindi il massimo e il minimo di f sull'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\} = \overline{B}_1((2,0))$$

mediante lo studio degli insimi di livello.

Esercizio 1.5 Dimostrare che il limite

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

esiste (ed è uguale a 0) se e solo se $\alpha + \beta < 2$.

Esercizio 1.6 Disegnare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x,y) = \arctan \frac{x^2 - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1};$$

si descrivano le proprietà topologiche di tale insieme (si dica cioè se il dominio è un insieme chiuso o aperto e se ne determino le parti interne, esterne e di frontiera).

Esercizio 1.7 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 1.8 Studiare la continuità della funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (xy)\log(xy) & x, y > 0 \\ 0 & x, y = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.9 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 1.10 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 1.11 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} \quad .$$

Esercizio 1.12 Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases} .$$

Esercizio 1.13 Determinare il dominio e il codomio delle seguenti funzioni;

$$\frac{1}{\sqrt{2x - x^2 - y^2}} + \sqrt{x - y^2}, \qquad \operatorname{arcsen}(y^2 - x^2 + 1),$$

$$\ln\Big((x^2 - 1 - y)(x^2 - 1 + y)\Big) + \ln(4 - x^2).$$

Descrivere le proprietà topologiche dei domini trovati, determinando se tali insiemi sono aperti, chiusi, limitati, compatti e connessi per archi.

Esercizio 1.14 Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

descrivere le proprietà topologiche di tale dominio e dire se la funzione è continua o meno. Determinare inoltre gli insiemi di livello, verificando se si può applicare il Teorema di Weierstrass; determinare quindi massimo e minimo mediante lo studio degli insiemi di livello.

Esercizio 1.15 Si determini il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = \sqrt{xy + \ln x}$;
2. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x - \ln y}$;
3. $f(x,y) = \sqrt{x-1} + \ln(y-1)$;
4. $f(x,y) = -\sqrt{xe^y - ye^x}$.

Si dica inoltre se tali funzioni sono continue sul loro dominio.

Esercizio 1.16 Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \arcsin \frac{x - y + 1}{x + y - 1};$$

si dica se tale insieme è chiuso o aperto e se ne determini la parte interna, esterna e di frontiera.

Esercizio 1.17 Determinare il dominio della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2} + \log(1 - x^2 - y^2);$$

si dica se tale insieme è chiuso o aperto e se ne determini la parte interna, esterna e di frontiera.

Esercizio 1.18 Determinare gli insiemi $\{f = c\}$ per le seguenti funzioni di due variabili:

1. $f(x, y) = x - y$;
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$;
3. $f(x, y) = xy$;
4. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$;
5. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$;
6. $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$;
7. $f(x, y) = xe^{-y}$;
8. $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1}{y} - x^2}$;
9. $f(x, y) = \sqrt{xy(xy - 1)}$.

Esercizio 1.19 Determinare gli insiemi $\{f = c\}$ per le seguenti funzioni di tre variabili:

1. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
2. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$;
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$;
4. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$;
5. $f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$.

1.1 Soluzioni

Soluzione 1.1 La restrizione della funzione alle rette $y = mx$ con $m \neq \pm 1$ è data da

$$f(x, mx) = \frac{m}{1 - m^2},$$

da cui

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \frac{m}{1 - m^2},$$

cioè esistono successioni diverse di punti del piano che convergono a $(0, 0)$ e su cui la funzione ha valori limite differenti, quindi f non può essere continua.

Soluzione 1.2 La restrizione di f alle rette $y = mx$, $m \neq \pm 1$ è data da

$$f(x, mx) = \frac{m^2 x}{1 - m^2}$$

ed il limite di tali restrizioni per $x \to 0$ è zero. Però se si considera la restrizione di f sulle parabole $y = x - x^2$, si ottiene

$$f(x, x - x^2) = \frac{x^3 - x^3}{2x^3 - x^4},$$

da cui

$$\lim_{x \to 0} f(x, x - x^2) = \frac{1}{2}.$$

Quindi, le due seccessioni $(1/h, m/h)_{h \in \mathbb{N}}$ e $(1/h, 1/h - 1/h^2)_{h \in \mathbb{N}}$ tendono entrambe a $(0,0)$ ma i valori di f su di esse tendono rispettivamente a 0 e 1/2, da cui la non continuità di f.

