UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Eserciziario di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferara
e-mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1] versione aggiornata al 11 ottobre 2019

Indice

Capitolo 3

Derivabilità e differenziabilità

Esercizio 3.1 Utilizzando le sezioni coordinate e gli insiemi di livello, disegnare qualitativamente il grafico delle seguenti funzioni sui domini indicati:

1. $f(x,y) = x$ con $E = [0,2] \times [0,3]$;
2. $f(x,y) = \text{sen}x$ con $E = [0,2\pi] \times [0,1]$;
3. $f(x,y) = y^2$ con $E = [-1,1] \times [-1,1]$;
4. $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ con $E = [-1,1] \times [-1,1]$;
5. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ con $E = \{(x,y) : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$;
6. $f(x,y) = 4 - x^2$ con $E = \{(x,y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$;
7. $f(x,y) = |x| + |y|$ con $E = \{(x,y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$;
8. $f(x,y) = 6 - x - 2y$ con $E = \{(x,y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 3.2 Mediante la definizione, calolare le derivate direzionali delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = x^2 - xy$;
2. $f(x,y) = (x^2 - y)e^{xy-2}$;
3. $f(x,y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$;
4. $f(x,y) = (x+1)^2 - (y-1)^2\text{sen}x$.

Esercizio 3.3 Utilizzando la definizione, calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$, $x \neq -y$;

2. $f(x, y) = (x + y^2)\ln(x - y)$, $x > y$.

Esercizio 3.4 Scrivere le derivate parziali delle seguenti funzioni e calcolarle nel punto indicato:

1. $f(x, y) = xy + x^2$, $P = (2, 0)$;
2. $f(x, y) = \text{sen}(x\sqrt{y})$, $P = (\pi/3, 4)$;
3. $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, $P = (-1, 1)$;
4. $f(x, y, z) = x^3y^4z^5$, $P = (0, -1, -1)$;
5. $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{y + z}$, $P = (1, 1, 1)$;
6. $f(x, y, z) = \ln(1 + e^{xyz})$, $P = (2, 0, -1)$.

Esercizio 3.5 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 3.6 Studiare le proprietà (continutà, derivabilità, differenziabilità e derivate successive) della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x^2y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.7 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (xy)\log(xy) & xy > 0 \\ 0 & xy = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.8 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\text{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Esercizio 3.9 Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = xy^2.$$

Calcolare inoltre il suo gradiente nel punto $(2, 3)$ e determinare quali sono le direzioni lungo le quali le derivate direzionali della f in $(2, 3)$ sono massime e minime. Scrivere infine l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 3)$ e determinare la retta normale a tale piano nel punto di tangenza.

Esercizio 3.10 Calcolare il gradiente delle seguenti funzioni, esplicitandone modulo e direzione:

1. potenziale elettrico
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (x,y) \neq (0,0);$$

2. "potenziale" magnetico
$$f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}, \qquad y \neq 0.$$

Esercizio 3.11 Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1-2x^2-4y^2}$:

1. determinare il dominio e discutere su di esso la continuità e la differenziabilità di f;
2. calcolare le derivate direzionali in $(0, 1/4)$;
3. scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti $(0, \frac{1}{4})$ e $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}})$;
4. determinare gli insiemi di livello di f e dedurne quindi massimo e minimo di f sul suo dominio;
5. fissato il livello E_c con $c = \sqrt{3}/2$, determinare la direzione ortogonale ad E_c nel punto determinato da $x_0 = 1/4$ e $y_0 > 0$.

Esercizio 3.12 Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti indicati:

1. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$, in $(1,1)$ e $(2,1)$;
2. $f(x,y) = \sqrt{1-2x^2} - 4y^2$ in $(1/2, 0)$ e $(-1/4, 2)$;
3. $f(x,y) = \sin(xy)$ in $(\pi/3, -1)$;
4. $g(x,y,z) = \frac{xz}{y+z}$ in $(1,1,1)$. Per le ultime due funzioni, scrivere anche le equazioni degli iperpiani tangenti e rette normali ai livelli delle funzioni precedenti negli stessi punti dati precedentemente.

Esercizio 3.13 Studiare la differenziabilità in $(0,1)$ della funzione
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1.$$
si determini inoltre la derivata di f in direzione v in $(0,1)$, sia usando la definizione di derivata direzionale, che utilizzando la formula che lega le derivate direzionali al differenziale.

Esercizio 3.14 Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione
$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$
nel punto $(1,1)$.

Esercizio 3.15 Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $(1, 2, 1)$ della funzione

$$f(x, y, z) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 4y^3 + xyz.$$

Esercizio 3.16 Verificare la formula della derivata della funzione composta $g \circ f$ e $f \circ g$ per le funzioni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (x^2y, yz^2), \qquad g(x, y) = (x + y^2, x^2y^2, x^2 + y).$$

Esercizio 3.17 Verificare la formula di derivata della funzione composta $Dh = Df \cdot Dg$ e $DH = Dg \cdot Df$ per le funzioni $h = f \circ g$ e $H = g \circ f$, dove

$$f(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y, xy), \qquad g(x, y, z) = (z(x^2 + y^2), z^2).$$

Esercizio 3.18 Verificare la formula della derivata della funzione composta $f \circ g$ con le seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2y)$, $g(x, y) = (xy^2, x^2 + 1/y)$;
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = (e^{xy}, 1 + x^2 \cos y)$;
3. $f(x, y) = \arctan(y/x)$, $g(x, y) = (2x + y, 3x - y)$.

Esercizio 3.19 Verificare la formula di derivazione della funzione composta quando la funzione $f(x, y) = xy$ viene scritta in coordinate polari.

Esercizio 3.20 Determinare le rette normali al paraboloide $z = x^2 + y^2 - 1$ passanti per il punto $(0, 0, 0)$; calcolare quindi l'angolo tra tali rette e l'asse x.

Esercizio 3.21 Data la funzione $f(x, y) = y^2/x$ e l'insieme $E = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 = 1\}$, verificare che in ogni punto di E la derivata di f nella direzione normale ad E è nulla.

Esercizio 3.22 Scrivere l'equazione del piano tangente e della retta normale al paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

nel punto $(-1, 2, 5)$; trovare quindi i punti del paraboloide in cui il piano tangente è parallelo al piano di equazione $z = 3x + 4y$ e scrivere in tali punti le equazioni del piano tangente e della retta normale.

Esercizio 3.23 Si studino le proprietà di continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione;

$$f(x, y) = \sqrt{xy + \ln y}.$$

Si scrivano quindi le equazioni piano tangente e della retta normale al grafico della funzione nel punto $(2, 1)$.

Esercizio 3.24 Dire se e dove le seguenti funzioni sono convesse:

$$f(x, y) = xe^{xy}, \qquad g(x, y) = x^2y^2 + 6y^2.$$

Esercizio 3.25 Date le funzioni $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si definisca $G(x, y) = (x, y, g(x, y))$; si determini il gradiente della funzione $h = f \circ G$ utilizzando la formula per la derivata della funzione composta e si deduca, nel caso in cui $\partial f/\partial z \neq 0$, la seguente formula per la funzione implicita, cioè sotto la condizione che $f(x, y, g(x, y)) = 0$;

$$\nabla g(x,y) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y)),\right).$$

Esercizio 3.26 Si considerino le coordinate sferiche nello spazio determinate dalla funzione

$$\begin{aligned} G :&[0,+\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3, \\ G(\varrho,\vartheta,\varphi) =&(\varrho\cos\vartheta\mathrm{sen}\varphi, \varrho\mathrm{sen}\vartheta\mathrm{sen}\varphi, \varrho\cos\varphi), \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta\mathrm{sen}\varphi \\ y = \varrho\mathrm{sen}\vartheta\mathrm{sen}\varphi \\ z = \varrho\cos\varphi. \end{cases}$$

Si scriva la matrice Jacobiana di G e si deduca da essa la formula per le derivate espresse in coordinate sferiche.

