UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Eserciziario di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferara
e-mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1] versione aggiornata al 28 ottobre 2019

Indice

Capitolo 5

Estremi e punti stazionari

5.1 Massimi e minimi su insiemi

Esercizio 5.1 Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = xye^{-xy}$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4, y \geq 0, |xy| \leq 1\}$.

Esercizio 5.2 Trovare i punti di massimo e minimo e i valori massimo e minimo della funzione $f : E \to \mathbb{R}$ dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ e $f(x, y) = x^3 - y^2$.

Esercizio 5.3 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \leq 0, x + y \geq -3\}$.

Esercizio 5.4 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - xy - y$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Esercizio 5.5 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = 3x + y - 2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3, y \leq 2, y \geq 1 - x\}$.

Esercizio 5.6 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x, y) = x^3 + y^2$$

sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5.7 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{2} - y^2$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5.8 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = xy$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5.9 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = 6 - 4x - 3y$$

sull'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 5.10 Calcolare gli assi dell'ellisse $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9\}$.

Esercizio 5.11 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sugli insiemi

- $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - 2z = 4\big\}$;
- $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 1, 2x - y - 3z = 4\big\}$.

Esercizio 5.12 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y,z) = x + 3y - z$$

sull'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0, z = 4x + 4y\}$.

Esercizio 5.13 Trovare massimo e minimo di

$$f(x,y,z) = x + y - z^2$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, 0 \leq z \leq 2\}$.

Esercizio 5.14 Trovare la massima e la minima distanza dall'origine dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leq 3, z - y = 1\}.$$

Esercizio 5.15 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 - y^2}{1 + z^2}$$

nell'insieme (illimitato) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 5.16 Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}$$

sugli insiemi:

- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 2\}$;
- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \neq y\}$;
- $[1,2] \times [-1,0]$;
- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2, y \geq 0, y \leq x-1\}$;
- $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq \log x\}$.

Esercizio 5.17 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2} - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 4, x \geq 0\}$.

Esercizio 5.18 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2 - x$$

nell'insieme $E_1 \cup E_2$ dove

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\},$$

mentre

$$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - (z-1)^2 \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Esercizio 5.19 Si determinino, se esistono, il massimo e il minimo di

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + x^2 + (y-1)^2}$$

nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \frac{1}{|x|}\}$.

Esercizio 5.20 Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ una matrice simmetrica a (coefficienti reali). Consideriamo la forma quadratica

$$Ax \cdot y = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_j y_i.$$

Massimizzare e minimizzare la funzione

$$f(x) = \frac{Ax \cdot x}{|x|^2} = \frac{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_j x_i}{|x|^2}$$

definita per $|x| \neq 0$.

Esercizio 5.21 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (y - x^2)^3$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$ utilizzando le curve di livello di f.

Esercizio 5.22 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = (x + y)^2$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ tramite le curve di livello di f.

Esercizio 5.23 Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ nell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ mediante le curve di livello di f.

Esercizio 5.24 Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x,y,z) = xyz$$

sull'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z = 1\}.$$

Dedurre da questo che per tutti i numeri positivi x, y, z vale la seguente relazione tra la media geometrica e la media aritmetica:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Si provi a il precedente risultato al caso generale;

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

tra tutti i numeri positivi $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$,

Esercizio 5.25 Massimizzare fra tutti i parallelepipedi di superficie assegnata S il volume.

Esercizio 5.26 Trovare massimo e minimo di $f(x,y) = xy$ nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x + 2/\sqrt[3]{5}, 3x^5 + 5y^3 \leq 8\}.$$

Esercizio 5.27 Trovare massimo e minimo, se esistono, di $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2$ nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2yz = 1\}$.

Esercizio 5.28 Trovare massimo e minimo di $f(x,y,z) = x + 3y - z$ nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z = 0, z = 2x + 4y\}$.

Esercizio 5.29 Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x,y) = \frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 1 + |x|\}$.

Esercizio 5.30 Cercare i punti di massimo e minimo di $f(x,y) = xe^{-xy}$ nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x\},$$

Esercizio 5.31 Trovare, se esistono, i punti di massimo e minimo di

$$f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2$$

nell'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 4y - 6z + 5 = 0\}$.

Esercizio 5.32 Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dei punti dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z - 1 = 0, 2x - y - 3z - 4 = 0\}.$$

Esercizio 5.33 Determinare i punti di massima e minima distanza dall'origine dei punti di bordo dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -2 \leq z \leq 2\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}.$$

Esercizio 5.34 Studiare l'esistenza di massimo e minimo della funzione

$$f(x,y,z) = xy + z$$

sull'insieme $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0, 4x + y + z = 2\}$; determinare gli eventuali massimo e minimo.

5.2 Punti stazionari e loro classificazione

Esercizio 5.35 Determinare i punti stazionari, nel dominio di definizione, delle seguenti funzioni:

1. $f(x,y) = x^3 + 4y^2 + 4xy$;
2. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;
3. $f(x,y) = \dfrac{x+y-1}{x^2+y^2}$;
4. $f(x,y) = (2x+y)e^{-x^2-y^2}$;
5. $f(x,y) = xy\ln(xy^2) + x^2y$;
6. $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)\cos(x-y)$.

Esercizio 5.36 Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = \operatorname{senh}(x^4+y^3-4x^2-3y^2)$ all'interno dell'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|(1+(y-2)^2) - 2 < 0\}$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo.

Esercizio 5.37 Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ in $\mathbb{R}^2$, studiarne la natura e stabilire se f ammette massimo e minimo in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 5.38 Studiare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2.$$

Esercizio 5.39 Trovare e classificare i punti stazionari della seguente funzione:

$$f(x,y) = (y^2 - y)e^{x^2-x}.$$

Esercizio 5.40 Trovare e classificare i punti stazionari delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y-x^2)(y-x^3) \\ g(x,y,z) &= x^2y + y^2z + z^2 - 2x. \end{aligned}$$

Esercizio 5.41 Trovare e classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

Esercizio 5.42 Si consideri la funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz$. Studiarne i punti stazionari liberi in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5.43 Studiare i punti stazionari liberi in $\mathbb{R}^2$ della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + y^3 - 8x^3 - 6xy^2 + 12yx^2.$$

Esercizio 5.44 Studiare i punti stazionari liberi in $\mathbb{R}^3$ della funzione $f(x,y,z) = \frac{3}{4}x^2 + 8y^2 + 7xy + z^4$.

5.3 Soluzioni

Soluzione 5.1 L'insieme dato è chiuso e limitato e la funzione è continua. Esistono quindi massimo e minimo grazie al Teorema di Weierstrass. Per la loro determinazione, cerchiamo prima i punti stazionari liberi interni ad E e poi i punti stazionari vincolati.

Per i punti stazionari liberi, troviamo che

$$\nabla f(x,y) = e^{-xy}(y(1-xy), x(1-xy)),$$

che si annulla unicamente in $(0,0)$ e nei punti di coordinate $(x, 1/x)$; nessuno di tali punti è interno ad E. Passiamo quindi allo studio del bordo di E. Notiamo anzitutto che $f(x,0) = 0$ mentre $f(x,1/x) = 1/e$. Inoltre

$$h_1(y) = f(1,y) = ye^{-y}, \qquad h_2(y) = f(4,y) = 4ye^{-4y} = h_1(4y);$$

per la prima funzione si trova che

$$h_1'(y) = e^{-y}(1-y^2) = 0$$

solo per $y = \pm 1$, ma nessuno di questi punti va considerato in quanto non è relativamente interno al vincolo. Per la seconda funzione

$$h_2'(y) = 4e^{-y}(1 - 16y^2) = 0$$

per $y = \pm 1/4$, ma anche questi vanno scartati per la stessa ragione di prima.

In definitiva abbiamo trovato che

$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto nel segmento } [1,4] \times \{0\},$$

$$\max_E f = \frac{1}{e} \qquad \text{assunto lungo il grafico } \{(x, \frac{1}{x}) : x \in [1,4]\}.$$

Soluzione 5.2 Per il teorema di Weierstrass f ammette sia massimo che minimo. All'interno si ha

$$\nabla f(x,y) = (3x^2, -2y) = 0$$

che ha soluzione solo per $(x,y) = (0,0)$ che è all'interno di E. Vediamo il bordo. Prendiamo

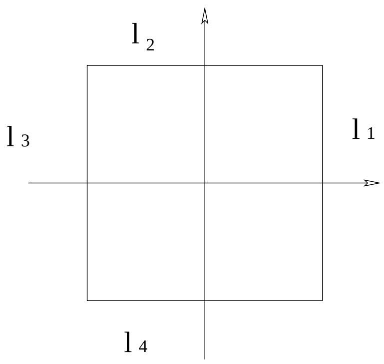


Figura 5.1:

in considerazione il lato l_1: parametrizziamo con la seguente funzione

$$\varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = (1,t)$$

e consideriamo $f \circ \varphi : (-1,1) \to \mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \frac{d}{dt} f(1,t) = \frac{d}{dt}(1 - t^2) = -2t = 0$$

per $t = 0$ che corrisponde al punto $(1, \varphi(0)) = (1,0)$. Chiaramente in casi semplici come questo si può considerare direttamente la funzione f ristretta all'insieme l_1 e derivare rispetto a y la funzione $f(1,y) = 1 - y^2$, ma in tal caso si presti molta attenzione. Bisogna sempre ricordare che alla base c'è una parametrizzazione. Analogamente si parametrizzano gli altri lati e derivando si ottengono i punti $(0,1)$ sul lato l_2, $(-1,0)$ sul lato l_3, $(0,-1)$ sul lato l_4. Abbiamo quindi i seguenti candidati: $(0,0)$ punto stazionario interno, $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ punti stazionari vincolati, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ vertici. A questo punto valutando la funzione f su tutti e nove i punti si trova che il punto di massimo è $(1,0)$ e il valore massimo di f è $f(1,0) = 1$, i punti di minimo sono $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ e il valore minimo di f è $f(-1,1) = f(-1,-1) = -2$.

Soluzione 5.3 La funzione data è continua e l'insieme è compatto, quindi il massimo e il minimo esistono di sicuro. Nella parte interna il gradiente si annulla in $(-1,-1)$ mentre la matrice Hessiana è data da

$$Hf(-1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha autovalori pari a 1 e 3, quindi il punto $(-1,-1)$ è un punto di minimo con valore $f(-1,-1) = -1$. Sul bordo si trova che per $y = 0$ e $-3 < x < 0$, si ha un minimo per $x = -1/2$ con $f(-1/2, 0) = -1/4$, mentre per $x = 0$ e $-3 < y < 0$ analogamente esiste un minimo per $y = -1/2$ con $f(0, -1/2) = -1/4$ e per $y = -x - 3$ con $-3 < x < 0$ non si hanno punti critici, infine $f(-3, 0) = 6$, $f(0, 0) = 0$ e $f(0, -3) = 6$. In definitiva il massimo è assunto in $(-3, 0)$ e $(0, -3)$ e il minimo in $(-1, -1)$ con valore -1.