Soluzione 1.3 La funzione è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in quanto quoziente di funzioni continue. Per studiare la continuità in 0, possiamo considerare le rette $y = mx$, sulle quali si trova che

$$f(x, mx) = \frac{m^2}{1 + m^2}.$$

Troviamo quindi che il limite per $x \to 0$ di tale valore dipende dal parametro m; in particolare $f(x, 0) = 0$ e $f(0, y) = 1$, quindi troviamo che il limite

$$\lim_{(x,y) \to 0} f(x, y)$$

non esiste. Quindi la funzione non potrà essere estesa con continuità su tutto $\mathbb{R}^2$.

Soluzione 1.4 Gli insiemi di livello si determinalo risolvendo le equazioni

$$\frac{y^2}{x^2 + y^2} = c;$$

si nota che si deve avere $c \geq 0$. L'equazione precedente è equivalente a

$$(1 - c)y^2 = cx^2,$$

da cui si deduce che deve essere anche $c \leq 1$; passando alla radice quadrata si trova

$$|y|\sqrt{1 - c} = |x|\sqrt{c}$$

che sono sono rette passanti per l'origine. Lungo la retta $y = 0$ si trova che la funzione, che è sempre non negativa, si annulla, quindi su tale retta si ha il minimo della funzione. Se vogliamo trovare il massimo e il minimo sull'insieme $\overline{B}_1((2, 0))$, ne deduciamo quindi che il minimo è zero e viene assunto sul segmente $y = 0$ e $1 \leq x \leq 3$. Per trovare il massimo, cerchiamo la retta (insieme di livello) che è tangente all'insieme dato, cioè cerchiamo il valore di c per cui il seguente sistema ha due sole soluzioni

$$\begin{cases} |y|\sqrt{1 - c} = |x|\sqrt{c} \\ \\ (x - 2)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ricavando la y dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, si trova, per $c \neq 1$, che la soluzione si trova risolvendo la seguente equazione;

$$\frac{1}{1-c}x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Si avrà quindi la soluzione imponendo che il discriminante di tale polinomio sia nullo, cioè

$$\frac{\Delta}{4} = 4 - \frac{3}{1-c} = 0.$$

Tale soluzione si avrà quindi per $c = 1/4$ ed in corrispondenza di tale valore si trovano i due punti $(1,1)$ e $(1,-1)$. In definitiva, il massimo è $1/4$ assunto nei due punti $(1,1)$ e $(1,-1)$.

Soluzione 1.5 Se passiamo alle coordinate polari, otteniamo la funzione

$$\tilde{f}(\varrho,\vartheta) = \varrho^{\alpha+\beta-2}|\cos\vartheta|^{\alpha}|\sin\vartheta|^{\beta}.$$

Quindi, siccome $|\tilde{f}(\varrho,\vartheta)| \leq \varrho^{\alpha+\beta-2}$, otterremo che se $\alpha+\beta-2<0$, allora

$$\exists \lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y) = 0.$$

In caso contrario, possiamo considerare i due casi $y=0$ e $y=x$ in modo da trovare che

$$f(x,0) = 0, \qquad f(x,x) = \frac{|x|^{\alpha+\beta-2}}{2};$$

quindi per $|x| \to +\infty$, troviamo che il limite ad infinito non può esistere per $\alpha+\beta \geq 2$.

Soluzione 1.6 La funzione arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi la funzione data è continua non appena l'argomento dell'arcotangente è definito. Ma la funzione

$$\frac{x^2-y^2+1}{x^2+y^2+1}$$

è definita e continua in tutto $\mathbb{R}^2$. La funzione data è quindi definita su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è ivi continua; avremo quindi che il dominio è sia chiuso che aperto, con parte interna coincidente con tutto $\mathbb{R}^2$, parte esterna e frontiera vuoti.