Esercizio 3.27 Si dica in quale insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ la funzione

$$f(x,y) = e^{|y^2-5y|} - (y - 2\log(x-1))^2$$

è di classe C^2 e in tali punti si scriva la matrice Hessiana di f.

Esercizio 3.28 Si determini il Laplaciano della funzione

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

sia utilizzando direttamente la definizione di Δf sia sfruttando il fatto che f è radiale (scrivendo quindi il Laplaciano in coordinate sferiche).

Esercizio 3.29 Dire se e dove la funzione

$$(2x + 3y^2, -y + xy)$$

definisce un diffeomeorfismo locale e globale.

3.1 Soluzioni

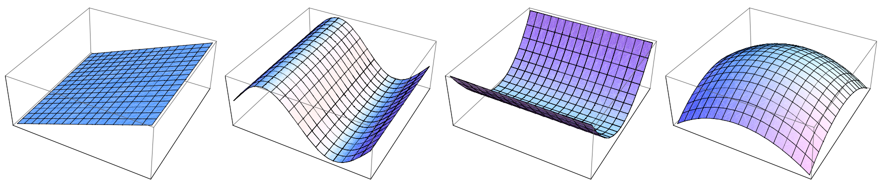
Soluzione 3.1

1. Le sezioni di f lungo x sono date dalla retta $z = x$, mentre la funzione è costante sulle sezioni lungo y. Gli insiemi di livello sono le rette verticali $x = c$. In definitiva, il grafico è riportato in Figura 3.1(a).

2. Le sezioni lungo x sono dalla funzione $z = \operatorname{sen} x$, mentre le sezioni lungo y sono costanti. Infine, gli insiemi di livello sono non nulli per $c \in [-1, 1]$ e sono dati dalle rette $x = \operatorname{arcsen} c + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi il grafico sarà quello riportato in Figura 3.1(b).

3. Le sezioni lungo x sono costanti, quelle lungo y sono date dalla funzione $z = y^2$, mentre gli insiemi di livello sono non nulli per $c \geq 0$ e sono individuati dalle rette orizzontali $y = \pm\sqrt{c}$. Avremo quindi il grafico riportato in Figura 3.1(c).

4. Le sezioni lungo x ed y sono parabole con concavità rivolta verso il basso; i livelli sono non nulli per $c \leq 4$ e sono dati da circonferenze centrate nell'origine e di raggio $\sqrt{4-c}$. Il grafico è riportato in Figura 3.1(d).



(a) x (b) $\operatorname{sen} x$ (c) y^2 (d) $4 - x^2 - y^2$

Figura 3.1: Grafici delle funzioni x, $\operatorname{sen} x$, y^2 e $4 - x^2 - y^2$.

5. Le sezioni lungo x e y sono descritte da funzioni i cui grafici sono simili ai grafici delle funzioni $\sqrt{1+t^2}$; con questo intendiamo che ad esempio la sezione lungo x è data da $|y|\sqrt{1 + x^2/y^2}$. Tali sezioni sono riportate in Figura 3.2. Gli insiemi di livello invece

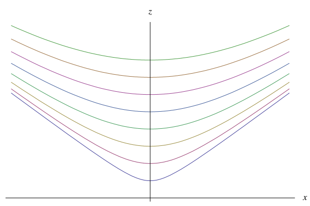


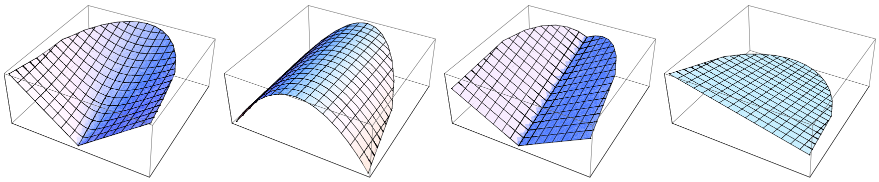
Figura 3.2: Grafici delle sezioni di f lungo x al variare di y

sono non nulli per $c \geq 0$ e sono circonferenze centrate nell'origine e di raggio c. Il grafico della funzione è riportato in Figura 3.3(a).

6. Le sezioni lungo la x sono parabole con concavità rivolta verso il basso, mentre le sezioni lungo y sono costanti. Gli insiemi di livello sono non nulli per $c \leq 4$ e sono le dati dalle rette verticali $x = \pm\sqrt{4-c}$. Il grafico è riportato in Figura 3.3(b).

7. La sezione lungo la x è data dalla funzione $|x|$ a cui aggiungiamo $|y|$; analogo comportamento si ha lungo y. Infine i livelli sono non nulli per $c \geq 0$ e sono dati da quadrati di lato $c\sqrt{2}$ centrati nell'origine e ruotati di $\pi/4$. Il grafico è riportato in Figura 3.3(c).

8. La sezione lungo x e lungo y produce rette con inclinazione negativa; gli insiemi di livello c sono le rette $2y = 6 - x - c$. Il grafico è riportato in Figura 3.3(d).



(a) $\sqrt{x^2+y^2}$ (b) $4-x^2$ (c) $|x|+|y|$ (d) $6-x-2y$

Figura 3.3: Grafici delle funzioni $\sqrt{x^2+y^2}$, $4-x^2$, $|x|+|y|$ e $6-x-2y$.

Soluzione 3.2 L'esrcizio chiede di calcolare, fissato $v \in \mathbb{R}^2$, $v=(v_1,v_2)$, il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t}.$$

1. Abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{(x+tv_1)^2 - (x+tv_1)(y+tv_2) - x^2 + xy}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} 2xv_1 - xv_1 2 + tv_1^2 - yv_1 - tv_1v_2 \\ &= 2xv_1 - xv_2 - yv_1.\end{aligned}$$

2. Abbiamo che

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{((x+tv_1)^2 - y - tv_2)e^{xy+txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2-2} - (x^2-y)e^{xy-2}}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} (x^2-y)e^{xy-2} \frac{e^{txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2} - 1}{t} + \\ &\quad + (tv_1^2 + 2xv_1 - v_2)e^{xy+txv_2+tyv_1+t^2v_1v_2-2} \\ &= (x^2-y)e^{xy-2}(xv_2+yv_1) + (2xv_1 - v_2)e^{xy-2}.\end{aligned}$$

3. Si ottiene

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t} = \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{x+tv_1}{1+(x+tv_1)^2+(y+tv_2)^2} - \frac{x}{1+x^2+y^2}\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{x^2v_1 + y^2v_2 - xv_1^2 t - 2x^2v_1 - xv_2^2 t - 2xyv_2}{(1+(x+tv_1)^2+(y+tv_2)^2)(1+x^2+y^2)} \\ &= \frac{(x^2-2x^2)v_1 + (y^2-2xy)v_2}{(1+x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

4. Otteniamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv_1,y+tv_2)-f(x,y)}{t}=\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{(x+tv_1+1)^2-(y+tv_2-1)^2\mathrm{sen}(x+tv_1)-(x+1)^2+(y-1)^2\mathrm{sen}x}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\Big(2xv_1+2v_1-y^2\frac{\mathrm{sen}(x+tv_1)-\mathrm{sen}x}{t}+\frac{\mathrm{sen}x-\mathrm{sen}(x+tv_1)}{t}+\\
&\quad+2v_2\mathrm{sen}(x+tv_1)-2yv_2\mathrm{sen}(x+tv_1)+2y\frac{\mathrm{sen}(x+tv_1)-\mathrm{sen}x}{t}-tv_2^2\mathrm{sen}(x+tv_1)\Big)\\
&=(2x+2-y^2\cos x-\cos x+2y\cos x)v_1+(2\mathrm{sen}x-2y\mathrm{sen}x)v_2.
\end{aligned}$$

Soluzione 3.3 L'esercizio chiede di calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t},\qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}.$$

