UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
C.d.S. Ingegneria Civile e Ambientale

Eserciziario di Analisi Matematica II [1]

Michele Miranda
Dipartimento di Matematica e Informatica
via Machiavelli 35, I-44121 Ferara
e-mail: michele.miranda@unife.it

a.a. 2019-2020

[1] versione aggiornata al 4 novembre 2019

Indice

1 Funzioni continue in più variabili **1**

1.1 Soluzioni 4

2 Curve **17**

2.1 Soluzioni 20

3 Derivabilità e differenziabilità **39**

3.1 Soluzioni 43

4 Funzioni implicite e superfici **69**

4.1 Alcuni esempi senza dimostrazioni 72

4.1.1 Proiezione stereografica della sfera 72

4.1.2 Nastro di Möbius 73

4.2 Soluzioni 73

5 Estremi e punti stazionari **89**

5.1 Massimi e minimi su insiemi 89

5.2 Punti stazionari e loro classificazione 93

5.3 Soluzioni 94

6 Integrali multipli **127**

6.1 Soluzioni 132

Capitolo 6

Integrali multipli

Esercizio 6.1 Dire se l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 1 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$$

è misurabile ed in caso determinarne la misura.

Esercizio 6.2 Dire se l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \leq y \leq x^2\}$$

è semplice o meno (in caso, dire rispetto a quale asse); si calcoli quindi l'area di E.

Esercizio 6.3 Integrare la funzione $f(x, y) = y(x^2 + \mathrm{sen} x) + e^x$ sull'insieme $Q = [0, \pi] \times [0, 3]$.

Esercizio 6.4 Calcolare

$$\int_E (x^2 + y) dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 2\}$.

Esercizio 6.5 Calcolare l'integrale

$$\int_E (x^2 - 3y^2) \mathrm{sen}(xy) dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -3, y \leq 3, y \geq x\}$.

Esercizio 6.6 Calcolare

$$\int_E \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x^2/2 \leq y \leq x^2\}$.

Esercizio 6.7 Calcolare

$$\int_E x dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$.

Esercizio 6.8 Calcolare l'integrale

$$\int_E x^3 y^5 dx dy$$

dove $E = E_1 \cup E_2$ con

$$\begin{aligned} E_1 =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq x^2\} \\ E_2 =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}. \end{aligned}$$

Esercizio 6.9 Calcolare

$$\int_E \frac{xy^2}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Esercizio 6.10 Calcolare

$$\int_E \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$$

sull'insieme definito in coordinate polari da

$$E = \left\{(\varrho, \vartheta) : \varrho \leq \vartheta, 0 \leq \vartheta \leq \frac{3}{2}\pi\right\}.$$

Esercizio 6.11 Calcolare

$$\int_E \frac{\tan(x + y)}{x + y} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$.

Esercizio 6.12 Calcolare

$$\int_E (x + y) dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2\}$.

Esercizio 6.13 Calcolare

$$\int_E x^2 (y - x^3) e^{y + x^3} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 3, x \geq 1\}$.

Esercizio 6.14 Calcolare

$$\int_E \frac{3}{x^2 y^2} dx dy$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/x, x \leq y \leq 4x\}$.

Esercizio 6.15 Calcolare area e volume della palla centrata nell'origine e di raggio $r > 0$.

Esercizio 6.16 Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int_E x^2|y|dxdy,$$

con $E = \{|x| + |y| \le 1\}$.

Esercizio 6.17 Dire se l'insieme illimitato

$$E = \{(x, y) : x \ge 0, 0 \le y \le e^{-x}\}$$

è misurabile; in caso determinarne la misura e calcolare

$$\int_E xdxdy.$$

Esercizio 6.18 Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ risultano integrabili sulla palla centrata nell'origine e di raggio $r > 0$ le funzioni:

1. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$ nel piano;
2. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$ nello spazio.

Determinare infine il loro integrale.

Esercizio 6.19 Calcolare

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}x}{x}dx$$

(Suggerimento; si consideri $f(x, y) = \text{sen}x e^{-xy}$ e la si integri su $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$).