Soluzione 1.7 Nel caso in considerazione, la funzione non presenta alcun problema di continuità al di fuori del punto $(0,0)$; inoltre, calcolando il limite lungo gli assi cartesiani e lungo una qualsiasi direzione $y = mx$, esso è sempre 0. Quindi, o riusciamo a trovare un cammino particolare che porti verso lo zero e lungo il quale la funzione non tende a 0, oppure riusciamo a dimostrare veramente che il limite è 0. Un metodo che può essere utile per dimostrare la continuità in un dato punto è utilizzare le coordinate polari; o meglio, le coordinate polari centrate nel punto limite. In dettaglio, se dobbiamo verificare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L, \tag{1.1}$$

quello che si richiede nel limite è di verificare che il valore di f tenda al numero (o al vettore nel caso vattoriale) L quando la distanza di (x,y) da (x_0,y_0) tende a zero. Quindi possiamo scrivere le coordinate polari centrate in (x_0, y_0) valide per ogni punto (x, y) in un intorno di (x_0, y_0), come segue:

$$x = x_0 + \varrho \cos\theta$$
$$y = y_0 + \varrho \sin\theta$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varrho > 0$. Dunque, quando si fa il limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$, si sta richiedendo che $\varrho \to 0$. In definitiva, se riusciamo a trovare una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in 0 tale che $g(\varrho) \to 0$ per $\varrho \to 0$ e

$$|f(x, y) - L| \leq g(\varrho)$$

per ϱ sufficientemente piccolo, allora siamo riusciti a dimostrare che il limite in (1.1) è verificato. Nel nostro caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$; inoltre se (x, y) si trova in un intorno di $(0, 0)$, allora il valore di xy è prossimo allo zero e possiamo usare quindi lo sviluppo di Taylor per la funzione coseno e ottenere che

$$\frac{1 - \cos(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2y^2 + o(x^2y^2)}{2(x^2 + y^2)}.$$

Quindi, passando alle coordinate polari otteniamo la quantità

$$\frac{\varrho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta + o(\varrho^4)}{2\varrho^2}$$

che si può stimare con

$$\left|\frac{\varrho^4 \cos^2\theta \sin^2\theta + o(\varrho^4)}{2\varrho^2}\right| \leq \frac{\varrho^2}{2} + o(\varrho^2) = g(\varrho).$$

Quindi il limite (1.1) risulta verificato e la funzione è continua.

Soluzione 1.8 Nel presente esercizio, la continuità della funzione va verificata non solo nel punto $(0, 0)$, ma anche in tutti i punti della forma $(x_0, 0)$ con $x_0 > 0$ e $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$. In questo caso conviene cercare di sfruttare la forma della funzione data; la funzione è infatti di due variabili ma dipende solo dal prodotto $t = xy$; in tutti i casi in cui va verificata la continuità, si ha che $t \to 0$. Ricadiamo quindi sempre nel limite

$$\lim_{t\to 0} t \ln t = 0.$$

Più rigorosamente, se passiamo alle coordinate polari $x = \varrho\cos\theta, y = \varrho\sin\theta$, abbiamo che

$$|xy \ln xy| \leq -\varrho^2 \ln \varrho^2$$

(per $\varrho \to 0$ si ha che $\ln \varrho < 0$) da cui l'esistenza del limite pari a 0. Notiamo infine che la funzione è definita anche per $x, y < 0$, purchè si abbia $xy > 0$; la funzione data è quindi continua sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\},$$

con valore pari a 0 nel caso in cui $xy = 0$.

Soluzione 1.9 Notiamo anzitutto che la funzione data è a simmetria radiale, cioè essa dipende solo dalla distanza del punto (x, y) dall'origine. Questo vuol dire che se riscriviamo la funzione in coordinate polari $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$, otteniamo che

$$f(x, y) = \tilde{f}(\varrho, \theta) = \varrho^2 \sin\frac{1}{\varrho}.$$

Da questo segue immediatamente la continuità della funzione data nell'origine.