1. Si ottiene che

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\frac{(x+t)y}{x+y+t}-\frac{xy}{x+y}\Big)=\lim_{t\to 0}\frac{xy+y^2-xy}{(x+y+t)(x+y)}\\
&=\frac{y^2}{(x+y)^2},
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\frac{x(y+t)}{x+y+t}-\frac{xy}{x+y}\Big)=\lim_{t\to 0}\frac{xy+x^2-xy}{(x+y+t)(x+y)}\\
&=\frac{x^2}{(x+y)^2}.
\end{aligned}$$

2. Si ricava che

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y)-f(x,y)}{t}&=\lim_{t\to 0}\frac{(x+t+y^2)\ln(x+t-y)-(x+y^2)\ln(x-y)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}(x+y^2)\frac{\ln(x-y+t)-\ln(x-y)}{t}+\ln(x+t-y)\\
&=\frac{(x+y^2)}{x-y}+\ln(x-y),
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(x+(y+t)^2)\ln(x-y-t)-(x+y^2)\ln(x-y)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}(x+y^2)\frac{\ln(x-y-t)-\ln(x-y)}{t}+2y\ln(x+t-y)+t\ln(x-y-t)\\
&=-\frac{(x+y^2)}{x-y}+2y\ln(x-y).
\end{aligned}$$

Soluzione 3.4 1. Con un calcolo diretto, si ricava

$$\nabla f(x,y) = (y+2x, x), \qquad \nabla f(2,0) = (4,2).$$

2. Otteniamo

$$\nabla f(x,y) = \left(\sqrt{y}\cos(x\sqrt{y}), \frac{x}{2\sqrt{y}}\cos(x\sqrt{y})\right), \qquad \nabla f(\pi/3, 4) = (-1, -\pi/24).$$

3. Si ricava

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \qquad \nabla f(-1,1) = (-1/2, -1/2).$$

4. Abbiamo

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2y^4z^5, 4x^3y^3z^5, 5x^3y^4z^4), \qquad \nabla f(0,-1,-1) = (0,0,0).$$

5. Otteniamo

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{y}{y+z}, \frac{xz}{(y+z)^2}, -\frac{xy}{(y+z)^2}\right), \qquad \nabla f(1,1,1) = (1/2, 1/4, -1/4).$$

6. Si ha

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{yze^{xyz}}{1+e^{xyz}}, \frac{xze^{xyz}}{1+e^{xyz}}, \frac{xye^{xyz}}{1+e^{xyz}}\right), \qquad \nabla f(2,0,-1) = (0,-1,0).$$

Soluzione 3.5 Come abbiamo visto nel capito sulle funzioni continue, la funzione data è continua. Per quanto riguarda la derivabilità si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Per vedere se c'è la differenziabilità, dobbiamo verificare che

$$0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - Df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1-\cos hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}.$$

Passando alle coordinate polari, otteniamo che, posto $h = \varrho\cos\theta$, $k = \varrho\sin\theta$,

$$\left|\frac{1-\cos hk}{(h^2+k^2)^{3/2}}\right| \leq \frac{\varrho}{2} + o(\varrho) = g(\varrho)$$

che tende a 0 per $\varrho \to 0$. Quindi la funzione f è differenziabile in $(0,0)$. Si noti inoltre che le derivate parziali sono date da

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =& \frac{y(x^2+y^2)\mathrm{sen}(xy) - 2x(1-\cos(xy))}{(x^2+y^2)^2} \\ =& \frac{xy^2(x^2+y^2)\frac{\mathrm{sen}(xy)}{xy} - 2x^3y^2\frac{(1-\cos(xy))}{x^2y^2}}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)\mathrm{sen}(xy) - 2y(1-\cos(xy))}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{x^2y(x^2+y^2)\frac{\mathrm{sen}(xy)}{xy} - 2x^2y^3\frac{(1-\cos(xy))}{x^2y^2}}{(x^2+y^2)^2};$$

si nota quindi che tali derivate sono continue, e quindi si poteva anche applicare direttamente il Teorema del differenziale totale.

Soluzione 3.6 La funzione data è sicuramente continua in tutti i punti eccettuati l'origine e quelli per cui

$$x^2y^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

In questi ultimi punti non c'è speranza che la funzione sia continua in quanto

$$x^2 + y^2 \neq 0$$

e il numeratore nella funzione tende ad infinito.

Per studiare la continuità della funzione nell'origine, in proviamo a passare alle coordinate polari;

$$\tilde{f}(\varrho,\vartheta) = \varrho^2\mathrm{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta\,\frac{tan(\varrho^4\mathrm{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta)}{\varrho^4\mathrm{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta}.$$

Siccome per $\varrho \to 0$ la quantità $\varrho^4\mathrm{sen}^2\vartheta\cos^2\vartheta$ tende a zero, l'ultima frazione tende ad 1 e quindi

$$||\tilde{f}(\varrho,\vartheta)| \leq \varrho^2$$

e quindi otteniamo che la funzione è continua in $(0,0)$. Si noti tra l'altro che la convergenza di $\tilde{f}$ a 0 è dell'ordine di ϱ^2.

Scriviamo ora le derivate parziali, dove hanno senso, di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2)(1+\tan^2(x^2y^2)) - 2x\tan(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^2y(x^2+y^2)(1+\tan^2(x^2y^2)) - 2y\tan(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tali funzioni sono ancora definite e continue eccetto che nell'origine e per

$$x^2y^2 = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Dato che in questi ulitmi punti non si ha neanche la continuità non avrà senso andare a studiare la derivabilità. Per la derivata in $(0,0)$, si può notare che ad esempio per la derivata parziale rispetto ad x, passando alle coordinate polari, si trova che

$$\left|\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(\varrho,\vartheta)\right| \leq c\varrho,$$

e quindi la derivata tende a 0 per ϱ che tende a zero. Quindi la derivata parziale in $(0,0)$ deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Stesso ragionamento si ripete per la derivata rispetto ad y e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

In realtà quello che bisognerebbe fare per il calcolo della derivata parziale in $(0,0)$ sarebbe il calcolo mediante la definizione di derivata parziale come rapporto incrementare. Dato che $f(h,0) = 0$, si ottiene subito che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Questo conto nel nostro caso si può evitare in quanto abbiamo scoperto che la derivata parziale è ben definita intorno a $(0,0)$ e tale funzione è continua fino a zero; come applicazione del Teorema di Rolle si ottiene quindi che la derivata parziale in $(0,0)$ esiste ed è pari al limite. Si osservi infine che le derivate parziali tendono a zero nell'origine con convergenza di rdine ϱ.

Per quanto riguarda le derivate successive troviamo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\Big(&(1+\tan^2(x^2y^2))(x^2+y^2)(8x^2y^4\tan(x^2y^2) + 2y^4 - 6x^2y^2) + \\ &+ (6x^2 - 2y^2)\tan(x^2y^2)\Big),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{8xy\tan(x^2y^2)\Big((1+\tan^2(x^2y^2))(x^2+y^2)^2x^2y^2 + 1\Big)}{(x^2+y^2)^3},$$

mentre

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\Big(&(1+\tan^2(x^2y^2))(x^2+y^2)(8x^4y^2\tan(x^2y^2) + 2x^4 - 6x^2y^2) + \\ &+ (6y^2 - 2x^2)\tan(x^2y^2)\Big),\end{aligned}$$

mentre per le derivate in $(0,0)$ si trova che

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

Si vede subito che le derivate seconde non sono continue in quanto ad esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(mx,x) \frac{m^4(2m^2-6)}{(1+m^2)^3},$$

mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,mx) = \frac{8m^3}{(1+m^2)^3}.$$

Questo non implica che la funzione non sia differenziabile due volte in $(0,0)$; per dimostrare questo bisogna dimostrare che le funzioni $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ non siano differenziabili in $(0,0)$. Consideriamo ad esempio la funzione

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y);$$

sappiamo che $g(0,0) = 0$ e che $\nabla g(0,0) = (0,0)$; verifichiamo la non differenziabilità di g mostrando che non esiste il limite

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to 0} \frac{g(x,y) - g(0,0) - \nabla g(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\qquad = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{2xy^2(x^2+y^2)(1+\tan^2(x^2y^2)) - 2x\tan(x^2y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

Prendendo ad esempio $y = mx$ si trova che

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x,mx)}{(1+m^2)^{\frac{1}{2}}|x|} = \pm\frac{2m^4}{(1+m^2)^{\frac{5}{2}}},$$

da cui la non esistenza del limite dipendente tale limite dal valore di m.