Soluzione 5.4 Per quanto riguarda i punti interni, troviamo il punto $(1/11, 2/11)$ che è un punto di minimo con $f(1/11, 2/11) = -1/11$. Per quanto riguarda i bordi, per $y = 0$ e $0 < x < 1$ non si hanno punti critici, mentre per $x = 1$ e $0 < y < 1$ si ha un punto critico in $y = 1/3$ e $f(1, 1/3) = 2/3$; per $x = 0$ e $0 < y < 1$ si ha un punto critico in $y = 1/6$ con $f(0, 1/6) = -1/12$, mentre per $y = 1$ con $0 < x < 1$ si ha un minimo relativo in $x = 1/2$ con $f(1/2, 1) = 7/4$. Infine si ha che $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 1$, $f(1, 1) = 2$ e $f(0, 1) = 2$. Quindi la funzione ammette massimo in $(1, 1)$ e minimo in $(1/11, 2/11)$.

Soluzione 5.5 Il gradiente della funzione data non si annulla mai, quindi in particolare non si annullerà sulla parte interna di E. È facile inoltre convincersi che sui bordi unidimensionali non ci sono massimi o minimi (eventualmente fare i calcoli), mentre nei vertici si ha $f(3, -2) = 5$, $f(3, 2) = 9$ e $f(-1, 2) = -3$; quindi il massimo è assunto in $(3, 2)$ e il minimo in $(-1, 2)$.

Soluzione 5.6 Il gradiente della funzione si annulla in $(0, 0)$, che è interno ad E ma è un punto di sella (si può già dedurre questo dal fatto che la funzione è positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$, $y^2 < -\sqrt{x^3}$ e $f(0, 0) = 0$). Per verificare rigorosamente che $(0, 0)$ è un punto di sella, si calcoli la matrice Hessiana e una volta notato che un autovalore è nullo mentre il secondo è positivo, provare a fare le sezioni lungo gli autovettori, che in questo caso altro non sono che le sezioni fatte lungo gli assi coordinati. Quindi il massimo e il minimo della funzione vanno ricercati sul bordo di E.

Proviamo ad applicare vari metodi per trovare il massimo e il minimo sul bordo; si può ad esempio parametrizzare il bordo tramite la trasformazione

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos\theta \\ \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$. Otteniamo quindi la funzione di una variabile

$$g(\theta) = \frac{\cos^3\theta}{8} + \sin^2\theta,$$

che ha derivata nulla per $\theta = 0 + k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. con $g(0) = 1/8$, $g(\pi/2) = 1$, $g(\pi) = -1/8$ e $g(3\pi/2) = 1$. Quindi il massimo vale 1 ed è assunto nei punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$, mentre il minimo è $-1/8$ assunto in $(-1, 0)$.

Applicando la teoria dei moltiplicatori di Lagrange, otteniamo la funzione

$$\phi(x,y,\lambda) = x^3 + y^2 - \lambda(4x^2 + y^2 - 1)$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 8\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da

$$\begin{array}{ccc} \lambda = 1 & x = 0 & y = \pm 1 \\ \lambda = \mp\dfrac{3}{16} & x = \pm\frac{1}{2} & y = 0, \end{array}$$

che sono gli stessi punti trovati precedentemente.

C'è un altro metodo per trovare tali punti; si potrebbe notare che la funzione nella variabile y dipende solo da y^2 e che il vincolo è dato da $y^2 = 1 - 4x^2$. Se si ragiona in questo modo e si sostituisce $y^2 = 1 - 4x^2$, si trova la funzione di una sola variabile

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$$

con la condizione $-1/2 < x < 1/2$. Tale funzione ha solo il punto $x = 0$ come punto stazionario, in corrispondenza di $y = \pm 1$. Ci si potrebbe chiedere come mai troviamo solo due punti in questo modo, mentre prima ne trovavamo quattro. Il problema è che porre $y^2 = 1 - 4x^2$ significa in realtà fare le parametrizzazioni $y = \pm\sqrt{1 - 4x^2}$; queste sono due parametrizzazioni che sono definite e derivabili per $-1/2 < x < 1/2$, mentre il punto $x = -1/2$ e il punto $x = 1/2$ non vengono considerati (non sono punti di derivabilità per la parametrizzazione). Di conseguenza, quando si cerca di sostituire l'equazione del vincolo all'interno della funzione, bisogna fare molta attenzione.

Soluzione 5.7 Il gradiente della funzione si annulla all'interno di E nei punti $(1/4, \pm\sqrt{3}/4)$; dallo studio della matrice Hessiana si trova che tali punti sono punti di sella. Quindi i massimi e minimi vanno cercati sul bordo. Utilizzando la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

si trova la funzione

$$g(\theta) = 1 - \frac{\cos\theta}{2} - \sin^2\theta,$$

i cui punti stazionari sono dati da $\theta = 0, \arccos(1/4), \pi, 2\pi - \arccos(1/4)$, che corrispondono ai punti $(1,0)$, $(1/4, \sqrt{15}/4)$, $(-1,0)$ e $(1/4, -\sqrt{15}/4)$ in cui la funzione vale rispettivamente $1/2$, $-1/16$, $3/2$ e $-1/16$. Quindi il massimo è assunto in $(-1,0)$ e il minimo in $(1/4, \sqrt{15}/4)$ e $(1/4, -\sqrt{15}/4)$.

Soluzione 5.8 Per quanto riguarda i punti interni, il gradiente si annulla in $(0,0)$ che è un punto di sella in quanto la funzione è nulla in $(0,0)$, positiva per $x, y > 0$ e $x, y < 0$ e negativa per $x > 0, y < 0$ e $x < 0, y > 0$. Per quanto riguarda i punti al bordo, utilizzando i moltiplicatori di Lagrange, otteniamo la funzione

$$\phi(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

che conduce al sistema

$$\begin{cases} y = \lambda(2x - y) \\ x = \lambda(2y - x) \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Tale sistema ha le soluzioni

$$\begin{array}{ccc} \lambda = 1 & x = \pm 1 & y = \pm 1 \\ \lambda = -\dfrac{1}{3} & x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}$$

Se ne ricava che si ha amssimo per $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ con valore 1 e minimo per $(1/3, -1/3)$ e $(-1/3, 1/3)$ con valore $-1/9$.

Soluzione 5.9 Il gradiente della funzione non si annulla mai, quindi i massimi e minimi vanno cercati sul bordo. Parametrizzando in coordinate polari, si trovano i punti stazionari $(4/5, 3/5)$ e $(-4/5, -3/5)$ che sono rispettivamente di minimo e di massimo.

Soluzione 5.10 L'ellisse data è centrata nell'origine; per trovare i semiassi, basta trovare dei punti molto particolari dell'ellisse, quello di minor distanza dall'origine e quello di maggior distanza (il semiasse minore e il semiasse maggiore). Si tratta quindi di trovare massimo e minimo della funzione distanza (o equivalentemente del quadrato della funzione distanza) sotto il vincolo di appartenere all'insieme E. Abbiamo quindi la funzione

$$\phi(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9),$$

che ha punti di massimo e minimo rispettivamente in $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$, in cui il semiasse è pari a 1 e $(\pm 3\sqrt{2}/2, \mp 3\sqrt{2}/2)$, in cui il semiasse è pari a 3 (la funzione quadrato della distanza è pari a 9).

Soluzione 5.11 Il gradiente della funzione data si annulla in $(0, 0, 0)$, che non è interno a nessuno dei due insiemi in esame (il primo è un piano e il secondo una retta; entrambi hanno parte interna vuota). Nel primo caso, usando i moltiplicatori di Lagrange, si ottiene il punto $(2/7, 6/7, -4/7)$ in cui la funzione vale $8/7$. Per capire se si tratta di massimo o minimo o sella, dobbiamo notare che la funzione data è sempre positiva e che l'insieme E è illimitato; inoltre

$$\lim_{E \ni (x,y,z) \to \infty} (x^2 + y^2 + z^2) = +\infty.$$

Quindi la funzione non ammette massimo, mentre il punto trovato è un punto di minimo. Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio, di nuovo la funzione non è limitata sull'insieme in considerazione, e col metodi dei moltiplicatori si trova il punto $(16/15, 1/3, -11/15)$ che è un punto di minimo.

Soluzione 5.12 Nel caso in cui, come nell'esercizio in questione, i vincoli siano due, si può a volte procedere come segue; si può fare una sostituzione, ad esempio $z = 4x + 4y$ (operazione lecita; perchè?), e poi minimizzare la funzione di due variabili

$$f(x, y) = x + 3y - 4x - 4y$$

con vincolo l'intersezione dei due vincoli, cioè l'insieme

$$E' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8\}.$$

Otteniamo quindi la funzione ausiliaria

$$\phi(x, y, \lambda) = -3x - y - \lambda((x-2)^2 + (y-2)^2 - 8),$$

che ha come punti stazionari i punti $(2 \pm 6\sqrt{5}, 2 \pm 2\sqrt{5})$. Il massimo è assunto per $(2 - 6\sqrt{5}, 2 - 2\sqrt{5})$ con valore $-8+20\sqrt{5}$, mentre il valore minimo è assunto per $(2+6\sqrt{5}, 2+2\sqrt{5})$ con valore $-8 - 20\sqrt{5}$.

Soluzione 5.13 L'insieme E è quello rappresentato nella Figura 5.2. All'interno il gradiente non si annulla mai (non si annulla mai da nessuna parte). Vediamo sul bordo. Iniziamo col parametrizzare la parte di cono descritta dall'equazione $z^2 = x^2 + y^2$. Si può considerare una funzione

$$\phi : \Omega_1 \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(s, t) = (s, t, \sqrt{s^2 + t^2})$$

dove $\Omega_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 4, (s, t) \neq (0, 0)\}$. Il punto $(0, 0)$ non viene considerato perché non è possibile trovare una funzione differenziabile da un aperto di $\mathbb{R}^2$ alla porzione di cono in considerazione, che includa il vertice, come nel nostro caso. Allora la funzione

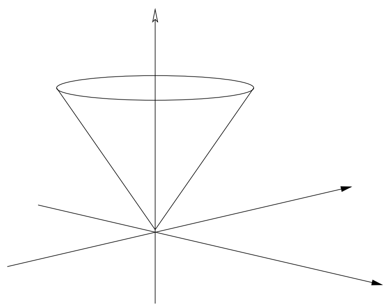


Figura 5.2:

$g(s, t) = f(\phi(s, t)) = s + t - s^2 - t^2$ ha derivate parziali

$$\nabla g(s, t) = (1 - 2s, 1 - 2t)$$

che si annullano per $(s, t) = (1/2, 1/2)$; per questi valori di s e t

$$\phi(1/2, 1/2) = (1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}).$$

Ora parametrizziamo il cerchio: considero la funzione $\psi : \Omega_2 \to \mathbb{R}^3$, $\psi(s, t) = (s, t, 2)$, dove $\Omega_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 4\}$. La funzione $f \circ \psi(s, t) = s + t - 4$ non ha mai gradiente nullo. Ora passiamo alla circonferenza rappresentata dall'intersezione di $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ con il piano orizzontale $z = 2$. La parametrizzo con la funzione

$$\varphi(t) = (2\cos t, 2\text{sen}t, 2)$$

e ottengo:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) = -2\text{sen}t + 2\cos t,$$

che si annulla quando $\operatorname{sen} t = \cos t$, cioè per $t = \pi/4$ e $t = 5\pi/4$, valori corrispondenti ai due punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$. Conclusione: valuto la funzione nei punti $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$ e $(0, 0, 0)$ che è un vertice. Il valore massimo è $1/2$ assunto nel punto $(1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})$, il valore minimo $-2\sqrt{2} - 4$ assunto nel punto $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2)$.