Soluzione 1.10 Si nota che la restrizione di f alle parabole $y = mx^2$ è data da

$$f(x, mx^2) = \frac{m^2}{(1+m)^2}$$

da cui la non continuità di f.

Soluzione 1.11 Le restrizioni di f alle rette $x = 0$ e $y = 0$ è data da

$$f(0, y) = 0, \qquad f(x, 0) = \frac{2}{x}$$

da cui si deduce la non continuità di f.

Soluzione 1.12 Si nota che prendendo la sezione di f lungo l'asse x si ottiene la funzione $\arctan 1/x$ e

$$-\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} \neq \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi la funzione non può essere continua.

Soluzione 1.13 Il dominio della prima funzione è determinato dalle due condizioni

$$\begin{cases} 2x - x^2 - y^2 > 0 \\ x - y^2 \geq 0 \end{cases}$$

cioè dalle condizioni

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 < 1 \\ x \geq y^2. \end{cases}$$

Si tratta quindi della parte di cerchio di raggio 1 centrato in $(1, 0)$ che si trova a destra della parabola $x = y^2$; tale insieme è rappresentato in Figura 1.1(a). Per quanto riguarda il codominio, si nota che ad esempio lungo la parabola $x = y^2$ per punti che tendono a $(1, 1)$ o $(1, -1)$ la funzione tende a $+\infty$; siccome poi in $(1, 0)$ la funzione vale $\sqrt{2}$, allora il codominio contiene sicuramente l'intervallo $[\sqrt{2}, +\infty)$ in quanto la funzione è continua. Per determinare quale sia il codominio, che sicuramente è contenuto in $(0, +\infty)$, bisognerebbe determinare il minimo della funzione; al momento non abbiamo ancora sviluppato la teoria necessaria per questo e quindi tralasciamo qui la discussione completa.

Per la seconda funzione, il dominio è determinato dalle condizioni

$$-1 \leq y^2 - x^2 + 1 \leq 1,$$

da cui

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2 \\ x^2 - y^2 \geq 0. \end{cases}$$

Tale regione è rappresentata in Figura 1.1(b). Il codominio è dato da $[-\pi/2, \pi/2]$.

Il dominio dell'ultima funzione è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} (x^2 - 1 - y)(x^2 - 1 + y) > 0 \\ 4 - x^2 > 0. \end{cases}$$

(a) (b) (c)

Figura 1.1: Rappresentazione dei domini delle funzioni date.

Tale dominio è rappresentato in Figura 1.1(c). Il codominio è dato invece da $(-\infty, 2\ln 2]$. Per quanto riguarda le proprietà topologiche dei domini, abbiamo che il primo dominio è limitato, connesso nè aperto è chiuso in quanto la parabola $x = y^2$ appartiene all'insieme mentre la parte di circonferenza $(x-1)^2 + y^2 = 1$ non appartiene al dominio. Il secondo dominio è illimitato, connesso in quanto $(0,0)$ appartiene al dominio e chiuso. Il terzo dominio è limitato, aperto e disconnesso in quanto i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$ non appartengono al dominio.

Soluzione 1.14 Il dominio è determinato dalla condizione

$$\begin{cases} 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq 0, \end{cases}$$

che è equivalente alla condizione

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ 2x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Tale dominio è rappresentato in Figura 1.2; esso è chiuso, limitato (quindi compatto) e connesso. La funzione è continua sul suo dominio; si può già concludere che la funzione

Figura 1.2: Dominio della figura data.

ammette massimo e minimo sul suo dominio grazie al Teorema di Weierstrass.

Gli insiemi di livello sono determinati dall'equazione

$$c = \sqrt{x - \sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

si vede subito che tale equazione ha soluzione solo per $c \geq 0$. Per tali valori possiamo scrivere

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = x - c^2$$

che, nel caso in cui $c^2 \leq x$ è equivalente a

$$\frac{4}{2 - c^4}\left(x - \frac{c^2}{2}\right)^2 + \frac{2}{2 - c^4}y^2 = 1.$$

Tali insiemi sono quindi ellissi centrate in $(c^2/2, 0)$ e di semiassi

$$\frac{\sqrt{2 - c^4}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{2 - c^4}}{\sqrt{2}}.$$

Si noti che la condizione $c^2 \leq x$ assieme alla condizione che il punto (x, y) appartenga al dominio della funzione implica che $c \leq 1$, in quanto $x \in [0, 1]$. Da questa discussione se ne deduce che il minimo della funzione è 0 assunto lungo l'ellisse $2x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, mentre il massimo è 1 assunto nel punto $(1, 0)$.