Soluzione 3.7 La funzione data è continua per quanto visto nel capitolo sulle funzioni continue. Per quanto riguarda la derivabilità, studiamo solo il caso $x, y > 0$; abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{x\to 0^+}(y_0 \ln xy_0) = -\infty,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{y\to 0^+}(x_0 \ln x_0 y) = -\infty,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Quindi la funzione non è derivabile nei punti del tipo $(x_0, 0)$ e $(0, y_0)$, mentre lo è in $(0,0)$. Questo vuol dire che se vogliamo studiare la differenziabilità di f, possiamo sperare di averla solo in $(0,0)$. Scrivendo la definizione di differenziabilità, si tratta di verificare che

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{hk \ln hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Ma questo lo si può verificare ancora passando alle coordinate polari e procedendo come in precedenza. Per quanto riguarda infine la continuità delle derivate parziali, notiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\ln xy + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\ln xy + x,$$

da cui la facile verifica della continuità delle derivate parziali.

Soluzione 3.8 La funzione è continua per quanto detto nel capitolo sulle funzioni continue. Per la derivabilità, si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\left(\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left(\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Una verifica diretta mostra la non continuità delle derivate parziali nell'origine, mentre la funzione risulta differenziabile in quanto

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{f(h,k)-f(0,0)-Df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0}\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Si noti che questo non è in contraddizione con nessun teorema visto a lezione, in quanto il teorema del differenziale totale afferma che se le derivate parziali esistono e sono continue allora la funzione è differenziabile, ma non si può dire nulla sulla continuità delle derivate parziali nel caso in cui la funzione sia differenziabile.

Soluzione 3.9 Per quanto riguarda la continuità, derivabilità e differenziabilità di tale funzione non c'è nessun problema in quanto la funzione data altro non è che un polinomio (se non si è convinti di questo fare i conti usando le definizioni). Per quanto riguarda il gradiente della funzione in $(2,3)$, esso è dato semplicemente da

$$\nabla f(2,3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,3), \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\right) = (9,12).$$

Per quanto riguarda l'ultima parte dell'esercizio, calcoliamo le derivate direzionali utilizzando la definizione; quindi sia $v=(v_1,v_2)$ una direzione (cioè $v_1^2+v_2^2=1$), e calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv_1,y+tv_2)-f(x,y)}{t} = y^2v_1 + 2xyv_2.$$

In particolare, nel punto $(2,3)$ otteniamo che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(2,3) = 9v_1 + 12v_2.$$

Per vedere quale di queste direzioni la derivata direzionale è massima o minima si tratta di trovare i massimi e minimi della funzione

$$g(v_1,v_2) = 9v_1 + 12v_2$$

sotto il vincolo $v_1^2+v_2^2=1$. Tale vincolo altro non è che la circonferenza di raggio 1 che può essere parametrizzata mediante l'angolo ϑ che la direzione v forma con l'asse delle ascisse. Quindi, scrivendo in coordinate polari $v_1=\cos\vartheta$, $v_2=\sin\vartheta$, otteniamo la funzione di una sola varaibile reale

$$h(\vartheta) = 9\cos\vartheta + 12\sin\vartheta;$$

tale funzione assume massimo per ϑ determinato dalle condizioni

$$\cos\vartheta = \frac{3}{v}\mathrm{sen}\vartheta.$$

Utilizzando anche la relazione fondamentale che lega seno e coseno $\cos^2\vartheta + \mathrm{sen}^2\vartheta = 1$, si determinano i valori

$$\cos\vartheta = \pm\frac{3}{5}, \qquad \mathrm{sen}\vartheta = \pm\frac{4}{5}.$$

Per tali valori si ha $v_1 = \cos\vartheta = \pm 3/5$, $v_2 = \sin\vartheta = \pm 4/5$. Quindi il gradiente della funzione f corrisponde al vettore con direzione la massima pendenza della derivata parziale e con modulo pari al valore massimo delle derivate parziali.

Per l'equazione dep piano tangente, usiamo la formula

$$z = f(2,3) + \nabla f(2,3)\cdot(x-2, y-3) = 9x + 12y - 36,$$

da cui il piano tangente di equazione $9x + 12y - z = 36$ che è il piano ortogonale al vettore $(9, 12, -1)$ e passante per $(2, 3, 18)$. La retta normale sarà infine parametrizzata da

$$r(t) = (2,3,18) + t(9,12,-1) = (2+9t, 3+12t, 18-t),$$

cioè la retta

$$\begin{cases} x + 9y = 164 \\ y + 12z = 219. \end{cases}$$

Soluzione 3.10 Nel primo caso, si ha

$$\nabla f(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}(x,y);$$

la direzione è data da (x, y) ma il verso è opposto (quindi il gradiente è radiale), mentre il modulo è dato da

$$\|\nabla f(x,y)\| = \frac{1}{x^2+y^2}$$

che è l'inverso del quadrato della distanza dall'origine. Nel secondo caso il gradiente è dato da

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x).$$

Quindi il modulo è dato da

$$\|\nabla f(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

cioè l'inverso della distanza dall'origine, mentre la direzione è ortogonale a (x, y); il campo $\nabla f(x, y)$ si dice quindi rotazionale ed ha ad esempio la proprietà che se $\varphi(t) = (r\cos t, r\mathrm{sen}t)$, $t \in [0, 2\pi]$, è la circonferenza di raggio r, allora l'integrale curvilineo di ∇f lungo φ (lavoro del campo magnetico) è dato da

$$\int_\varphi \nabla f \cdot d\vec{s} = -2\pi.$$

Soluzione 3.11

1. La funzione data è definita e continua per $1-2x^2-4y^2 \geq 0$, cioè all'interno dell'ellisse di equazione $2x^2+4y^2=1$ e di semi–assi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{2}$. Le derivate parziali di f esistono e sono continue per $2x^2+4y^2<1$ con
$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-2x^2-4y^2}}(-2x,-4y);$$
la funzione è quindi differenziabile all'interno dell'ellisse $\{2x^2+4y^2<1\}$. Si può anche dimostrare che le derivate parziali non esistono nei punti $2x^2+4y^2=1$ e quindi in tali punti la funzione non può essere differenziabile.

2. La derivata direzionale in direzione v nel punto $(0,1/4)$ è data da
$$\frac{\partial f}{\partial v}\left(0,\frac{1}{4}\right) = \nabla f\left(0,\frac{1}{4}\right)\cdot v = \left(0,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot v = -\frac{2v_2}{\sqrt{3}}.$$

3. L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ è data da
$$z = f(x_0,y_0) - \frac{1}{\sqrt{1-2x_0^2-4y_0^2}}(2x_0,4y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0);$$
nel punto $(0,1/4)$ tale equazione diventa
$$2y+\sqrt{3}z=2,$$
cioè il piano ortogonale al vettore $(0,2,\sqrt{3})$ e passante per il punto $(0,1/4,\sqrt{3}/2)$. Per quanto riguarda il punto $(1/4,1/4\sqrt{2})$ si ottiene il piano
$$x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z=2,$$
cioè il piano passante per $(1/4,1/4\sqrt{2},\sqrt{3}/2)$ ed ortogonale a $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$.