Esercizio 6.20 Calcolare l'area della regione E compresa tra le curve

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ \varrho^2 = 2\cos 2\vartheta, \quad \vartheta \in [-\pi/4, \pi/4]. \end{cases}$$

Esercizio 6.21 Trovare il volume del tetraedro T di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

Esercizio 6.22 Determinare il volume dell'intersezione dei due cilindri

$$C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1\}, \qquad C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le 1\}.$$

Esercizio 6.23 Data la funzione $z = f(x) = e^x$, $x \in [1, 3]$, si calcolino i volumi dei solidi di rotazione ottenuti ruotando l'insieme piano definito come sottografico di f in $\mathbb{R}^2$,

$$\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 3], 0 \le z \le e^x\}$$

sia attorno all'asse x che attorno all'asse z.

Esercizio 6.24 Determinare il volume del toro di raggio R ottenuto ruotando una circonferenza di raggio r.

Esercizio 6.25 Determinare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 9(1 - \sqrt{x^2 + z^2})^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 6.26 Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 - 2 \leq z \leq 4 - x - y\}.$$

Esercizio 6.27 Disegnare il sottoinsieme del piano

$$E = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\right\}.$$

Si determini tale insieme usando anche le coordinate polari e si calcoli il seguente integrale:

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Esercizio 6.28 Dire se la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

è integrabile in senso generalizzato nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.

Esercizio 6.29 Calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

(Suggerimento: calcolare in $\mathbb{R}^2$ l'integrale di $e^{-x^2-y^2}$).

Esercizio 6.30 Ricordiamo la seguente definizione; un insieme illimitato E si dice misurabile se esiste una successione di insiemi limitati e misurabili E_h invadenti E, cioè tali che $E_h \subset E_{h+1}$ e $E = \bigcup_h E_h$. In tal caso si porrà $|E| = \lim_h |E_h|$. Dimostrare quindi, dopo averlo disegnato, che l'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq |\log(x^2 + y^2)|\}$$

è misurabile e se ne calcoli la misura (cioè se ne determini il volume). Si dica infine che relazione c'è tra il procedimento precedente e il calcolo dell'integrale in senso generalizzato della funzione $f(x, y) = |\log(x^2 + y^2)|$ su $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 6.31 Determinare l'area dell'ellisse racchiusa dalla curva

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

ed il volume dell'ellissoide racchiuso dalla superficie

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

Esercizio 6.32 Determinare il volume della regione interna sia alla superficie sferica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

che alla superficie cilindrica

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

Esercizio 6.33 Nell'integrale

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)dy$$

si scambi l'ordine di integrazione, cioè si lasci libera la variabile y e si scriva x in dipendanza da y.

Esercizio 6.34 Calcolare il volume della porzione di cono ($\alpha > 0$)

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha(x^2 + y^2) \leq z^2, 0 \leq z \leq h\right\}$$

Esercizio 6.35 Determinare

$$\int_E \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$$

con

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h, x^2 + y^2 \leq \left(\frac{Rz}{h}\right)^2\right\}.$$

Esercizio 6.36 Si calcoli l'integrale

$$\int_E \frac{x^2}{x^2 + z^2} dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 - y^2 + z^2 \leq 0, y \geq 0\right\}.$$

Esercizio 6.37 Calcolare, se esiste, l'integrale

$$\int_E f(x, y)dxdy$$

dove

$$f(x, y) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{x + y}, \qquad E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x,\ 0 < x + y \leq 2\right\}.$$

Esercizio 6.38 Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}} \operatorname{sen}(x + y + z)dxdydz.$$

Esercizio 6.39 Calcolare il seguente integrale

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}}\,dxdydz$$

dove

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1\right\}.$$

Esercizio 6.40 Calcolare volume e baricentro dell'insieme

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \ge 0, y \ge 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \le 1, 0 \le z \le \sqrt{xy}\}.$$

Esercizio 6.41 Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse x di una lamina omogenea nello spazio descritta dall'insieme dei punti

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x \in [0,\pi], 0 \le y \le \operatorname{sen} x\}.$$

Esercizio 6.42 Calcolare baricentro e momento di inerzia per la rotazione attorno all'asse z del cono

$$E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le (1-z)^2, 0 \le z \le 1\}$$

la cui densità di massa è descritta dalla funzione $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z$.