Soluzione 1.15

1. Siccome nella definizione di f compare $\ln x$, si deve anzitutto avere $x > 0$; poi, la radice è definita per $xy + \ln x \geq 0$, quindi il dominio è dato da

$$D(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq -\frac{\ln x}{x}\right\}$$

(si veda la Figura 1.3). Su tale dominio f è continua in quanto xy continua, $\ln x$ continua per $x > 0$, $xy + \ln x$ continua perché somma di funzioni continue e la composizione con la radice è una funzione continua quando l'argomento della radice è contenuto nel dominio della radice, cioè quando l'argomento è positivo.

Figura 1.3:

2. Il dominio di f è determinato dall'esistenza del logaritmo e dal non annullamento del denominatore $x - \ln y$, cioè

$$D(f) = \left\{(x, y) \in R^2 : y > 0, y \neq e^x\right\}$$

che è la regione del semipiano superiore a cui è stato tolto il grafico della funzione esponenziale. Su tale dominio f è continua in quanto $x^2 y$ continua, $x - \ln y$ continua e il rapporto tra funzioni continue, quando il denominatore è non nullo, è continuo.

3. Si avrà che
$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 1, y > 1\}$$
e su tale dominio f è continua.

4. La funzione data è definita per $xe^y - ye^x \geq 0$, cioè
$$\frac{x}{e^x} \geq \frac{y}{e^y}. \tag{1.2}$$
Studiamo quindi la funzione $g(t) = te^{-t}$; tale funzione è monotona crescente per $t \leq 1$, decrescente per $t \geq 1$ (si veda il grafico 1.4 (a)). In particolare, la restrizione di g a $[0, 1]$ è invertibile con inversa g^{-1}; abbiamo rappresentato in figura anche il grafico di $h(t) = g^{-1}(g_{|[1,+\infty)}(t))$. Dividiamo quindi la determinazione del dominio di f in vari

(a) g (b) g^{-1} (c) h

Figura 1.4: Grafici delle funzioni g, g^{-1} ed h.

punti;

i) per $x \leq 1$ e $y \leq 1$, siccome g è monotona crescente, la condizione (1.2) è verificata per $y \leq x$;

ii) per $x \geq 1$, $y \geq 1$, g è monotona decrescente, quindi (1.2) è verificata per $y \geq x$;

iii) se $x \geq 1$ e $y \leq 0$ la (1.2) è sempre verificata in quanto il mebro di destra è positivo e quello di sinistra negativo, mentre per $x \leq 0$ e $y \geq 1$ la (1.2) non è mai verificata in quanto il membro di sinistra è negativo e quello di destra positivo;

iv) se $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, (1.2) è verificata per $y \leq h(x)$;

v) infine se $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 1$, (1.2) è verificata per $x \geq h(y)$.

In definitiva, il dominio di f è individuato dalla regione in Figura 1.5.

Figura 1.5:

Soluzione 1.16 Il dominio è determinato anzitutto dalla condizione $x + y - 1 \neq 0$ e successivamente dalle condizioni

$$-1 \leq \frac{x-y+1}{x+y-1} \leq 1.$$

Distinguendo i caso $y > -x+1$ e $y < -x+1$, si trova che il dominio di f è dato da

$$D(f) = (E_1 \cup E_2) \setminus \{y = -x+1\},$$

dove

$$E_1 = \{x \geq 0\} \cap \{y \geq 1\}, \qquad E_2 = \{x \leq 0\} \cap \{y \leq 1\}.$$