4. Gli insiemi di livello sono determinati dai luoghi delle soluzioni delle equazioni
$$\sqrt{1-2x^2-4y^2}=c;$$
si deve quindi avere $c\geq 0$ ed elevando al quadrato si ricava
$$2x^2+4y^2=1-c^2,$$
e quindi $c\leq 1$; questo significa che la funzione assume solo valori tra 0 e 1. Per $c=1$ il livello è dato dal punto $(0,0)$, mentre per $0\leq c<1$ il livello è dato dall'ellisse centrata nell'origine e di semi–assi $\frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\sqrt{1-c^2}}{2}$. Se ne deduce infine che
$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto in tutti i punti per chi } 2x^2+4y^2=1,$$
mentre
$$\max_E f = 1, \qquad \text{assunto in } (0,0).$$

5. Per $c = \sqrt{3}/2$ l'insieme di livello è dato dall'ellisse
$$8x^2 + 16y^2 = 1$$
di semi–assi $1/2\sqrt{2}$ e $1/4$; l'ultimo punto dell'eserczio chiede la direzione ortogonale all'ellisse nel punto $(1/4, 1/4\sqrt{2})$. Siccome il gradiente della funzione è ortogonale ai suoi livelli, tale direzione (solitamente per direzione si intende un vettore di norma 1, quindi dobbiamo normalizzare il gradiente) sarà data da
$$\nu = \frac{\nabla f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)}{\|\nabla f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\|} = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Soluzione 3.12

1. Siccome
$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right),$$
la continuità delle derivate parziali implica la differenziabilità di f in ogni punto e quindi l'esistenza del piano tangente. Nel punto $(1,1)$ tale piano ha equazione
$$z = f(1,1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot (x-1, y-1),$$
cioè
$$x + y - \sqrt{3}z + 1 = 0,$$
mentre in $(2,1)$ si avrà
$$2x + y - \sqrt{6}z + 1 = 0.$$

2. Dato che
$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}, -8y\right),$$
le derivate sono continue per $|x| < 1/\sqrt{2}$ e quindi in tali punti f risulta differenziabile; il piano tangente esiste quindi in ogni punto con $|x| < 1/\sqrt{2}$ ed in $(1/2,0)$ avrà equazione
$$\sqrt{2}x + z = \sqrt{2},$$
mentre in $(-1/4, 2)$
$$\sqrt{2}x - 16\sqrt{7}y - \sqrt{7}z + 2\sqrt{2} + 16\sqrt{7} = 0.$$

3. Per questa funzione funzione notiamo che $f(\pi/3, -1) = -\sqrt{3}/2$ mentre
$$\nabla f(x,y) = \cos(xy)(y,x), \qquad \nabla f(\pi/3, -1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right),$$
quindi l'eqauzione del piano tangente al grafico si determina usando la formula
$$z = f\left(\frac{\pi}{3}, -1\right) + \nabla f\left(\frac{\pi}{3}, -1\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}, y+1\right),$$

da cui si ricava l'equazione

$$3x + \pi y + 6z = 2\pi - 3\sqrt{3}.$$

Per l'equazione della retta normale abbiamo che

$$r(t) = \left(\frac{\pi}{3}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + t\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{6}, 1\right) = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{t}{2}, -1 - \frac{\pi}{6}t, -\frac{\sqrt{3}}{2} + t\right),$$

che in forma cartesiana determina la retta

$$\begin{cases} 2x - z = \dfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3} \\ \\ 6y + \pi z = -6 - \dfrac{\pi}{2}\sqrt{3}. \end{cases}$$

Per le rette ortogonale e tangente al livello di f si usa, per la retta ortogonale la formula

$$r(t) = \left(\frac{\pi}{3}, -1\right) + t\nabla\left(\frac{\pi}{3}, -1\right) = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{t}{2}, -1 + \frac{\pi}{6}t\right),$$

oppure il fatto che la retta deve essere parallela al vettore $(-1/2, \pi/6)$, quindi ortognale a $(\pi/6, 1/2)$, da cui

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}, y + 1\right) = 0,$$

che produce la retta

$$\pi x + 3y = \frac{\pi}{3} + 3.$$

Per la retta tangente usiamo la formula

$$\left(-1, \frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}, y + 1\right) = 0$$

che produce l'equazione

$$3x - \pi y = 2\pi.$$

4. Per questa funzione, dato che $g(1, 1, 1) = 1/2$ e

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{z}{y + z}, -\frac{xz}{(y + z)^2}, \frac{xy}{(y + z)^2}\right), \qquad \nabla g(1, 1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

troviamo che l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico è data da

$$w = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

da cui

$$2x - y + z - w = 0.$$

Per la retta ortogonale useremo la parametrizzazione

$$\begin{aligned} r(t) =& (1, 1, 1, g(1, 1, 1)) + t(-\nabla g(1, 1, 1), 1) = \left(1, 1, 1, \frac{1}{2}\right) + t\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1\right) \\ =& \left(1 - \frac{t}{2}, 1 + \frac{t}{4}, 1 - \frac{t}{4}, \frac{1}{2} + t\right) \end{aligned}$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} 4x + 2w = 5 \\ 8y - 2w = 7 \\ 8z - 2w = 9. \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'insieme di livello, la retta ortognonale sarà parametrizzata da

$$r(t) = (1,1,1) + t\nabla g(1,1,1) = \left(1 + \frac{t}{2}, 1 - \frac{t}{4}, 1 + \frac{t}{4}\right)$$

che in forma cartesiana è data da

$$\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x + 2z = 1. \end{array}$$

Per il piano tangente usiamo la formula

$$\nabla g(1,1,1)(x-1, y-1, z-1) = 0$$

in modo da ottenere l'equazione

$$2x - y + z = 2.$$

Soluzione 3.13 Iniziamo col calcolare le derivate parziali, dove sono definite, con le usuali regole di derivazione; otteniamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y-1}{x}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{(y-1)^2}}.$$

La derivata rispetto ad x è continua per $x \neq 0$, mentre la derivata rispetto ad y è continua per $y \neq 1$. Quindi la funzione, che è definita in tutto $\mathbb{R}^2$, è sicuramente differenziabile nell'insieme

$$E = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 1\}.$$

Vediamo cosa succede ad esempio nei punti con $x = 0$; dobbiamo distinguere i casi $y = 1$ e $y \neq 1$. Nel primo caso otteniamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = 0,$$

mentre nel secondo caso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^2(y-1)}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{y-1}{h}}$$

e tale limite non esiste. Ne deduciamo che per $y \neq 1$ non possiamo neanche scrivere il gradiente della funzione e quindi la funzione non sarà differenziabile.

Per il calcolo della derivata parziale rispetto ad y procediamo in modo analogo; distinguiamo anche qui i casi $x = 0$ e $x \neq 0$. Nel primo caso abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = 0,$$

mentre nel secondo caso

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,1+h)-f(x,1)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2h}}{h} = \lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{x^2}{h^2}}$$

e anche questo limite non esiste. Quindi l'unico punto residuo in cui andare a verificare la differenziabilità è il punto $(0,1)$; qui abbiamo che il gradiente è nullo, quindi lo studio della differenziabilità si riduce allo studio del limite

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{f(h,1+k)-f(0,1)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to 0}\frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Si nota però che prendendo ad esempio $k = mh$, il precedente limite diventa

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{m}h}{\sqrt{1+m^2}|h|},$$

da cui la non esistenza del limite e la non differenziabilità di f in $(0,1)$.

La non differenziabilità in $(0,1)$ si deduce anche considerando la derivata direzionale di f in $(0,1)$ e direzione $v = (v_1, v_2)$;

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1, 1+hv_2)-f(0,1)}{h} = \sqrt[3]{v_1^2v_2};$$

dato che questo risultato non è lineare in v, allora la funzione non può essere differenziabile, nonostante esistano tutte le derivate direzionali.