6.1 Soluzioni

Soluzione 6.1 L'insieme E è determinato dalle condizioni

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 1, y^2 - 1 \le x \le \sqrt{1-y^2}\},$$

dove le condizioni sulla y si determinano richiedendo la buona definizione della radice quadrata e dalla richiesta

$$y^2 - 1 \le \sqrt{1-y^2}.$$

Quindi l'insieme E è semplice e quindi misurabile e la sua misura, cioè la sua area, è data da

$$|E| = \text{Area}(E) = \int_E dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2-1}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-y^2} - y^2 + 1)dy = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}.$$

Soluzione 6.2 Dimostriamo che l'insieme dato è y-semplice; notiamo che abbiamo già la condizione $h_1(x) = x^4 \le y \le x^2 = h_2(x)$, e cioè abbiamo le due funzioni continue h_1 e h_2 che determinano le limitazioni sulla variabile y. Manca da determinare l'intervallo su cui è definita la variabile x; questo si individua imponendo la condizione $x^4 \le x^2$, altrimenti la condizione $x^4 \le y \le x^2$ ha come risultato l'insieme vuoto. Ma la condizione $x^4 \le x^2$ si verifica per $x \in [-1,1]$, e quindi troviamo che

$$E = \{-1 \le x \le 1, x^4 \le y \le x^2\}.$$

L'area di E sarà data dall'integrale della funzione 1 su E, cioè

$$\text{Area}(E) = \int_E dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^4}^{x^2} dy = 2\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \frac{4}{15}.$$

Soluzione 6.3 Essendo il dominio un rettangolo si può scrivere

$$\int_Q f(x,y)dxdy = \int_0^\pi \Big(\int_0^3 f(x,y)dy\Big)dx = \int_0^3 \Big(\int_0^\pi f(x,y)dx\Big)dy$$

e integrare indifferentemente prima rispetto ad una variabile e poi rispetto all'altra. Scegliamo di integrare prima rispetto alla variabile y:

$$\begin{aligned}\int_Q f(x,y)dxdy &= \int_0^\pi \Big(\int_0^3 [y(x^2+\text{sen}x)+e^x]dy\Big)dx\\ &= \int_0^\pi \Big(\frac{y^2x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\text{sen}x+ye^x\Big)\Big|_0^3 dx\\ &= \int_0^\pi \Big(\frac{9x^2}{2}+\frac{9}{2}\text{sen}x+3e^x\Big)dx\\ &= \Big(\frac{9x^3}{6}-\frac{9}{2}\cos x+3e^x\Big)\Big|_0^\pi\\ &= \frac{3\pi^3}{2}+6+3e^\pi.\end{aligned}$$

Soluzione 6.4 L'insieme E è quello rappresentato in Figura 6.1. Scegliendo x come varia-

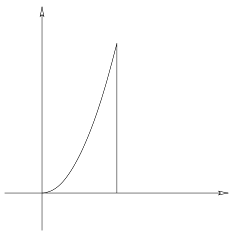

Figura 6.1:

bile libera si può scrivere l'integrale

$$\int_0^2 dx\Big(\int_0^{x^2}(x^2+y)dy\Big)$$

che diventa

$$\int_0^2 dx\Big(x^2y+\frac{y^2}{2}\Big)\Big|_{y=0}^{y=x^2} = \int_0^2 \frac{3}{2}x^4dx = \frac{48}{5}.$$

Scegliendo y come variabile libera l'integrale diventa (svolgerlo per esercizio)

$$\int_0^4 dy\Big(\int_{\sqrt{y}}^2 (x^2+y)dx\Big).$$

Soluzione 6.5 Il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili; scrivendo

$$\int_E (x^2-3y^2)\text{sen}(xy)dxdy = \int_E x^2\text{sen}(xy)dxdy - 3\int_E y^2\text{sen}(xy)dxdy$$

conviene tenere nel primo integrale come variabile libera la x, mentre nel secondo conviene tenere come variabile libera la y; quindi

$$\begin{aligned}\int_E (x^2-3y^2)\operatorname{sen}(xy)dxdy &= \int_{-3}^{3} x^2 \int_x^3 \operatorname{sen}(xy)dydx + \\ &\quad -3\int_{-3}^{3} y^2 \int_{-3}^{y} \operatorname{sen}(xy)dxdy \\ &= \int_{-3}^{3}(x\cos x^2 - x\cos 3x)dx + \\ &\quad -3\int_{-3}^{3}(y\cos 3y - y\cos y^2)dy = 0,\end{aligned}$$

in quanto integrali di funzioni dispari su intervalli simmetrici rispetto all'origine.