Soluzione 5.14 Risolviamo l'esercizio in diversi modi. Prima di tutto trasformiamo il problema: la distanza di un generico punto in $\mathbb{R}^3$ dall'origine è data da

$$d\big((x, y, z), (0, 0, 0)\big) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Chiaramente minimizzare e massimizzare su un compatto questa funzione oppure il suo quadrato, cioè $x^2 + y^2 + z^2$, è equivalente (per convincersi della cosa si cominci a pensare in dimensione 1 alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ e $g(x) = x^2$). È quindi più conveniente utilizzare la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ che è più semplice da derivare e regolare in ogni punto (mentre la funzione distanza non è differenziabile nell'origine). L'insieme E è dato dall'intersezione di un cilindro lungo l'asse z, a base ellittica, e il piano di equazione $z - x = 1$. Studiamo quindi la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su E: f è continua e E è compatto per cui esistono sia massimo che minimo. Il piano $z - y = 1$ può essere visto come un grafico ($z = y + 1$) e quindi la parametrizzazione più semplice risulta

$$\phi : D \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(u, v) = (u, v, v + 1),$$

dove $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 2v^2 \leq 3\}$. Definiamo la funzione

$$\tilde{f}(u, v) = f(\phi(u, v)) = u^2 + v^2 + (v + 1)^2 = u^2 + 2v^2 + 2v + 1.$$

Annullando le derivate parziali si ottiene

$$\nabla \tilde{f}(u, v) = (2u, 4v + 2) = 0$$

da cui l'unico punto stazionario è $(0, -1/2)$, che appartiene a D e corrisponde al punto $(0, -1/2, 1/2)$ dell'insieme E. Sul bordo parametrizzato con $\vartheta \mapsto (\sqrt{3} \cos \vartheta, \sqrt{3/2} \operatorname{sen} \vartheta)$ la funzione diventa

$$3 \cos^2 \vartheta + 3 \operatorname{sen}^2 \vartheta + 2\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{sen} \vartheta + 1.$$

La sua derivata si annulla per $\cos \vartheta = 0$, cioè per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, che corrispondono ai punti

$$(0, \sqrt{3/2}) \qquad \text{e} \qquad (0, \sqrt{3/2})$$

dell'insieme D e ai punti

$$\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right), \qquad \left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

dell'insieme E. Valutando la funzione nei tre punti ottenuti si ha

$$\tilde{f}(0, -1/2) = \frac{1}{2}, \qquad \tilde{f}(0, \sqrt{3/2}) = 4 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad \tilde{f}(0, -\sqrt{3/2}) = 4 - \sqrt{6} > \frac{1}{2},$$

per cui il punto $(0,-1/2,1/2)$ di E, che corrisponde a $(0,-1/2)$ di D, è il punto di minima distanza dall'origine, il punto $(0,\sqrt{3/2},\sqrt{3/2}+1)$ di E, che corrisponde a $(0,\sqrt{3/2})$ di D, è il punto di massima distanza dall'origine. Avremmo potuto studiare la natura del punto stazionario interno valutando la matrice hessiana:

$$H_{\tilde{f}}(u,v)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, per cui $(0,-1/2)$ è di minimo (locale, ma a posteriori anche assoluto). Studiando le curve di livello di $\tilde{f}$, vediamo come si può risolvere il problema. La quantità u^2+2v^2+2v+1 può essere riscritta

$$u^2+2\Big(v+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}$$

per cui risolvere $\tilde{f}(u,v)=c$ con $c\in\mathbb{R}$ (cioè trovare l'insieme di livello c della funzione $\tilde{f}$) è equivalente a risolvere l'equazione

$$u^2+2\Big(v+\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}=c, \qquad \text{con } c\geq\frac{1}{2}.$$

Queste curve sono ellissi, come le curve tratteggiate in Figura 5.3 (l'ellisse in neretto rappresenta il bordo di D). Per $c<1/2$ l'insieme di livello c è l'insieme vuoto.

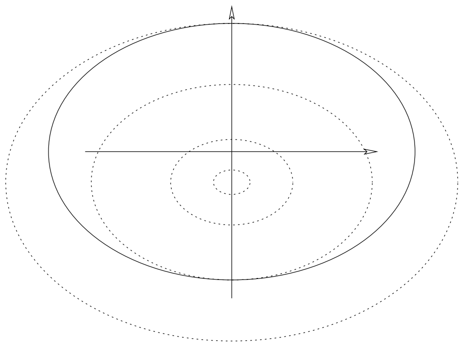


Figura 5.3:

Soluzione 5.15 L'insieme E è un cilindro infinito, in particolare non è compatto, quindi é possibile che massimo e minimo non esistano. Le tre derivate parziali poste uguali a zero

$$\nabla f(x,y,z)\left(\frac{2x}{1+z^2},\frac{2y}{1+z^2},(x^2-y^2)\frac{2z}{(1+z^2)^2}\right)=0$$

forniscono solo il punto $(0,0,0)$ interno ad E. All'infinito (per $|z|\to+\infty$) la funzione tende a 0, ma è facile vedere che assume sia valori positivi che negativi. Esaminiamo il comportamento sul bordo: dobbiamo parametrizzare la superficie $\partial E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1\}$. Si può essere tentati dall'inserire nell'espressione di f la quantità $1-x^2$ al posto di y^2 e considerare così

$$\tilde{f}(x,z)=\frac{2x^2-1}{1+z^2}.$$

Questo corrisponde a considerare le due parametrizzazioni

$$\psi_1 : [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi_1(x,z) = (x, \sqrt{1-x^2}, z)$$

e

$$\psi_2 : [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi_2(x,z) = (x, -\sqrt{1-x^2}, z).$$

Annullando le derivate di $\tilde{f}$ si ottengono le soluzioni $x = 0$ e $z = 0$ che corrispondono ai due punti $(0,1,0)$ e $(0,-1,0)$ (che risultano essere i punti di massimo per la funzione f). A questo punto però vanno anche considerati gli estremi -1 e 1 del dominio di ψ_1 e ψ_2 che corrispondono ai punti $(1,0,0)$, e $(-1,0,0)$ nei quali va valutata poi f. Se si considera la quantità $1 - y^2$ al posto di x^2 le due parametrizzazioni diventano

$$\eta_1 : [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,, \qquad \eta_1(y,z) = (\sqrt{1-y^2}, y, z),$$

e

$$\eta_2 : [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \eta_2(y,z) = (-\sqrt{1-y^2}, y, z);$$

si considera $\hat{f}(y,z) = \frac{1-2y^2}{1+z^2}$ e annullando le derivate si trovano i due punti $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ ai quali vanno aggiunti i punti corrispondenti agli estremi $\eta_1(-1) = \eta_2(-1) = (0,-1,0)$ e $\eta_1(1) = \eta_2(1) = (0,1,0)$. Se parametrizziamo la superficie con

$$\varphi(\vartheta, z) = (\cos\vartheta, \mathrm{sen}\vartheta, z)$$

e consideriamo

$$h(\vartheta, z) = f(\varphi(\vartheta, z)) = \frac{\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta}{1+z^2};$$

derivando si ottiene

$$\nabla h(\vartheta, z) = \left(\frac{4\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\vartheta}{1+z^2}, \frac{(\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta)2z}{1+z^2} \right) = 0$$

per cui si hanno le soluzioni $\mathrm{sen}\vartheta = 0$ o $\cos\vartheta = 0$ e $z = 0$, che corrispondono ai punti quattro $(0,1,0)$, $(0,-1,0)$, $(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$, due di massimo, due di minimo. Perché in questo modo abbiamo trovato quattro punti, mentre per $\tilde{f}$ e $\hat{f}$ solamente due?

Soluzione 5.16 Per calcolare i massimi e minimi della funzione si può utilizzare il metodo delle curve di livello; per funzione in considerazione, le curve di livello sono le rette

$$y = x \pm \frac{1}{\sqrt{c}}$$

con $c > 0$ il valore della funzione su tali curve (la funzione è sempre positiva). Nel primo insieme in esame, la circonferenza centrata in $(2,0)$ e raggio $\sqrt{2}$, notiamo che la retta $y = x$ (che è in qualche modo la curva il cui livello è $+\infty$) è tangente alla circonferenza, come pure la retta $y = x - 4$ (cioè la curva associata al livello $c = 1/16$) è tangente alla circonferenza; se ne deduce che la funzione non ammette massimo in quanto l'estremo superiore è $+\infty$, mentre assume minimo pari a $1/16$ nel punto $(3,-1)$.

Nel secondo insieme, ancora il sup della funzione sarà $+\infty$, in quanto la retta $y = x$ attraversa per l'insieme E e quindi non c'é massimo, mentre, per quanto riguarda il minimo, le rette $y = x \pm \sqrt{2}$ (associate al livello $c = 1/2$) sono tangenti all'insieme dato, e quindi il minimo è $1/2$ assunto nei punti $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Nel terzo insieme, le rette che intersecano E sono le rette $y = x + b$ con $b \in [-3, -1]$; agli estremi, cioè con $b = -1$ e $b = -3$, avremo i livelli associati ai valori $c = 1$ e $c = 1/9$, da cui il massimo della funzione è 1 assunto nel punto $(1, 0)$ e il minimo é $1/9$ assunto in $(2, -1)$.

Nel quarto insieme, E è il triangolo di vertici $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(2, 0)$. Il valore massimo è 1 assunto su tutto il lato congiungente i vertici $(1, 0)$ con $(2, 1)$, mentre il minimo é $1/4$ assunto nel vertice $(2, 0)$.

Nell'ultimo insieme notiamo che E non è limitato e che le rette $y = x + b$ incontrano l'insieme se $b \leq -1$. Troviamo quindi che la funzione ha massimo pari a 1 assunto nel punto $(1, 0)$ (punto di tangenza tra la retta $y = x - 1$ con E), mentre non ha minimo, essendo

$$\inf_E f = 0$$

in quanto per $b \to -\infty$ il livello associato ha valore che tende a 0.