Soluzione 3.14 Scriviamo direttamente il gradiente della funzione;

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{x(1-y^2+x^2)}{(1+x^2+y^2)^2},\right).$$

Quindi, dato che $\nabla f(1,1) = (\frac{1}{9}.\frac{1}{9})$, troviamo che l'equazione del piano tangente sarà:

$$(-\nabla f(1,1),1)\cdot(x-1, y-1, z-f(1,1)) = 0,$$

cioè il piano di equazione

$$x + y - 9z + 1 = 0.$$

Soluzione 3.15 Calcoliamo gradiente e matrice Hessiana;

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2+4xy+3y^2+yz, 2x^2+6xy-12y^2+xz, xy),$$

mentre

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x+4y & 4x+6y+z & y \\ 4x+6y+z & 6x-24y & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$f(1,2,1) = -13, \qquad \nabla f(1,2,1) = (25,-33,2), \qquad Hf(1,2,1) = \begin{pmatrix} 14 & 17 & 2 \\ 17 & -42 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

troviamo che

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = & -13 + 25(x-1) - 33(y-2) + 2(z-1) + \\ & + 7(x-1)^2 - 21(y-2)^2 + \\ & + 17(x-1)(y-2) + 2(x-1)(z-1) + (y-2)(z-1) + \\ & + o(\|(x-1, y-2, z-1)\|^2). \end{aligned}$$

Soluzione 3.16 Per le funzioni date abbiamo che

$$g \circ f(x,y,z) = (x^2y + y^2z^4, x^4y^4z^4, x^4y^2 + yz^2),$$

da cui

$$Dg \circ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 + 2yz^4 & 4x^2z^3 \\ 4x^3y^4z^4 & 4x^4y^3z^4 & 4x^4y^4z^3 \\ 4x^3y^2 & 2x^4y + z^2 & 2yz \end{pmatrix}.$$

La stessa matrice si ottiene se si calcolano

$$Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{pmatrix}, \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

e si effettua il prodotto

$$Dg(x^2y, yz^2) \cdot Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2yz^2 \\ 2x^2y^3z^4 & 2x^4y^3z^2 \\ 2x^2y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{pmatrix}$$

Analogamente si trova che

$$f \circ g(x,y) = (x^4y^2 + 2x^3y^4 + x^2y^6, x^6y^2 + 2x^4y^3 + x^2y^4)$$

da cui

$$Df \circ g(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 6x^2y^4 + 2xy^6 & 2x^4y^2 + 8x^3y^3 + 6x^2y^5 \\ 6x^5y^2 + 8x^3y^3 + 2xy^4 & 2x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 \end{pmatrix}$$

che si ottiene anche come prodotto di

$$\begin{aligned} & Df(x+y^2, x^2y^2, x^2+y) \cdot Dg(x,y) = \\ & = \begin{pmatrix} 2x^3y^2 + 2x^2y^4 & x^2 + 2xy^2 + y^4 & 0 \\ 0 & x^4y^2 & 2x^4y^2 + 2x^2y^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2xy^2 & 2x^2y \\ 2x & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluzione 3.17 Iniziamo col scrivere esplicitamente la funzione h;

$$\begin{aligned} h(x,y,z) = & f \circ g(x,y,z) = f(z(x^2+y^2), z^2) \\ = & (e^{z(x^2+y^2)} \sin(z^2), e^{z(x^2+y^2)} \cos(z^2), z^3(x^2+y^2)), \end{aligned}$$

da cui la matrice Jacobiana $Dh(x, y, z)$ che sarà data da

$$\begin{pmatrix} 2xze^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) & 2yze^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}((x^2+y^2)\sin(z^2)+2z\cos(z^2)) \\ \\ 2xze^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) & 2yze^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}((x^2+y^2)\cos(z^2)-2z\sin(z^2)) \\ \\ 2xz^3 & 2yz^3 & 3z^2(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Per verificare la formula ci calcoliamo ora le matrici di Jacobiane di f e g:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \\ y & x \end{pmatrix},$$

mentre

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz & 2yz & x^2+y^2 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

Si tratta quindi di verificare che il prodotto riga per colonna della matrice

$$Df(g(x, y, z)) \cdot Dg(x, y, z)$$

corrisponda alla matrice precedentemente trovata;

$$\begin{pmatrix} e^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) & e^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) \\ e^{z(x^2+y^2)}\cos(z^2) & -e^{z(x^2+y^2)}\sin(z^2) \\ z^2 & z(x^2+y^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2xz & 2yz & x^2+y^2 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix};$$

questa verifica è immediata.

Per verificare la seconda parte, consideriamo la funzione

$$H(x, y) = g(f(x, y)) = (xye^{2x}, x^2y^2),$$

la cui matrice Jacobiana è data da

$$DH(x, y) = \begin{pmatrix} ye^{2x}(1+2x) & xe^{2x} \\ \\ 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix}.$$

La verifica si effettua qui considerando $Dg(f(x, y)) \cdot Df(x, y)$, cioè il prodotto;

$$\begin{pmatrix} 2xye^x \sin y & 2xye^x \cos y & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \\ y & x \end{pmatrix};$$

anche qui la verifica è immediata.

Soluzione 3.18 L'esercizio chiede di verificare la validità dell'espressione

$$\nabla(f \circ g)(x, y) = \nabla f(g(x, y)) \cdot Dg(x, y).$$

1. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x,y) = (2xy\cos(x^2y), x^2\cos(x^2y)), \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -1/y^2 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\nabla f(g(x,y)) &= \nabla f(xy^2, x^2+1/y)\cdot Dg(x,y)\\ &= \Big(2xy^2\Big(x^2+\frac{1}{y}\Big)\cos\Big((xy^2)^2\Big(x^2+\frac{1}{y}\Big)\Big), (xy^2)^2\cos\Big((xy^2)^2\Big(x^2+\frac{1}{y}\Big)\Big)\Big).\end{aligned}$$

In definitiva

$$\nabla f(g(x,y))\cdot Dg(x,y) = \cos(x^4y^4+x^2y^3)(4x^3y^4+2xy^3, 4x^4y^3+3x^2y^2).$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(xy^2, x^2+1/y) = \mathrm{sen}(x^4y^4+x^2y^3),$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \cos(x^4y^4+x^2y^3)(4x^3y^4+2xy^3, 4x^4y^3+3x^2y^2).$$

2. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 2x\cos y & -x^2\mathrm{sen}y \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\nabla f(g(x,y)) =& \nabla f(e^{xy}, 1+x^2\cos y)\cdot Dg(x,y)\\ =& \frac{\big(ye^{2xy}+2x\cos y+2x^3\cos^2 y, xe^{2xy}-x^2\mathrm{sen}y - x^4\mathrm{sen}y\cos y\big)}{\sqrt{e^{2xy}+(1+x^2\cos y)^2}}.\end{aligned}$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(e^{xy}, 1+x^2\cos y) = \sqrt{e^{2xy}+(1+x^2\cos y)^2},$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \frac{\big(ye^{2xy}+2x\cos y(1+x^2\cos^2 y), xe^{2xy}-x^2\mathrm{sen}y(1+x^2\mathrm{sen}y)\big)}{\sqrt{e^{2xy}+(1+x^2\cos y)^2}}.$$

3. Abbiamo anzitutto;

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x), \qquad Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\nabla f(g(x,y)) =& \nabla f(2x+y, 3x-y)\cdot Dg(x,y)\\ =& \frac{5}{13x^2+2y^2-2xy}(-y,x).\end{aligned}$$