Soluzione 6.6 Scegliendo x come variabile libera, l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int_E \frac{x}{x^2+y^2}dxdy &= \int_1^2\left(\int_{x^2/2}^{x^2}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx \\ &= \int_1^2 (\arctan x - \arctan x/2)\,dx \\ &= \left[x(\arctan x - \arctan x/2) + \log\left(\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right]_1^2 \\ &= 2\arctan 2 - \frac{3}{4}\pi + \arctan\frac{1}{2} + \log\frac{8}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}.\end{aligned}$$

Soluzione 6.7 Se scegliamo x come variabile libera dobbiamo spezzare in tre l'integrale (in tre insiemi come indicato in Figura 6.2). Conviene quindi scegliere y come variabile libera:

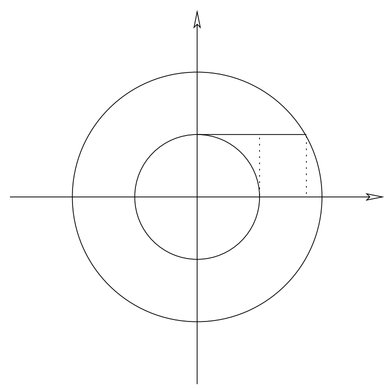

Figura 6.2:

$$\int_E f(x,y)dxdy = \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} xdx \Big) dy$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\big(4-y^2-(1-y^2)\big)dy = \frac{3}{2}.$$

Soluzione 6.8 Notiamo anzitutto che la funzione integranda è dispari rispetto ad entrambe le variabile, inoltre il dominio E_1 è simmetrico rispetto all'asse y mentre E_2 è simmetrico rispetto all'asse x, quindi

$$\int_E x^3y^5dxdy = \int_{E_1} x^3y^5dxdy + \int_{E_2} x^3y^5dxdy = 0.$$

Soluzione 6.9 L'insieme di integrazione non è normale rispetto a nessuna delle due variabili; notiamo però che se passiamo alle coordinate polari, esso diventa, nelle variabili ϱ e ϑ, il rettangolo $[1,\sqrt{2}] \times [\pi/4, 5\pi/4]$. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned}\int_E \frac{xy^2}{x^2+y^2}dxdy &= \int_{[1,\sqrt{2}]\times[\pi/4,5\pi/4]} \frac{\varrho\cos\vartheta\varrho^2\mathrm{sen}^2\vartheta}{\varrho^2}\varrho d\varrho d\vartheta \\ &= \int_1^{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \varrho^2\cos\vartheta\mathrm{sen}^2\vartheta d\vartheta d\varrho \\ &= \frac{\sqrt{2}-4}{18}.\end{aligned}$$

Soluzione 6.10 Visto che l'insieme è già espresso in coordinate polari ed in tali coordinate è un insieme semplice, conviene calcolare l'integrale mediante cambio di variabili per ottenenere

$$\int_E \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\vartheta \int_o^{\vartheta} \frac{\varrho^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\varrho^2}\varrho d\varrho$$
$$= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\vartheta} \sin\vartheta\cos\vartheta\varrho d\varrho$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \vartheta^2\sin(2\vartheta)d\vartheta = \frac{9\pi^2}{32} - \frac{1}{8}.$$

Soluzione 6.11 Notiamo che il dominio di integrazione è normale rispetto ad entrambe le variabili, però la funzione integranda $\tan t/t$ non ammette primitiva; proviamo quindi ad effettuare. Cerchiamo un cambio di variabili tale che la matrice del cambiamento di coordinate abbia determinante 1; un possibile cambio di variabili di questo tipo si può ottenere ponendo $u = x+y$, $v = x$. Nelle variabili (u,v) l'insieme E diventa

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u \leq 1\,, 0 < v < u\},$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_E \frac{\tan(x+y)}{x+y}dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^u \frac{\tan u}{u}dv\right)du = \int_0^1 \tan u du \\ &= -\log\cos 1.\end{aligned}$$

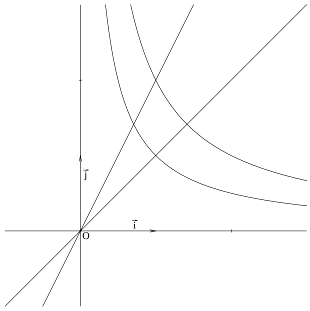

Figura 6.3:

Soluzione 6.12 L'insieme E è quello in Figura 6.3. Si può svolgere il calcolo in coordianate cartesiane, ma è più semplice effettuare il cambio di coordinate

$$u = xy\,, \qquad v = \frac{y}{x}$$

da cui si ricava che

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \qquad y = \sqrt{uv}.$$

Lo jacobiano di tale trasformazione è dato da $1/2v$ per cui si ottiene

$$\int_1^2 dv \int_1^2 du\Big(\sqrt{uv} + \sqrt{\frac{u}{v}}\Big)\frac{1}{2v}$$

che, svolto, dà il risultato.