Gli insiemi E_1 e E_2 sono chiusi, quindi $E_1 \cup E_2$ è chiuso. A tali insiemi va però tolto il punto $(0,1)$, che è un punto di frontiera. Se ne deduce che il dominio non è né chiuso né aperto. La frontiera è data da

$$\partial D(f) = \{x = 0\} \cup \{y = 1\},$$

mentre parte interna ed esterna sono date rispettivamente da

$$D(f)^\circ = \Big(\{x > 0\} \cap \{y > 1\}\Big) \cup \Big(\{x < 0\} \cap \{y < 1\}\Big)$$

e

$$(\mathbb{R}^N \setminus D(f))^\circ = \Big(\{x > 0\} \cap \{y < 1\}\Big) \cup \Big(\{x < 0\} \cap \{y > 1\}\Big).$$

Soluzione 1.17 Il dominio è determinato dalle due condizioni

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 > 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene l'insieme

$$D(f) = \{|y| \geq |x|\} \cap \{x^2 + y^2 < 1\}.$$

Tale insieme non è né aperto né chiuso, in quanto i punti $|y| = |x|$, $x^2 + y^2 < 1$ sono di frontiera ed appartengono al dominio, mentre i punti di frontiera $x^2 + y^2 = 1$, $|y| \geq |x|$ non appartengono al dominio.

Soluzione 1.18

1. L'insieme cercato è determinato dalle soluzioni dell'equazione $x - y = c$, cioè dalle rette $y = x - c$. Se ne deduce che f è costante lungo tali rette, parallele tra loro, con valore tanto maggiore quanto più tali rette si spostano verso il basso. Si noti poi che per ogni $c \in \mathbb{R}$ tali insiemi sono non vuoti.

2. Si tratta di risolvere l'equazione $x^2 + 2y^2 = c$; quindi si deve avere $c \geq 0$. Per $c = 0$ l'unica soluzione è data da $(0,0)$, mentre per $c > 0$ si ottiene

$$\frac{x^2}{c} + \frac{2y^2}{c} = 1$$

che è l'equazione di un ellisse di semiassi $\sqrt{c}$ e $\sqrt{c/2}$; tali ellissi sono concentriche e tanto più grandi quanto più è elevato il valore di c.

(a) (b)

Figura 1.6: Insiemi di livello per (a) $c > 0$ e (b) $c < 0$.

3. Dobbiamo risolvere l'equazione $xy = c$; avremo quindi due rami di iperbole, quelli in Figura 1.6 (a) per $c > 0$, e quelli in Figura 1.6 (b) per $c < 0$. Per $c = 0$ si ottengono invece gli assi $x = 0$ e $y = 0$.

4. Si tratta di risolvere $x^2/y = c$; per $c = 0$ si ottiene l'asse $x = 0$, mentre per $c \neq 0$ otteniamo
$$y = \frac{x^2}{c}$$
che sono parabole con concavità verso l'alto se $c > 0$, verso il basso altrimenti. Tali parabole sono tanto più larghe quanto più c è grande. Si nota altresì che la funzione, che non è definita per $y = 0$, non può essere estesa con continuità in $(0, 0)$.

5. Dobbiamo risolvere l'equazione
$$\frac{x - y}{x + y} = c,$$
cioè $x(1 - c) = y(1 + c)$. Per $c = -1$ si ottiene l'asse $x = 0$, mentre per $c \neq -1$ le rette
$$y = \frac{1 - c}{1 + c}x,$$
tutte passanti per l'origine (quindi f non può essere estesa con continuità in $(0, 0)$).

6. Dobbiamo risolvere l'equazione
$$\frac{y}{x^2 + y^2} = c$$
cioè $c(x^2 + y^2) - y = 0$. Per $c = 0$ si ottiene l'asse $y = 0$, altrimenti possiamo riscrivere l'equazione nella forma
$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$$
che rappresenta una circonferenza centrata in $(0, 1/2c)$ e di raggio $1/2c$.

7. Dobbiamo risolvere l'equazione $xe^{-y} = c$, cioè $x = ce^y$. Per $c = 0$ si ottiene l'asse $x = 0$, altrimenti i grafici, nella variabile y, della funzione esponenziale (si veda Figura 1.7).