Soluzione 5.17 L'insieme E è metà di un'ellisse di semi–assi 2, 1 e 1; è un insieme compatto, quindi massimo e minimo esistono. Si noti che la funzione f dipende solamente da $t = x^2 + y^2 + z^2$, con $f(x, y, z) = g(t)$, $g(t) = e^t - t/2$. La funzione g è, per t, monotona crescente, quindi ha minimo per $t = 0$. La funzione f ha quindi minimo in $(0, 0, 0)$ con valore minimo $1/2$. Il massimo invece si ottiene quando $(x, y, z) \in E$ è il più distante possibile dall'origine; siccome E è una semi-ellisse allungata lungo l'asse x, il punto di massima distanza su E dall'origine è dato da $(2, 0, 0)$, che sarà quindi punto di massimo con valore massimo $e^4 - 2$.

Soluzione 5.18 L'insieme E è disegnato in Figura 5.4; la funzione f ha un unico punto stazionario dato da $(1/4, 0, 0)$ che è interno ad E. In corrispondenza di tale punto la funzione vale $-1/8$. Il bordo di E è costituito dalle due superfici calotta inferiore della sfera e

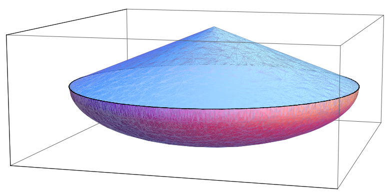


Figura 5.4: Calotta inferiore di una sfera con tronco di cono

superficie laterale del cono, dalla curva intersezione delle due superfici e dal vertice del cono $(0, 0, 1)$ dove la funzione vale -1. Sulla superficie laterale della sfera possiamo usare la parametrizzazione $(x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2})$, $x^2 + y^2 < 1$, in modo da ottenere la funzione di due variabili

$$g(x, y) = 3x^2 - x - 1$$

che ha punti stazionari della forma $(1/6, y)$. In corrispondenza di tali punti la funzione vale $-13/12$. Sulla superficie laterale del cono abbiamo la parametrizzazione $(x, y, 1-\sqrt{x^2+y^2})$, $0 < x^2 + y^2 < 1$, in modo da ottenere

$$h(x,y) = x^2 + 2\sqrt{x^2+y^2} - x - 1$$

che non ha punti stazionari. Resta infine da considerare il bordo uni–dimensionale; utilizziamo la parametrizzazione $(\cos t, \mathrm{sen} t, 0)$ per ottenere la funzione

$$r(t) = 2\cos^2 t - \mathrm{sen}^2 t - \cos t$$

che ha punti stazionari per $t = 0$, $t = \pi$ e per $\cos t = 1/6$. In corrispondenza di tali punti la funzione vale 1, 3 e $-13/12$ rispettivamente. Si conclude quindi che il massimo della funzione è 3 assunto in $(-1, 0, 0)$, mentre il minimo è $-13/12$ assunto in tutti i punti $(1/6, y, -\sqrt{35/36 - y^2})$, $y \in [-\sqrt{35}/6, \sqrt{35}/6]$.

Soluzione 5.19 L'insieme E, in Figura 5.5, non è compatto, quindi l'esistenza del massimo e del minimo non è garantita. Annullando le derivate si ottiene il punto critico $(0, 1)$. Si vede facilmente che

$$f(x,y) \le f(0,1) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{5.1}$$

(studiare l'hessiana per esercizio). All'infinito: poiché $y \le 1/|x|$ si ha che

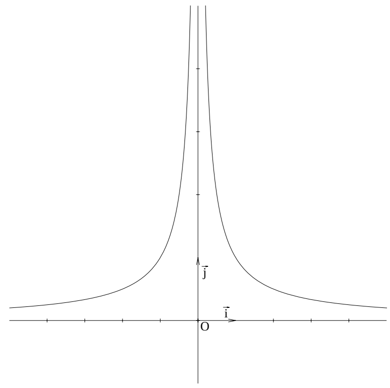


Figura 5.5:

$$(y-1)^2 \le (1/|x| - 1)^2$$

quindi

$$\frac{1}{1 + x^2 + (\frac{1}{|x|} - 1)^2} \le \frac{1}{1 + x^2 + (y-1)^2} \le \frac{1}{1+x^2}.$$

Se si considera quindi il limite per $|(x,y)| \to +\infty$ in E si hanno due possibilità: o $|x| \to +\infty$ (e $y \to 0$) oppure $y \to +\infty$ (e in questo caso $|x| \to 0$). Nel primo dei due casi, dalla stima precedente si ottiene che $f(x,y) \to 0$. Nel secondo caso possiamo stimare la f come segue, visto che $|x| \le 1/y$:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{y^2} + (\frac{1}{|x|} - 1)^2} \le \frac{1}{1 + x^2 + (y-1)^2} \le \frac{1}{1 + (y-1)^2}.$$

Conlcusione: prendendo il limite per punti $(x, y) \in E$

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x, y) = 0$$

(in realtà si può dimostrare che $\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x, y) = 0$). Poiché f è sempre positiva, il limite all'infinito è zero e inoltre dalla stima (5.1) si conclude che la funzione ha un punto di massimo assoluto in $(0, 1)$ e non ha minimo.

Soluzione 5.20 Derivando la funzione f rispetto a x_k si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_j x_i =& 2 \sum_{j=1}^{N} a_{kj} x_j \\ \frac{\partial}{\partial x_k} (x_1^2 + \cdots + x_N^2) =& 2x_k \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{2|x|^2 \sum_{j=1}^{N} a_{kj} x_j - 2x_k Ax \cdot x}{|x|^4} = \frac{2 \sum_{j=1}^{N} a_{kj} x_j - 2x_k f(x)}{|x|^2}$$

per ogni $k = 1, \ldots N$. Di conseguenza, annullando le derivate, si ha

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj} x_j - x_k f(x) = 0, \qquad \text{per ogni } k = 1, \ldots N$$

e ciò equivale a dire che

$$Ax = f(x)x$$

cioè x è un autovettore e $f(x)$ è un autovalore. Senza bisogno di trovare le soluzioni x, sicuramente $f(x)$ è un autovalore, quindi il minimo valore assunto da f è il minimo autovalore di A e il massimo valore assunto da f è il massimo autovalore di A.

Volendo risolvere il problema con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si osservi innanzitutto che la funzione f può essere ridefinita sulla sfera di $\mathbb{R}^N$

$$\mathbb{S}^{N-1} = \partial B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = 1\}$$

dato che

$$f(x) = \frac{Ax \cdot x}{|x|^2} = A\frac{x}{|x|} \cdot \frac{x}{|x|}$$

e quindi

$$f(\alpha x) = f(x), \qquad \text{per ogni } \alpha \neq 0.$$

Ci possiamo cosí limitare a considerare

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_j x_i$$

definita in $\mathbb{S}^{N-1}$. Si consideri la funzione

$$H(x, \lambda) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} x_j x_i + \lambda(x_1^2 + \ldots + x_N^2 - 1),$$

visto che cerchiamo i punti stazionari in $\mathbb{S}^{N-1}$ e $\|x\| = 1$ se e solo se $\|x\|^2 = 1$. Le derivate risultano essere (la matrice è simmetrica)

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} = 2\sum_{j=1}^{N} a_{kj}x_j + 2\lambda x_k = 0$$

per $k = 1, \ldots, N$,

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x_1^2 + \ldots + x_N^2 - 1 = 0.$$

Dalle prime N equazioni si ricava che

$$A \cdot x + \lambda x = 0$$

il che significa che x deve essere un autovettore (e λ un autovalore). I punti stazionari di H in $\mathbb{R}^{N+1}$ sono quindi tutte le $(N+1)$-uple (x, λ) con x autovettore di norma 1 e λ autovalore di A. Si osservi come dalle equazioni precedenti si ricava

$$x_k(a_{kk} + \lambda) + \sum_{j=1}^{N} a_{kj}x_j = 0$$

dove la sommatoria viene effettuata per $j \neq k$; nel caso in cui A sia una matrice diagonale si puó dedurre che gli autovalori sono gli elementi della diagonale e gli autovettori sono del tipo $(0, \ldots 0, 1, 0 \ldots 0)$.

Soluzione 5.21 L'insieme E è quello in Figura 5.6, le parabole tratteggiate sono curve di livello. Risolveremo il problema senza fare calcoli, ma osservando gli insiemi di livello della

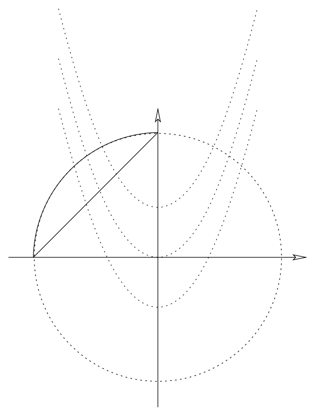


Figura 5.6:

funzione (si consiglia di svolgere per esercizio i calcoli, anche per confronto, studiando il gradiente, la matrice Hessiana e studiando il comportamento della funzione sul bordo come al solito). Fissiamo $c \in \mathbb{R}$ e determiniamo l'insieme $\Gamma_c = \{f(x, y) = c\}$: tale insieme é rappresentato dall'intersezione di E con la parabola di equazione (si veda anche la Figura 5.6)

$$y = x^2 + \sqrt[3]{c}$$

Chiaramente il valore massimo (rispettivamente il minimo) che assume f è il massimo c (rispettivamente il minimo c) per cui Γ_c non è vuoto (cioè il massimo c per cui la parabola $y = x^2 + \sqrt[3]{c}$ interseca l'insieme E). Concludendo: il minimo é assunto nel punto $(-2, 0)$ e il massimo nel punto $(0, 2)$. Per calcolare i valori basta valutare la funzione in questi due punti o trovare i valori di c per cui le parabole passano per questi punti (farlo per esercizio). I valori minimo e massimo sono rispettivamente -64 e 8.

Soluzione 5.22 La funzione è continua su un compatto, quindi sicuramente ammette massimo e minimo. L'insieme su cui è definita f e tre suoi insiemi di livello sono disegnati in Figura 5.7 (le linee tratteggiate allo stesso modo fatto parte dello stesso insieme di livello). Si fissi $c \in \mathbb{R}$ e si denoti con $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = c\}$. Chiaramente per $c < 0$

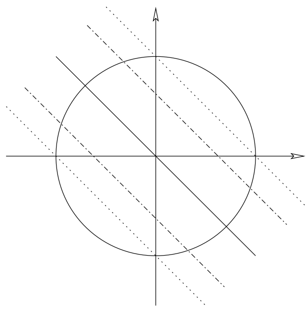


Figura 5.7:

l'insieme Γ_c è vuoto, per $c = 0$ si ha che $\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$, per $c > 0$

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x + \sqrt{c}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x - \sqrt{c}\}.$$

Il minimo di f è 0 assunto in tutto l'insieme

$$\Gamma_0 \cap E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]\},$$

il massimo è assunto dove l'insieme di livello interseca E sul bordo e precisamente nei punti $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (trovare le equazioni delle rette). Il valore massimo è

$$f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 8.$$

Soluzione 5.23 L'insieme E è una corona circolare e gli insiemi di livello sono delle ellissi (si veda Figura 5.8), come si può facilmente ricavare ponendo

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 = c, \qquad c \geq 0.$$

Minore è il valore di c e minori sono i semiassi dell'ellisse, l'insieme sul quale la funzione assume il valore costante c. I punti di minimo sono $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 1$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 1 (quindi il valore minimo è 1); i punti di massimo sono $(0, 2)$ e $(0, -2)$ dove l'ellisse descritta da $x^2 + 2y^2 = 8$ interseca la parte di bordo di E data dal cerchio di raggio 2 (quindi il valore massimo è 8).