Se invece scriviamo

$$f(g(x,y)) = f(2x+y, 3x-y) = \arctan\frac{2x+y}{3x-y}$$

si ottiene ancora

$$\nabla f(g(x,y)) = \frac{5}{13x^2+2y^2-2xy}(-y,x).$$

Soluzione 3.19 Riscrivere la funzione data in coordinate polari significa effettuare il cambio di variabili $(x,y) = F(\varrho,\vartheta) = (\varrho\cos\vartheta, \varrho\mathrm{sen}\vartheta)$; si ottiene così la funzione

$$\tilde f(\varrho,\vartheta) = f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\mathrm{sen}\vartheta) = \varrho^2\cos\vartheta\mathrm{sen}\vartheta.$$

Si ottiene quindi

$$\nabla\tilde f(\varrho,\vartheta) = (\varrho\mathrm{sen}2\vartheta, \varrho^2\cos 2\vartheta).$$

Utilizzando invece la formula per il gradiente della funzione composta

$$\tilde f(\varrho,\vartheta) = f(F(\varrho,\vartheta))$$

si ottiene invece, dato che $\nabla f(x,y) = (y,x)$

$$\begin{aligned}\nabla\tilde f(\varrho,\vartheta) =& \nabla f(F(\varrho,\vartheta))DF(\varrho,\vartheta)\\ =&(\varrho\mathrm{sen}\vartheta, \varrho\cos\vartheta)\cdot\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\varrho\mathrm{sen}\vartheta\\ \mathrm{sen}\vartheta & \varrho\cos\vartheta\end{pmatrix} = (\varrho\mathrm{sen}2\vartheta, \varrho^2\cos 2\vartheta)\end{aligned}$$

Soluzione 3.20 Stiamo considerando il grafico della funzione

$$f(x,y) = x^2+y^2-1;$$

il piano tangente al suo grafico è dato dall'equazione

$$z = x_0^2+y_0^2-1+(2x_0,2y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$$

o equivalentemente

$$-2(x_0,y_0)\cdot(x,y)+z = x_0^2+y_0^2-1-2x_0^2-2y_0^2.$$

La direzione ortogonale è quindi individuata dal vettore $(-2x_0,-2y_0,1)$; la retta normale è parametrizzata da

$$r(t) = (x_0,y_0,x_0^2+y_0^2)+t(-2x_0,-2y_0,1) = ((1-2t)x_0,(1-2t)y_0,x_0^2+y_0^2-1+t).$$

Tale retta passa per l'origine al tempo t_0 per cui $r(t_0) = (0,0,0)$, determinato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases}(1-2t_0)x_0 = 0\\ (1-2t_0)y_0 = 0\\ x_0^2+y_0^2-1+t_0 = 0\end{cases}$$

che ha come soluzioni $(x_0,y_0) = (0,0)$, $t_0 = 1$ e $t_0 = 1/2$ con $x_0^2+y_0^2 = 1/2$, cioè i punti $1/\sqrt{2}(\cos\vartheta,\mathrm{sen}\vartheta)$ della circonferenza di raggio $1/\sqrt{2}$ centrata nell'origine. Le rette cercate sono quindi date da

$$r_1(t) = (0,0,-1)+t(0,0,1), \quad r_\vartheta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta,\mathrm{sen}\vartheta,-1/\sqrt{2})+t(-\sqrt{2}\cos\vartheta,-\sqrt{2}\mathrm{sen}\vartheta,1).$$

L'angolo che tali rette formano con l'asse delle x è dato da

$$(0,0,1)\cdot(1,0,0)=0, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2}\cos\vartheta,-\sqrt{2}\mathrm{sen}\vartheta,1)\cdot(1,0,0)=-\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\vartheta.$$

Soluzione 3.21 Siccome E è espresso come livello zero della funzione $g(x,y)=2x^2+y^2-1$, la direzione normale uscente da E è individuata da

$$\nu=\frac{\nabla g(x,y)}{\|g(x,y)\|}=\frac{(2x,y)}{\sqrt{4x^2+y^2}}.$$

La derivata di f in tale direzione è data da

$$\frac{\partial f}{\partial\nu}(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\nu=\frac{1}{\sqrt{4x^2+y^2}}\left(-\frac{y^2}{x^2},\frac{2y}{x}\right)\cdot(2x,y)=0.$$

Soluzione 3.22 Dobbiamo scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

nel punto $(-1,2)$; tale piano è dato dall'equazione

$$2x-4y+z+5=0$$

che è un piano ortogonale a $(2,-4,1)$ e passante per $(-1,2,5)$. La retta normale è quindi parametrizzata da

$$r(t)=(-1,2,5)+t(2,-4,1)$$

o in forma cartesiana

$$\begin{cases} x-2z=-11\\ y+4z=22.\end{cases}$$

Per la seconda parte dell'esercizio, il piano $z=3x+4y$ è ortogonale a $(3,4,-1)$. Cerchiamo quindi i punti in cui il vettore $(-\nabla f(x,y),1)$ è parallelo a tale vettore; risolviamo quindi l'equazione

$$\lambda(3,4,-1)=(-\nabla f(x,y),1)=(-2x,-2y,1).$$

Tale sistema ha soluzione $\lambda=-1$ e $(x,y)=(3/2,2)$; in tale punto il piano tangente ha equazione

$$12x+16y-4z+25=0,$$

mentre la retta normale è parametrizzata da

$$r(t)=\left(\frac{3}{2},2,\frac{25}{4}\right)+t(3,4,-1).$$

Soluzione 3.23 Il dominio della funzione è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} y>0\\ x\geq-\frac{\ln y}{y};\end{cases}$$

Tale dominio è raffigurato in Figura 3.4. La funzione è di classe C^1 per $x>-\frac{\ln y}{y}$; in tali

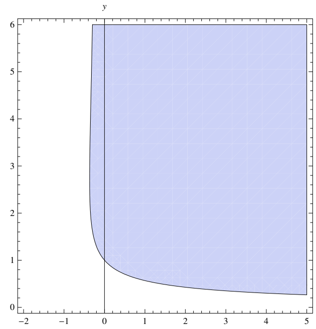


Figura 3.4: Dominio della figura data.

punti la funzione è quindi differenziabile. Vediamo se possiamo ricavare la differenziabilità per i punti di $x = -\frac{\ln y}{y}$; sia quindi (x_0, y_0) tale che $x_0 y_0 + \ln y_0 = 0$ e calcoliamo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{x_0 y_0 + h y_0 + \ln y_0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h y_0}}{h}$$

e tale limite non esiste. Quindi non possiamo scrivere il gradiente in (x_0, y_0), cioè f non sarà differenziabile in tali punti.

Nei punti $xy + \ln y > 0$ abbiamo che

$$\nabla f(xy) = \frac{1}{2\sqrt{xy + \ln y}} \left(y, x + \frac{1}{y} \right),$$

da cui $\nabla f(2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 3)$; l'equazione del piano tangente è quindi dato da $z = f(2, 1) + \nabla f(2, 1) \cdot (x - 2, y - 1)$, cioè

$$x + y - 2z\sqrt{2} = 1.$$

La retta normale è invece parametrizzata da $r(t) = (2, 1, f(2, 1)) + t(-\nabla f(2, 1), 1)$, cioè la retta

$$r(t) = \left(2 - \frac{t}{2\sqrt{2}}, 1 - \frac{3t}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2} + t \right),$$

che in forma cartesiana diventa

$$\begin{cases} 2x\sqrt{2} + z = 5\sqrt{2} \\ 2y\sqrt{2} + 3z = 5\sqrt{2}. \end{cases}$$

Soluzione 3.24 Dato che le funzioni date sono di classe C^2, possiamo studiare la loro convessità studianto le loro matrici Hessiane. Troviamo che

$$Hf(x, y) = e^{xy} \begin{pmatrix} y(2 + xy) & x(2 + xy) \\ x(2 + xy) & x^3 \end{pmatrix};$$

quindi dato che

$$\det Hf(x, y) = -2x^2 e^{2xy}(2 + xy), \qquad \mathrm{Tr} Hf(x, y) = e^{xy}(x^3 + 2y + xy^2),$$

notiamo subito che se $2+xy>0$ la funzione non può essere convessa e neanche concava. Se invece $2+xy \leq 0$, otterremo convessità se la traccia è positiva. Discutiamo quindi il segno della traccia.