Figura 1.7: Livelli della funzione xe^{-y}

8. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\sqrt{\frac{1}{y} - x^2} = c \tag{1.3}$$

e quindi si deve avere $c \geq 0$; si noti poi che la radice è definita per $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$. Elevando al quadrato in (1.3), si ottiene

$$y = \frac{1}{x^2 + c^2},$$

che sono gli insiemi rappresentati in Figura 1.8.

Figura 1.8: Livelli della funzione $\sqrt{\frac{1}{y} - x^2}$

9. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\sqrt{xy(xy-1)} = c$$

e quindi $c \geq 0$. Elevando al quadrato e ricavando xy, si ottiene

$$xy = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c^2}}{2}$$

che sono per ogni c quattro rami di iperboli (in Figura 1.9 è rappresentato il caso $c = 2$).

Soluzione 1.19

1. Bisogna risolvere l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = c$, quindi si hanno soluzioni per $c \geq 0$. Per $c = 0$ la soluzione é data dal solo punto $(0, 0, 0)$, mentre per $c > 0$ le soluzioni sono le sfere centrate nell'origine e di raggio $\sqrt{c}$; quindi gli insiemi di livello si allargano quando c cresce.

2. Bisogna risolvere l'equazione $x + 2y + 3z = c$, da cui si deduce che i livelli sono piani paralleli ortogonali al vettore $(1, 2, 3)$ e passanti per i punti $(c, 0, 0)$.

Figura 1.9: Livello $c = 2$ della funzione $\sqrt{xy(xy-1)}$

3. Bisogna risolvere l'equazione $x^2 + y^2 = c$, da cui $c \geq 0$. Per $c = 0$, si trova $x = y = 0$, quindi il livello 0 é l'insieme dei punti di coordinate $(0, 0, z)$ cioé l'asse vertcale z. Per $c > 0$, (x, y) deve appartenere alla circonferenza centrata in $(0, 0)$ di raggio $\sqrt{c}$, quindi il livello c é la superficie laterale del cilindro verticale basato su tale circonferenza.

4. Bisogna risolvere l'equazione
$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = c$$
da cui $c \geq 0$. Per $c = 0$ il livello é dato da $x = y = 0$, cioé l'asse verticale $(0, 0, z)$, $z \neq 0$ in quanto per $z = 0$ la f non é definita. Per $c > 0$ si ottiene l'equazione $cz^2 = x^2 + y^2$, che definisce la superficie laterale del cono la cui intersezione con il piano $z = costante$ é la circonferenza di raggio $|z|\sqrt{c}$. Tali coni sono tanto piú aperti quanto piú grande é c e se ne deduce che f non puó essere estesa con continuitá in $(0, 0, 0)$.

5. Bisogna risolvere l'equazione $|x| + |y| + |z| = c$, da cui $c \geq 0$. Per $c = 0$ si ottiene $x = y = z = 0$, mentre per $c > 0$ si hanno le seguenti otto possibilitá:

   - per $x, y, z \geq 0$ il piano di equazione $x + y + z = c$;
   - per $x, y \geq 0$ e $z \leq 0$ il piano di equazione $x + y - z = c$;
   - per $x \geq 0$ e $y, z \leq 0$ il piano di equazione $x - y - z = c$;
   - per $x, z \geq 0$ e $y \leq 0$ il piano di equazione $x - y + z = c$;
   - per $x, y, z \leq 0$ il piano di equazione $-x - y - z = c$;
   - per $x, y \leq 0$ e $z \geq 0$ il piano di equazione $-x - y + z = c$;
   - per $x, z \leq 0$ e $y \geq 0$il piano di equazione $-x + y - z = c$;
   - per $x \leq 0$ e $y, z \geq 0$ il piano di equazione $x + y + z = c$.

   In Figura 1.10 è riportato il livello con $c = 2$.

Figura 1.10: Livello $c = 2$ della funzione $|x| + |y| + |z|$