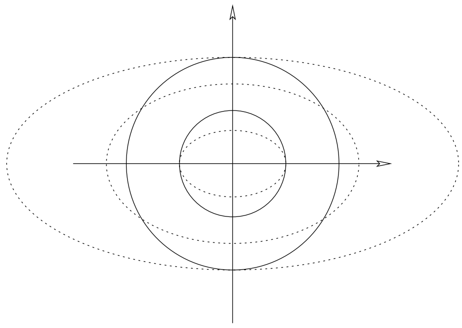


Figura 5.8:

Soluzione 5.24 L'insieme E è la porzione del piano $x+y+z=1$ contenuta nel quadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Quindi E è una superficie con bordo dato dai segmenti $\{x=0, 0 \leq y \leq 1, z=1-y\}$, $\{y=0, 0 \leq x \leq 1, z=1-x\}$ e $\{z=0, 0 \leq x \leq 1, y=1-x\}$. Su tali segmenti la funzione si annulla; siccome $f \geq 0$ su E, se ne deduce che i tre segmenti sono punti di minimo per f su E; sui restanti punti di E la funzione è strettamente positiva, quindi ammetterà un massimo su

$$\Sigma = \{x+y+z=1, x>0, y>0, z>0\}.$$

Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per individuare il punto stazionario vincolato

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x+y+z-1);$$

dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} yz - \lambda = 0 \\ xz - \lambda = 0 \\ xy - \lambda = 0 \\ x+y+z=1. \end{cases}$$

La soluzione è data da $(1/3, 1/3, 1/3)$ con $\lambda = 1/9$ e in tale punto la funzione vale $1/27$. Quindi

$$\max_E f = \frac{1}{27}, \qquad \text{assunto in } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\min_E f = 0, \qquad \text{assunto nei punti con } x=0, y=0, z=0.$$

Per l'ultima parte dell'esercizio, si nota che se abbiamo tre numeri positivi x, y, z, denotata con $S = x+y+z$ la loro somma, possiamo considerare $u = x/S$, $v = y/S$ e $w = z/S$; quindi per quanto dimostrato sopra

$$uvw \leq \frac{1}{27},$$

con uguaglianza se e solo se $u = v = w = \frac{1}{3}$. Questo dice che

$$xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27},$$

e cioè
$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$$
con uguaglianza se e solo se $x = y = z$. Questo ragionamente si può generalizzare alla dimensione n generica considerando la funzione

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

vincolata all'insieme

$$E = \{x_1 + \ldots + x_n = 1, x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0\}.$$

Soluzione 5.25 Il volume è dato dal prodotto delle lunghezze dei tre lati. Indicando con x, y, z le tre lunghezze la funzione da massimizzare è allora $f(x, y, z) = xyz$. La superficie di ogni singola faccia è il prodotto delle lunghezze dei due lati che la determinano, per cui il vincolo è $2(xy + xz + yz) = S$. Uso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: si consideri la funzione
$$H(x, y, z, \lambda) = xyz + 2\lambda(xy + xz + yz) - \lambda S$$
e le sue derivate parziali

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z, \lambda) =& yz + 2\lambda(y + z) = 0\\
\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z, \lambda) =& xz + 2\lambda(x + z) = 0\\
\frac{\partial H}{\partial z}(x, y, z, \lambda) =& xy + 2\lambda(x + y) = 0\\
\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) =& 2(xy + xz + yz) - S = 0.
\end{aligned}$$

Dalla prima e dalla seconda equazione si ricava che

$$2\lambda = -\frac{yz}{y+z} = -\frac{xz}{x+z}$$

da cui (si ricordi che $x, y, z > 0$) $x = y$. Analogamente dalla prima e dalla terza si ricava $x = z$, per cui si conclude che $x = y = z$. Questa è la soluzione, che corrisponde a dire che se c'è un parallelepipedo di volume massimo questo deve essere un cubo. Vediamo si stabilire quanti punti verificano questa condizione: sappiamo che $2(xy+xz+yz) = S$ e d'altra parte che $x = y = z$. Quindi esiste solo un punto sul vincolo dato da $2(x^2 + x^2 + x^2) = S$, quindi $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$. Il volume corrispondente a questo valore è

$$\left[\sqrt{\frac{S}{6}}\right]^3 = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}.$$

Vediamo in due modi che $(\sqrt{S/6})^3$ è il massimo valore possibile per il volume. Si può utilizzare la formula che lega le medie geometrica e aritmetica. Infatti posti $a_1 = xy, a_2 = yz, a_3 = xz$ si ha
$$\sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot xz} = (xyz)^{2/3} \le \frac{xy + xz + yz}{3} = \frac{S}{6},$$

da cui

$$f(x,y,z) = xyz \leq \left[\frac{S}{6}\right]^{3/2}$$

ogniqualvolta la somma $2(xy+xz+yz) = S$. Un altro modo è il seguente: la funzione volume $f(x,y,z) = xyz$ è sempre positiva e ha un unico punto critico. Vediamo che all'infinito la funzione tende a zero (o equivalentemente che $1/f(x,y,z)$ tende a $+\infty$) quando $|(x,y,z)| \to +\infty$ sul vincolo:

$$\frac{S}{2}\frac{1}{xyz} = \frac{xy+yz+xz}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

È chiaro che quando $|(x,y,z)| \to +\infty$ sul vincolo $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2(xy+yz+xz) = S\}$ non tutte le variabili possono andare a $+\infty$, e almeno una delle tre deve quindi convergere a 0. Calcolando il limite per punti $(x,y,z) \in M$,

$$\lim_{|(x,y,z)| \to +\infty} f(x,y,z) = +\infty.$$

Soluzione 5.26 L'insieme E è quello delimitato dalle curve in Figura 5.9 e dall'asse $y = 0$. Infatti abbiamo le seguenti limitazioni: $y \geq 0$ e $y \leq x + 2/\sqrt[3]{5}$ che definiscono due semipiani.

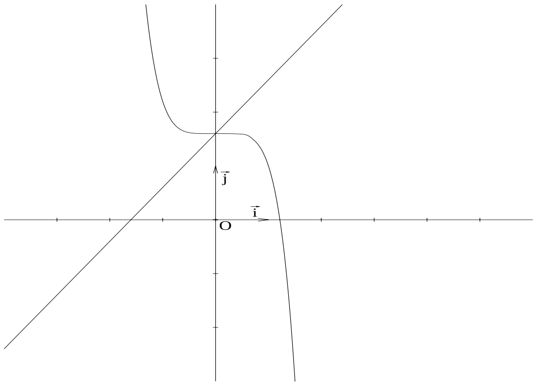


Figura 5.9:

La terza $3x^5 + 5y^3 \leq 8$ può essere vista come

$$y \leq \left(\frac{8-3x^5}{5}\right)^{1/3}.$$

Le derivate parziali di f si annullano solo nell'origine, che non appartiene all'interno di E, quindi va scartato. Vediamo il bordo. Prima la parte in cui $y = 0$: chiaramente $f(x,0) = 0$ (provare ad usare i moltiplicatori). La parte di bordo che appartiene alla retta si può parametrizzare con $\varphi(t) = (t, t + 2/\sqrt[3]{5})$ con $t \in (-2/\sqrt[3]{5}, 0)$. Si ottiene $f(\varphi(t)) = t^2 + t2/5^{1/3}$ la cui derivata è

$$2t + \frac{2}{5^{1/3}},$$

che si annulla per $t = -1/5^{1/3}$. Quindi il punto $\varphi(-1/5^{1/3}) = (-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$ è un punto candidato. Sull'ultimo tratto di bordo usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: cerchiamo i punti stazionari (in $\mathbb{R}^3$) della funzione

$$H(x,y,\lambda) = xy + \lambda(3x^5 + 5y^3 - 8).$$

Derivando si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}(x,y,\lambda) =& y+15\lambda x^4=0\\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y,\lambda) =& x+15\lambda y^2=0\\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) =& 3x^5+5y^3-8=0\end{aligned}$$

Dalla prima e dalla seconda si ha che $15\lambda = -y/x^4 = -x/y^2$ da cui $y^3 = x^5$. Inserendo quest'informazione nella terza equazione si ricava $x = 1$ e $y = 1$. Valutando f nei punti $(-1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$, $(1,1)$, $(x,0) \in E$, e il vertice $(0, 2/5^{1/3})$ si ottiene

$$\begin{aligned}f(-1/5^{1/3},1/5^{1/3}) =& \quad -\frac{1}{\sqrt[3]{25}} && \text{minimo}\\ f(1,1) =& \quad 1 && \text{massimo}\\ f(x,0) =& \quad 0\\ f(0,2/5^{1/3}) =& \quad 0.\end{aligned}$$

Soluzione 5.27 Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si consideri la funzione

$$H(x,y,z,\lambda) = 2x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2yz-1)$$

e annullando le sue derivate si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x}(x,y,z,\lambda) =& 4x+2\lambda xyz=0\\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y,z,\lambda) =& 2y+\lambda x^2z=0\\ \frac{\partial H}{\partial z}(x,y,z,\lambda) =& 2z+\lambda x^2y=0\\ \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda) =& x^2yz-1=0.\end{aligned}$$

Dalla seconda e dalla terza si ottiene

$$\lambda = -\frac{2y}{x^2z} = -\frac{2z}{x^2y},$$

e quindi $z^2 = y^2$. Dalla quarta equazione si ricava che $x^2 = 1/yz$ per cui yz è positivo (o sia y che z sono positivi, o entrambi sono negativi, quindi la possibilità $z = -y$ va scartata). Dalla prima equazione, sfruttando $y = z$ e $x^2 = 1/yz$, si ha

$$4x+2\Big(-\frac{2y}{x^2z}\Big)xyz = 4\Big(x-\frac{1}{x^3}\Big)=0$$

da cui si ricava che $x = 1$ oppure $x = -1$. Per cui i punti trovati sono

$$P_1 = (1,1,1), P_2 = (1,-1,-1), P_3 = (-1,1,1), P_4 = (-1,-1,-1).$$

Si ha che $f(P_i) = 4$ per ogni i. Dalla risoluzione dell'Esercizio 5.24 sappiamo che se $y, z > 0$ e $x^2yz = 1$ allora $x^2+y+z \geq 3$ da cui $2x^2+2y+2z \geq 6$. Dalla disuguaglianza $a^2+b^2 \geq 2ab$ segue che:

$$2x^2+(y^2+1)+(z^2+1) \geq 2x^2+2y+2z \geq 6$$

da cui
$$2x^2 + y^2 + z^2 \geq 4.$$
Se $y, z < 0$ considero $-y$ e $-z$ che sono positivi e il cui prodotto è sempre yz e ripeto il ragionamento. Conclusione:
$$f(x, y, z) \geq 4 \qquad \text{sul vincolo,}$$
per cui P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sono tutti punti di minimo.