La traccia è positiva se e solo se

$$xy^2+2y+x^3 \geq 0;$$

stiamo quindi discutendo il segno di un polinomio di secondo grado in y con coefficienti che dipendono da x; il discriminante associato a tale polinomio è dato da

$$\Delta = -1-x^4 \leq -1,$$

quindi fissato x il polinomio non si annulla mai; sarà sempre positivo se $x>0$, mentre sarà negativo se $x<0$. In definitiva abbiamo trovato che

convessa) se $2+xy \leq 0$ e $x \geq 0$;

concava) se $2+xy \leq 0$ e $x \leq 0$.

Non sarà né concava né convessa negli altri punti.

Per quanto riguarda la seconda funzione abbiamo che

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2+12 \end{pmatrix},$$

quindi

$$\det Hg(x,y) = 12y^2(1-x^2), \qquad \mathrm{Tr} Hg(x,y) = 2x^2+2y^2+12 \geq 0.$$

La funzione non sarà mai concava quindi e sarà convessa sotto la condizione $x^2 \leq 1$.

Soluzione 3.25 Iniziamo col notare che

$$DG(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

quindi

$$\begin{aligned}
\nabla h(x,y) &= \nabla f(x,y,g(x,y)) \cdot DG(x,y) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y)), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right).
\end{aligned}$$

In particolare, se ne deduce che se g è la funzione implicita, allora

$$h(x,y) = f(x,y,g(x,y)) = 0,$$

da cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))} \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}.
\end{aligned}$$

Soluzione 3.26 La matrice Jacobiana di G è data da

$$DG(\varrho, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \mathrm{sen}\varphi & -\varrho \mathrm{sen}\vartheta \mathrm{sen}\varphi & \varrho \cos\vartheta \cos\varphi \\ \mathrm{sen}\vartheta \mathrm{sen}\varphi & \varrho \cos\vartheta \mathrm{sen}\varphi & \varrho \mathrm{sen}\vartheta \cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\varrho \mathrm{sen}\varphi \end{pmatrix}.$$

Quindi, se g è la rappresentazione di una funzione in coordinate sferiche e h la rappresentazione della stessa funzione in coordinate cartesiane, denotando con $F = G^{-1}$ la mappa inversa delle coordinate sferiche, cioè la trasformazione dalle coordinate cartesiane a quelle sferiche, le funzioni h e g sono legate da $h(x, y, z) = g \circ F(x, y, z)$. Otterremo quindi che

$$\nabla h(x, y, z) = \nabla g(F(x, y, z)) \cdot DF(x, y, z).$$

In definitiva si trova che valgono le seguenti formule per le derivate;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \cos\vartheta \mathrm{sen}\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varrho} - \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\mathrm{sen}\vartheta}{\mathrm{sen}\varphi} \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} + \dfrac{1}{\varrho} \cos\vartheta \cos\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \mathrm{sen}\vartheta \mathrm{sen}\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varrho} + \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\cos\vartheta}{\mathrm{sen}\varphi} \dfrac{\partial}{\partial \vartheta} + \dfrac{1}{\varrho} \mathrm{sen}\vartheta \cos\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z} = \cos\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varrho} - \dfrac{1}{\varrho} \mathrm{sen}\varphi \dfrac{\partial}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Soluzione 3.27 La funzione non è di classe C^2 in tutto il suo dominio, ma lo è nell'insieme

$$E = \{(x, y) : x > 1, y \neq 0, 5\}.$$

In tale insieme faremo le derivate della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{y^2 - 5y} - (y - 2\log(x-1))^2 & \text{per } y < 0, y > 5 \\[1ex] e^{-y^2 + 5y} - (y - 2\log(x-1))^2 & \text{per } 0 < y < 5. \end{cases}$$

Consideriamo solo il caso $y < 0$ e $y > 5$, nell'altro caso basterà cambiare un segno; abbiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4\frac{(y - 2\log(x-1))}{x-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2y - 5)e^{y^2 - 5y} - 2(y - 2\log(x-1)),$$

e quindi

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{4(y + 2 - \log(x-1))}{(x-1)^2} & \dfrac{4}{x-1} \\[3ex] \dfrac{4}{x-1} & e^{y^2 - 5y}(4y^2 - 20y + 27) - 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione 3.28 Iniziamo col calcolare

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z).$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y,z) =&\mathrm{div}\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\ =&\frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\ =&\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned}$$

Possiamo anche passare alle coordinate sferiche; utilizzando l'esercizio precedente, si vede che il Laplaciano per una funzione espressa in coordinate sferiche è dato da

$$\begin{aligned}\Delta g(\varrho,\vartheta,\varphi) =&\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varrho^2}(\varrho,\vartheta,\varphi) + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial g}{\partial \varrho}(\varrho,\vartheta,\varphi) + \frac{\cos\vartheta}{\varrho^2 \mathrm{sen}\vartheta}\frac{\partial g}{\partial \vartheta}(\varrho,\vartheta,\varphi)+\\ &+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta^2}(\varrho,\vartheta,\varphi) + \frac{1}{\varrho^2 \mathrm{sen}^2\vartheta}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}(\varrho,\vartheta,\varphi).\end{aligned}$$

Se la funzione è radiale, cioè se $g(\varrho,\vartheta,\varphi) = h(\varrho)$, la precedente espressione si riduce a

$$\Delta h(\varrho) = \frac{1}{\varrho^2}h''(\varrho) + \frac{2}{\varrho}h'(\varrho).$$

Nel nostro caso $h(\varrho) = \varrho$ e quindi $h'(\varrho) = 1$ e $h''(\varrho) = 0$, da cui ritroviamo ancora che

$$\Delta h(\varrho) = \frac{2}{\varrho}.$$

Soluzione 3.29 Per la funzione data abbiamo che il dominio è tutto $\mathbb{R}^2$ e che la matrice Jacobiana è data da

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 6y \\ y & -1+x \end{pmatrix}$$

che ha determinante

$$\mathrm{det}Df(x,y) = -2 + 2x - 6y^2.$$

Tale determinante si annulla per $x = 3y^2 + 1$, che quindi saranno punti in cui la funzione f non è un diffeomorfismo locale. Al di fuori di tali punti siano sicuri di essere in presenza di un diffeomorfismo locale.

Per vedere se tale mappa è anche un diffeomorfismo globale bisogna studiare la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y^2 = u \\ -y + xy = v \end{cases}$$

al variare di $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Notiamo anzitutto che $F(x,0) = (x,0)$ e quindi c'e' una corrispondenza biunivoca tra la retta $\mathbb{R} \times \{0\}$ in se stessa mediante la mappa $x \mapsto \mathbb{R}$.

Se $y \neq 0$, ricavando dalla seconda equazione $x = \frac{v}{y} + 1$, otteniamo nella prima equazione

$$3y^3 + (2-u)y + 2v = 0.$$

Questa è un'equazione di terzo grado in y con coefficienti 3 davanti al cubo e dipendenti da (u,v) negli altri termini. Quindi l'equazione ha sempre almeno una soluzione in y. Tale soluzione è unica se la cubica è strettamente crescente, cioè se la derivata prima è non negativa; la derivata è data da

$$3y^2 + 2 - u$$

e la condizione di iniettività diventa quindi $u \leq 2$. Sotto tale condizione esiste quindi un'unica soluzione $y = g(u, v)$ dell'equazione $3y^3 + (2 - u)y + 2v = 0$. In tal modo si determina quindi un unico x che vale

$$x = \frac{v}{g(x, y)} + 1.$$

Se ne conclude quindi

$$F : \mathbb{R}^2 \to \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq 2\}$$

è iniettiva e suriettiva e quindi un diffeomorfismo globale.