Soluzione 5.28 Con due vincoli considero la funzione
$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 3y - z - \lambda(x^2 + y^2 - z) - \mu(z - 2x - 4y).$$
Si trovano i punti
$$P_1 = (1 + \sqrt{5/2}, 2 + \sqrt{5/2}, 10 + 6\sqrt{5/2}), \quad P_2 = (1 - \sqrt{5/2}, 2 - \sqrt{5/2}, 10 - 6\sqrt{5/2})$$
che sono rispettivamente di minimo e di massimo.

Soluzione 5.29 L'insieme su cui si stanno cercando gli estremi è la regione illimitata del piano disegnata in Figura 5.10. Notiamo che la regione è illimitata ma se $\|(x, y)\| \to +\infty$, siccome $|x| \leq y \leq |x| + 1$, allora
$$\frac{2x - 2|x| - 1}{2x^2 + 2|x| + 2} \leq \frac{2x - 2y + 1}{x^2 + y^2 + 1} \leq \frac{2x - 2|x| + 1}{2x^2 + 1}$$
da cui il fatto che $f(x, y) \to 0$ se $\|(x, y)\| \to +\infty$. Cerchiamo ora i punti stazionari all'interno. Poniamo quindi $\nabla f(x, y) = 0$ per ottenere che esistono solo due punti stazionari,

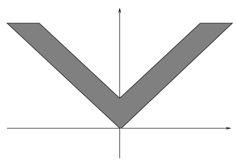


Figura 5.10: Disegno dell'insieme E

$(-1, 1)$ e $(1/2, -1/2)$; nessuno di questi due punti è però interno all'insieme E. Studiamo ora il bordo; bisogna anzitutto considerare i due spigoli $(0, 0)$ e $(0, 1)$ dove la funzione vale 0 e $-1/2$ rispettivamente. Sul bordo $y = x$, $x > 0$, la funzione diventa
$$f(x, x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$$
che è monotona decrescente. Su $y = x + 1$, $x > 0$, si ha invece
$$f(x, x + 1) = -\frac{1}{2(x^2 + x + 1)}$$
che è ancora monotona ma crescente. Per $y = -x$, $x < 0$, si ottiene
$$f(x, -x) = \frac{4x + 1}{2x^2 + 1};$$

tale funzione ha un solo punto stazionario per $x < 0$ dato da $x = -1$ ed in tale punto la funzione vale -1. Infine, per $y = -x + 1$ si ottiene la funzione

$$f(x, -x+1) = \frac{4x - 1}{2(x^2 - x + 1)};$$

tale funzione è monotona per $x < 0$. Quindi il massimo della funzione è 1 assunto in $(0, 0)$, mentre il minimo è -1 assunto in $(-1, 1)$.

Soluzione 5.30 L'insieme E è illimitato (quello tratteggiato in Figura 5.11) e le derivate parziali non si annullano mai contemporaneamente su E. Infatti

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{-xy}(1 - xy)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x^2 e^{-xy}\end{aligned}$$

e la derivata rispetto a y non è mai zero all'interno di E. Vediamo sul bordo: para-

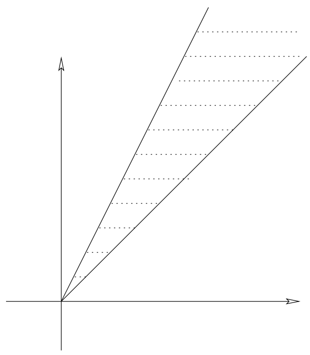


Figura 5.11:

metrizzando il bordo con le curve $t \mapsto (t, t)$ e $t \mapsto (t, 2t)$ con $t \in (0, +\infty)$ si ottiene prima

$$\frac{d}{dt} f(t, t) = \frac{d}{dt} te^{-t^2} = e^{-t^2}(1 - 2t^2)$$

che si annulla per $t = 1/\sqrt{2}$ che corrisponde al punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, poi

$$\frac{d}{dt} f(t, 2t) = \frac{d}{dt} te^{-2t^2} = e^{-t^2}(1 - 4t^2)$$

che si annulla per $t = 1/2$, che corrisponde al punto $(1/2, 1)$. Vediamo all'infinito: poiché in E

$$x^2 \leq xy \leq 4x^2 \Rightarrow -4x^2 \leq -xy \leq -x^2$$

si ha che

$$xe^{-4x^2} \leq f(x, y) \leq xe^{-x^2}$$

per cui il seguente limite, calcolato per $(x, y) \in E$,

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x, y) = 0.$$

Esaminiamo i candidati, i due punti trovati e il vertice:

$$\begin{array}{rcl} f(0,0) = & 0, & \text{minimo} \\ f(1/2,1) = & \frac{1}{2}e^{-1/2}, & \\ f(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) = & \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}. & \text{massimo} \end{array}$$

Soluzione 5.31 Presentiamo qui solo una traccia dello svolgimento. Il vincolo può essere visto come grafico per cui una delle parametrizzazioni possibili e più semplici è

$$(u,v) \mapsto \Big(u, v, \frac{1}{6}\big(2u+4v+5\big)\Big)$$

(ma anche $(u,v) \mapsto (\frac{1}{2}(6v-4u-5), u, v)$ e $(u,v) \mapsto (u, \frac{1}{4}(6v-2u-5), v)$ vanno bene). Ci si riduce così ad una funzione di due variabili

$$f\big(u, v, \frac{1}{6}(2u+4v+5)\big).$$

Soluzione 5.32 L'insieme dato è una retta nello spazio (si vede facilmente che il rango del sistema che definisce E è 2); quindi E è un insieme illimitato, cioè non c'è un punto di massima distanza su E. Per trovare il punto di minima distanza, consideriamo la funzione quadrato della distanza con i due vincoli

$$\Phi(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2-\lambda(x+2y+z-1)-\mu(2x-y-3z-4).$$

Arriviamo quindi al sistema

$$\begin{cases} 2x-\lambda-2\mu=0 \\ 2y-2\lambda+\mu=0 \\ 2z-\lambda+3\mu=0 \\ x+2y+z=1 \\ 2x-y-3z=4 \end{cases}$$

che ha come soluzione il punto $(16/15, 1/3, -11/15)$, con $\lambda = 52/75$ e $\mu = 54/75$; in corrispondenza di tale punto la distanza vale $\sqrt{402}/15$.

Un modo alternativo per risolvere l'esercizio è trovare la parametrizzazione di E; ricavando $z = 1-z-2y$, sostituendo in $2x-y-3z=4$ e ponendo $x=t$, si trova la parametrizzazione

$$r(t) = \left(t, \frac{7}{5}-t, t-\frac{9}{5}\right) = \left(0, \frac{7}{5}, -\frac{9}{5}\right) + t(1,-1,1).$$

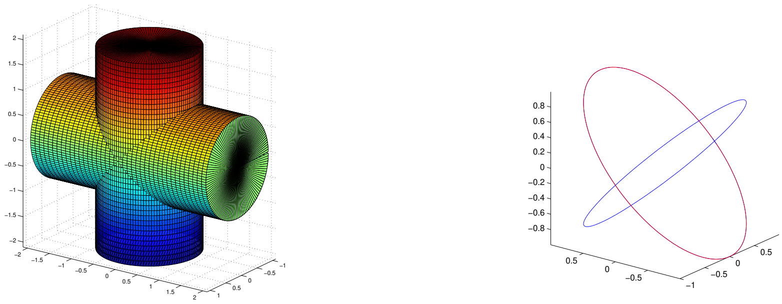
A questo punto possiamo sia considerare la funzione

$$g(t) = \|r(t)\|^2$$

e minimizzare g cercando il punto stazionario libero per g, oppure notare che il punto di minima distanza è ortogonale ad E, cioè il punto di minima distanza è imndividuato da $t \in \mathbb{R}$ per cui

$$r(t)\cdot(1,-1,1) = 0,$$

cioè $t = 16/15$ che definisce lo stesso punto trovato precedentemente.



(a) L'insieme E, unione di due cilindri

(b) Intersezione dei due cilindri

Figura 5.12: Unione di due cilindri

Soluzione 5.33 L'insieme E è rappresentato in figura 5.12. La funzione da massimizzare e minimizzare è la funzione distanza o equivalentemente la funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

La ricerca dei punti estremi è fatta sul bordo di E, che quindi non ha punti interni; tale bordo lo possiamo scrivere come unione di vari pezzi;

$$\partial E = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_9 \cup B_{10} \cup B_{11},$$

con

$$\begin{gathered}
B_1 = \{z = 2, x^2 + y^2 < 1\}, \qquad B_2 = \{z = -2, x^2 + y^2 < 1\},\\
B_3 = \{y = 2, x^2 + z^2 < 1\}, \qquad B_4 = \{y = -2, x^2 + z^2 < 1\},\\
B_5 = \{x^2 + y^2 = 1, -2 < z < 2\} \setminus \{x^2 + z^2 \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}\\
B_6 = \{x^2 + z^2 = 1, -2 < y < 2\} \setminus \{x^2 + y^2 \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}\\
B_7 = \{z = 2, x^2 + y^2 = 1\}, \qquad B_8 = \{z = -2, x^2 + y^2 = 1\},\\
B_9 = \{y = 2, x^2 + z^2 = 1\}, \qquad B_{10} = \{y = -2, x^2 + z^2 = 1\},\\
B_{11} = \{x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1\}.
\end{gathered}$$

Grazie alla simmetria di f e dell'insieme E, possiamo considerare assieme i bordi B_1–B_4 trattando esclusivamente il bordo B_1; analogamente, tratteremo solo B_7 per i casi B_7–B_{10} ed infine B_5 e B_6 sono analoghi.

Iniziamo con B_1; se imponiamo la condizione $z = 2$, troviamo la funzione di due variabili

$$g_1(x,y) = f(x,y,2) = x^2 + y^2 + 4$$

da studiare nell'insieme $\{x^2 + y^2 < 1\}$; il gradiente di g_1 si annulla esclusivamente in $(0,0)$ in cui la funzione vale 4. In definitiva, nei bordi B_1–B_4 abbiamo i quattro candidati $(0,0,2)$, $(0,0,-2)$, $(0,2,0)$ e $(0,-2,0)$ a distanza 2 dall'origine.

Per quanto riguarda B_5 possiamo utilizzare la parametrizzazione $\phi : (-2,2) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$,

$$\phi(t,\vartheta) = (\cos\vartheta, \mathrm{sen}\vartheta, t)$$

e considerare la funzione di due variabili

$$g_2(t, \vartheta) = f(\phi(t, \vartheta)) = 1 + t^2;$$

tale funzione non ha punti stazionari su B_5, in quanto il gradiente di g_2 si annulla per $t = 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, ma questi punti non appartengono a B_5. Quindi su B_5 e B_6 non abbiamo punti stazionari vincolati. Lo studio su B_5 e B_6 si poteva affrontare anche considerando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange mediante la funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

con $z \in (-2, 2)$ e $(x, y, z) \notin \{x^2 + z^2 \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$.

Per quanto riguarda il bordo B_7, su tale bordo si ha $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 2$, quindi la funzione f è costantemente uguale a 5, cioè tutti i punti di B_7–B_{10} sono punti stazionari vincolati a distanza $\sqrt{5}$ dall'origine.

Resta da considerare il bordo B_{11}; possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x^2 + z^2 - 1).$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x(1 - \lambda - \mu) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) = 0 \\ 2z(1 - \mu) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1; \end{cases} \tag{5.2}$$

partendo dalla seconda equazione, possiamo prendere in considerazione il caso $y = 0$, da cui si arriva al sistema

$$\begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

cioè i punti $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ con i moltiplicatori legati dalla relazione $\mu = 1 - \lambda$. Se invece nella seconda equazione di (5.2) consideriamo il caso $\lambda = 1$, arriviamo al sistema

$$\begin{cases} x\mu = 0 \\ \lambda = 1 \\ z(1 - \mu) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

La prima equazione ha le due possibilità $x = 0$ e $\mu = 0$; nel primo caso si trovano i quattro punti $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(0, -1, 1)$ e $(0, -1, -1)$ con i moltiplicatori dati da $\lambda = 1$, $\mu = 1$, mentre nel secondo caso si trovano i due punti $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$ con moltiplicatori $\lambda = 1$, $\mu = 0$. I primi quattro punti distano tutti $\sqrt{2}$ dall'origine, mentre gli altri due distano 1 dall'origine, che quindi sono i punti di minima distanza dall'origine.

Chiudiamo con una osservazione sul metodo dei moltiplicatori di Lagrange; si noti che l'insieme B_{11} non è una curva parametrizzata, ma unione di due curve parametrizzate che si intersecano nei punti $(\pm 1, 0, 0)$. In tali punti non si può applicare il teorema della funzione implicita per dedurre che B_{11} sia una curva, in quanto la funzione $h(x, y, z) = (x^2+y^2-1, x^2+z^2-1)$ ha Jacobiana con rango 1 in tali punti. Ciononostante, il metodo dei moltiplicatori funziona ugualmente ed individua tali punti come punti stazionari vincolati. La ragione risiede nel fatto che la condizione per essere punto estremale vincolato equivale a richiedere che la restrizione della funzione ad ogni curva contenuta nel vincolo abbia in tali punti un punto stazionario. Nel nostro caso il vincolo può essere parametrizzato dalle curve

$$r_1(t) = (\cos t, \sin t, \sin t), \qquad r_2(t) = (\cos t, \sin t, -\sin t),$$

che si incrociano nei due punti $(\pm 1, 0, 0)$. I vettori tangenti alle due curve r_1 e r_2 sono linearmente indipendenti in tali punti, quindi l'ortogonale alle due curve ha ivi dimensiona 1, ed è quindi indistintamente generato da uno dei due vettori che definiscono la matrice Jacobiana di h, i gradienti delle componenti di h.

Soluzione 5.34 La funzione è regolare ma l'insieme E è solo chiuso e non limitato, trattandosi di intersezione di due piani e quindi di una retta. Non è garantita quindi l'esistenza di massimo e minimo.

L'insieme E è ottenuto come zero della funzione

$$g(x, y, z) = (x + y - 3z, 4x + y + z - 2)$$

la cui matrice Jacobiana è costante e pari a

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha rango 2 e quindi in effetti l'insieme E è una curva (una retta nello spazio). Possiamo parametrizzare mediante

$$r(t) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right) + t(1, 1, -3) \times (4, 1, 1) = \left(\frac{2}{3} + 4t, -\frac{2}{3} - 13t, -3t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

In tal modo otteniamo la funzione di una variabile

$$f(r(t)) = 52t^2 - \frac{43}{3}t - \frac{4}{9};$$

tale funzione è strettamente convessa e tende ad infinito per $|t| \to +\infty$, quindi la funzione ammette minimo ma non massimo per le proprietà delle funzioni convesse. Per determinare il minimo calcoliamo

$$\frac{d}{dt} f(r(t)) = -104t - \frac{43}{3} = 0,$$

per trovare punto di minimo per $t = -\frac{43}{312}$ corrispondente al punto di coordinate e dove la funzione vale $\frac{113}{208}$. In definitiva abbiamo trovato che

$$\min_E f = \frac{113}{208}, \qquad \text{assunto in } \left(\frac{3}{26}, \frac{117}{104}, \frac{129}{312}\right).$$

In modo alternativo si poteva arrivare allo stesso risultato mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange cercando i punti stazionari liberi della funzione

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = xy + z - \lambda(x + y - 3z) - \mu(4x + y + z - 2).$$

Soluzione 5.35 L'esercizio chiede di risolvere l'equazione $\nabla f(x,y)=0$.

1. L'equazione diventa il seguente sistema:
$$\begin{cases} 3x^2+4y=0 \\ 8y+4x=0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(3x-2)=0 \\ y=-\frac{1}{2}x. \end{cases}$$
Le soluzioni del sistema sono $(0,0)$ e $(2/3,-1/3)$, che sono quindi gli unici due punti stazionari.

2. Si ottiene il sistema
$$\begin{cases} \frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}=0 \\ -\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}=0, \end{cases}$$
cioè l'equazione $x^2=y^2$ che ha per soluzione tutti i punti (x,x) e $(x,-x)$ con $x\neq 0$. In definitiva, tutti i punti appartenenti alle due rette $y=x$ e $y=-x$ con $x\neq 0$ sono stazionari.

3. Ottteniamo il sistema
$$\begin{cases} y^2-x^2-2xy+2x=0 \\ x^2-y^2-2xy+2y=0. \end{cases}$$
Sommando e sottraendo le due equazioni si ha:
$$\begin{cases} (x-y)(1-x-y)=0 \\ -4xy+2x+2y=0. \end{cases}$$
La prima equazione ha le due soluzioni: $y=x$ e $y=1-x$. Si ottengono quindi i due sistemi
$$\begin{cases} y=x \\ x(1-x)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y=1-x \\ 2x^2-2x+1=0. \end{cases}$$
Il primo sistema ha soluzione per $(0,0)$ e $(1,1)$ (il primo punto va però scartato in quanto la funzione non è ivi definita), mentre il secondo non ha soluzione. Abbiamo in definitiva un solo punto stazionario: $(1,1)$.

4. Dobbiamo risolvere il sistema
$$\begin{cases} 2-4x^2-2xy=0 \\ 1-y(4x+2y)=0, \end{cases}$$
che é equivalente al sistema
$$\begin{cases} y=\frac{1-2x^2}{x} \\ 5x^2-2=0. \end{cases}$$
Ne segue che $y=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$ e $x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$.

5. Dobbiamo risolvere il sistema
$$\begin{cases} y(\ln(xy^2)+1+2x)=0 \\ x(\ln(xy^2)+2+x)=0. \end{cases}$$
Possiamo dividere per y la prima equazione e per x la seconda in quanto, grazie alla presenza del logaritmo, x e y devono essere non nulli; il sistema ha quindi per soluzione i punti $(1,e^{-3/2}$ e $(1,-e^{-3/2})$.

6. Dobbiamo risolvere il sistema
$$\begin{cases} \cos(2x) = 0 \\ \cos(2y) = 0; \end{cases}$$
si ottengono quindi infiniti punti stazionari, tutti e soli i punti
$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{h\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right), \qquad h, k \in \mathbb{Z}.$$

Soluzione 5.36 La funzione $\operatorname{senh} t = (e^t - e^{-t})/2$ è strettamente crescente per cui i punti critici, e la loro natura, sono gli stessi della funzione
$$g(x, y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2.$$
A questo punto è possibile studiare la funzione g anziché f perché $\operatorname{senh} t$ è strettamente crescente e quindi la sua derivata è sempre diversa da zero, se fosse solamente crescente (non decrescente) ciò non sarebbe possibile. Un'altra osservazione: nel caso di una funzione strettamente decrescente il ragionamento può essere applicato comunque, con l'attenzione che la natura dei punti viene mutata, un punto di massimo per g sarebbe un minimo per f e viceversa. Vediamo ora di capire com'è fatto l'insieme E. La disequazione $|x|(1 + (y - 2)^2) - 2 < 0$ è equivalente a
$$|x| < \frac{2}{1 + (y - 2)^2},$$
per cui E è un insieme illimitato come quello in Figura 5.13. Per ricavarlo si noti che la diseguaglianza denota la parte interna alle due curve di equazione $x = \frac{2}{1+(y-2)^2}$ e $x = -\frac{2}{1+(y-2)^2}$. Svolgiamo ai calcoli: posto il gradiente di g uguale a $(0, 0)$ si trovano i punti $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 2)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 2)$. I punti $(-\sqrt{2}, 0)$ e $(\sqrt{2}, 0)$ non appartengono ad E, per cui non ci interessano. Calcolando le derivate seconde si ottiene che la matrice Hessiana è
$$H_g(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 6y - 6 \end{pmatrix}$$
Questo è il caso più fortunato: la matrice è diagonale per cui conosciamo già gli autovalori il cui segno ci fornisce le informazioni sulla natura dei punti:
$$H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \text{punto di massimo locale}$$
$$H_g(0, 2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{punto di sella}$$
$$H_g(\pm\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{punti di sella}$$
$$H_g(\pm\sqrt{2}, 2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \text{punti di minimo locale}$$
La funzione f non ammette massimo e minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$; infatti
$$\lim_{|x| \to +\infty} g(x, 0) = +\infty, \qquad \lim_{y \to -\infty} g(0, y) = -\infty,$$
per cui poiché il seno iperbolico tende a $-\infty$ a $-\infty$ e tende a $+\infty$ a $+\infty$ anche f risulta illimitata sia dal basso che dall'alto.

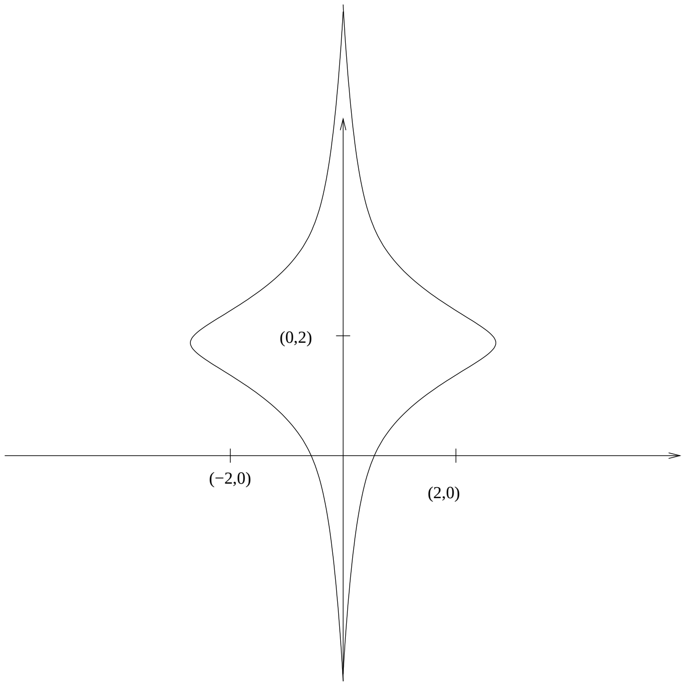


Figura 5.13:

Soluzione 5.37 Annullando il gradiente si arriva alle equazioni

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x^9 = x \\ y^3 = x \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x(x^8 - 1) = 0 \\ y^3 = x \end{cases}$$

per cui le soluzioni sono $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il punto $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo il segno degli autovalori: anche se Δ_1, il determinante del minore principale 1×1 (di fatto il termine $[H_f(0,0)]_{11}$ della matrice) è nullo, si ha che $\Delta_2 = -16$ è anche il determinante della matrice nonché il prodotto degli autovalori: ne deduciamo che necessariamente uno è positivo e l'altro negativo per cui $(0,0)$ è un punto di sella. Per quanto riguarda il punto $(1,1)$ si ha che

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Si può verificare che questa matrice é definita positiva, per cui $(1,1)$ è un punto di minimo locale stretto. Si può calcolare anche il suo determinante, che è positivo; quindi il prodotto dei due autovalori è positivo $(144-16)$. Si potrebbero avere due autovalori positivi o due autovalori negativi. Un altro invariante è la traccia, la somma degli elementi sulla diagonale, che è anche la somma degli autovalori. La traccia è 24 per cui se la somma degli autovalori è positiva deduciamo che il segno dei due autovalori non può essere altro che positivo. Lo stesso vale per il punto $(-1,-1)$. Per concludere calcoliamo il limite

$$\lim_{|(x,y)|\to+\infty} f(x,y) = +\infty,$$

per cui la funzione non ammette massimo e ammette due punti di minimo assoluto.

Soluzione 5.38 Annullando il gradiente si ottiene

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 4x^3 + 4y^3 = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $x = -y$ e quindi dalla seconda $4y(y^2-2) = 0$. Per cui le soluzioni sono $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

che è definita positiva, per cui i due punti sono di minimo locale, ma

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

ha determinante 0 e quindi almeno uno dei due autovalori è 0 (la traccia in questo caso non aiuta). Per stabilire la natura del punto $(0,0)$, si può studiare il segno di f per capire se il punto in questione è di sella: si osservi che

$$f(x,x) = 2x^4 + 2$$

e quindi $(0,0)$ risulta di minimo per f ristretta alla retta $x = y$, mentre risulta di massimo per f ristretta alla retta $x = -y$. Infatti

$$f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 + 2,$$

che ha un massimo in $x = 0$ ($\frac{d}{dx}(2x^4 - 8x^2 + 2)|_{x=0} = 0$, $\frac{d^2}{dx^2}(2x^4 - 8x^2 + 2)|_{x=0} = -16$). Si conclude che $(0,0)$ è un punto di sella per f.

Soluzione 5.39 La funzione data è di classe C^1 e il suo gradiente è dato da

$$\nabla f(x,y) = ((y^2 - y)(2x-1)e^{x^2-x}, (2y-1)e^{x^2-x});$$

quindi di punti stazionari, soluzioni di $\nabla f(x,y) = 0$, c'è solo il punto $(1/2, 1/2)$. Per classificarlo, scriviamo la matrice Hesiana di f

$$Hf(x,y) = e^{x^2-x} \begin{pmatrix} (y^2-y)(2+(2x-1)^2) & 2y-1 \\ 2y-1 & 2 \end{pmatrix}$$

che nel punto stazionario diventa

$$Hf(1/2,1/2) = e^{-1/4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

dato che i due autovalori di tale matrice sono dati da $-\frac{1}{2}e^{-1/4}$ e $2e^{-1/4}$, se ne deduce che il punto stazionario è un punto di sella.

Soluzione 5.40 Per quanto riguarda la prima funzione abbiamo che

$$\nabla f(x,y) = (-2xy + 2x^4 - 3x^2y + 3x^4, 2y - x^3 - x^2) = (0,0)$$

nei punti $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2/3, 10/27)$. La matrice Hessiana è data da

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 20x^3 - 6xy - 2y & -3x^2 - 2x \\ -3x^2 - 2x & 2 \end{pmatrix}$$

che nei punti stazionari diventa

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, Hf(2/3,10/27) = \begin{pmatrix} \frac{40}{9} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & 2 \end{pmatrix};$$

la prima matrice è solo semidefinita positiva, quindi non possiamo concludere nulla al momento, mentre la seconda è indefinita in quanto il determinante è negativo e quindi $(1,1)$ è un punto di sella, mentre la terza matrice è definita positiva in quanto sia determinante che traccia sono positivi, quindi $(2/3, 10/27)$ è un punto di minimo locale stretto.

Per classificare il primo punto, dato che $f(0,0) = 0$, si studia il livello E_0; esso è descritto in figura 5.14 e quindi, dato che vicino a $(0,0)$ la funzione assume sia valori positivi che negativi, se ne deduce che $(0,0)$ è un punto di sella.

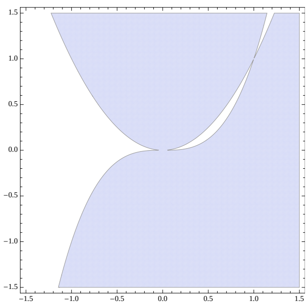


Figura 5.14: Insieme di positività della funzione $(y - x^2)(y - x^3)$.

Per quanto riguarda la seconda funzione abbiamo che

$$\nabla g(x,y,z) = (2xy - 2, x^2 + 2yz, y^2 + 2z) = (0,0,0)$$

unicamente nel punto $(1, 1, 1/2)$ che quindi è l'unico punto stazionario per g. La matrice Hessiana di g è data da

$$Hg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{pmatrix}$$

che nel punto stazionario diventa

$$Hg(1, 1, 1/2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dato che

$$A_1 = 2, A_2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = Hg(1, 1, 1/2)$$

hanno la proprietà che $\det A_1 = 2 > 0$, $\det A_2 = -2 < 0$, $\det A_3 = -12 < 0$, se ne deduce che $(1, 1, 1/2)$ è un punto di sella in quanto la matrice Hessiana è indefinita.

Soluzione 5.41 La funzione data è di classe C^1 sull'insieme

$$E = \mathbb{R}^3 \setminus (\{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{z = 0\})$$

che è $\mathbb{R}^3$ privato dei tre assi cartesiani; il gradiente della funzione è dato da

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{1}{x^2} + yz, -\frac{1}{y^2} + xz, -\frac{1}{z^2} + xy \right).$$

Il sistema $\nabla f(x, y, z) = 0$ ha come soluzione i due punti $(1, 1, 1)$ e $(-1, -1, -1)$. Per la classificazione, calcoliamo la matrice Hessiana

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & z & y \\ z & \frac{2}{y^3} & x \\ y & x & \frac{2}{z^3} \end{pmatrix}.$$

In $(1, 1, 1)$ tale matrice diventa

$$A = Hf(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

dato che $A_1 = 2 > 0$, $\det A_2 = 3 > 0$ e $\det A = 4 > 0$, se ne deduce che A è definita positiva e quindi il punto $(1, 1, 1)$ è un punto di minimo locale stretto. Per quanto riguarda il punto $(-1, -1, -1)$ si ha che $Hf(-1, -1, -1) = -A$, e quindi la matrice è definita negativa, da cui il fatto che $(-1, -1, -1)$ è un punto di massimo locale stretto.

Soluzione 5.42 Al solito si devono calcolare le derivate parziali e le si annullano. Si ottiene

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \\ 3z^2 - 2x \end{cases}$$

da cui si ottengono i punti $(0,0,0)$ e $(2/3,0,2/3)$. La matrice hessiana è data da

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 12y^2+2 & 0 \\ -2 & 0 & 6z \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Valutiamo i determinanti dei minori pricipali: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -8$. La matrice non è definita positiva e il prodotto degli autovalori (Δ_3) è negativo: gli autovalori potrebbero essere tutti negativi oppure due positivi e uno negativo. Ma $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$, per cui due autovalori sono positivi (un altro invariante è la traccia della matrice, ossia la somma degli elementi sulla diagonale che corrisponde alla somma degli autovalori: poiché la somma è 4 anche da ciò si può dedurre che i tre autovalori non possono essere tutti negativi). Conclusione: $(0,0,0)$ non è né di massimo, né di minimo. I minori principali di

$$H_f(2/3,0,2/3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

hanno determinanti $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = 8$, per cui il punto $(2/3,0,2/3)$ è di minimo locale stretto.

Soluzione 5.43 Le derivate prime di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -24x^2 + 24xy + 2x - 2y - 6y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2y - 2x + 3y^2 - 12xy + 12x^2.$$

Esse si annullano in $(0,0)$, unico punto critico. Studiamo le derivate seconde. La matrice hessiana in $(0,0)$ è

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo: almeno uno dei due autovalori è nullo. In realtà solo uno degli autovalori é nullo visto che la traccia è positiva, ma questo non ci aiuta a capire la natura del punto. Gli autovalori dovrebbero essere 0 e 4 dato che il determinante è 0 e la traccia 4, ma in dimensione più alta non è possibile determinare gli autovalori in questo modo (se conosco la somma e il prodotto di n numeri posso determinare gli n numeri solo se $n = 2$). Calcoliamo allora il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda.$$

Le radici sono 0 e 4. Gli autospazi: relativamente a $\lambda = 0$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che fornisce la retta $y = x$. Non è importante calcolare l'altro, perché l'autovalore è positivo e la funzione ristretta all'autospazio relativo all'autovalore 4 é convessa. Bisogna capire che cosa succede restringendo la funzione alla retta $y = x$; valutiamo

$$f(x,x) = -x^3$$

funzione non è convessa, per cui il punto $(0,0)$ non è di minimo. Se la funzione fosse più complessa, si dovrebbe eseguire lo studio delle derivate successive di $f(x,x)$ per $x=0$.

Soluzione 5.44 Derivando f si ottiene che l'unico punto critico è $(0,0,0)$. La matrice Hessiana in quel punto è data da

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 3/2 & 7 & 0 \\ 7 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha determinante nullo, per cui almeno uno degli autovalori è nullo. La traccia positiva, ma non possiamo determinare il segno dei due autovalori (potrebbero essere tutti e due positivi oppure uno positivo e l'altro nullo, non entrambi negativi). Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = \lambda\big[(3/2-\lambda)(16-\lambda)-49\big],$$

che si annulla per $\lambda = 0$ e per

$$\lambda = \frac{35 \pm \sqrt{1625}}{4};$$

abbiamo quindi un autovalore positivo e uno negativo. Concludiamo che lungo una direzione la funzione è concava, lungo un'altra è convessa e non c'è bisogno di verificare il comportamento della funzione lungo l'autospazio relativo all'autovalore nullo.