Soluzione 6.13 Se effettuiamo la sostituzione $u = y - x^3$, $v = y + x^3$, notiamo che la funzione $F(x,y) = (y - x^3, y + x^3)$ è una applicazione differenziabile con

$$|\det DF(x,y)| = \left|\det\begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ -3x^2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 6x^2,$$

e quindi eccettuato i punti in cui $x = 0$, la funzione F è un diffeomorfismo. Notiamo che sull'insieme E si ha $x \geq 1$, e quindi possiamo applicare la formula di cambiamento di variabili, tenendo presente che nelle variabili (u,v) l'insieme E diventa

$$\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 1\,, u + 4 \leq v \leq 6 - u\},$$

$$\begin{aligned}
\int_E x^2(y - x^3)e^{y+x^3}dxdy &= \frac{1}{6}\int_E |\det DF(x,y)|(y - x^3)e^{y+x^3}dxdy \\
&= \frac{1}{6}\int_0^1 \left(\int_{u+4}^{6-u} ue^v dv\right) du \\
&= -\frac{e^5 + e^4}{6}.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.14 Passando alle coordinate polari, l'insieme E diventa

$$\{(\vartheta, \rho) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/4 \leq \vartheta \leq \arctan 4, \rho \geq 1/\sqrt{\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}\};$$

quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int_E \frac{3}{x^2y^2}dxdy &= \int_{\pi/4}^{\arctan 4} d\vartheta \int_{1/\sqrt{\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}}^{+\infty} \frac{3}{\rho^4\cos^2\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta}\rho d\rho \\ &= \frac{3}{2}\int_{\pi/4}^{\arctan 4} \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}d\vartheta \\ &= 3\log 2.\end{aligned}$$

Soluzione 6.15 Iniziamo con la palla nel piano; l'insieme è dato da $\{x^2 + y^2 \leq r^2\}$; passando quindi alle coordinate polari, si ottiene che

$$\text{Area}(\overline{B}_r(0)) = \int_{\overline{B}_r(0)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^r \varrho d\varrho = \pi r^2.$$

Nello spazio, utlizzeremo invece le coordinate sferiche per ottenere

$$\text{Vol}(\overline{B}_r(0))dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^r \varrho^2 \operatorname{sen}\varphi d\varrho = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Soluzione 6.16 L'insieme E è dato da un quadrato nel piano di lato $\sqrt{2}$ e ruotato di $\pi/4$: sfruttando quindi le parità della funzione integranda e le simmetrie di E, possiamo concludere che, se denotiamo con $E_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$, allora

$$\int_E x^2|y|dxdy = 4\int_{E_1} x^2ydxdy = \frac{1}{15}.$$

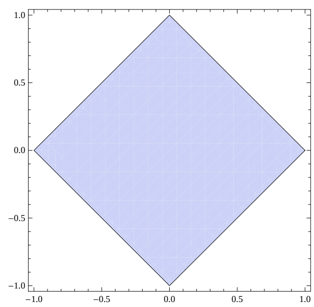

Figura 6.4:

Soluzione 6.17 L'insieme dato è illimitato ma unione degli insiemi semplici ed invadenti

$$E_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq h, 0 \leq y \leq e^{-x}\},$$

cioè $E_h \subset E_{h+1}$ e

$$E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h.$$

Gli insiemi E_h sono misurabili in quanto insiemi semplici e

$$|E_h| = \text{Area}(E_h) = \int_0^h dx \int_o^{e^{-x}} dy = \int_0^h e^{-x} dx = (1 - e^{-h});$$

ne deduciamo che E è misurabile e di misura finita data da

$$|E| = \text{Area}(E) = \lim_{h \to +\infty} |E_h| = 1.$$

Per quanto riguarda l'integrale, si tratta di considerare

$$\int_{E_h} |x| dxdy = \int_{E_h} x dxdy = 1 - e^{-h} - he^{-h} \leq 1;$$

quindi dato che

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} \int_{E_h} |x| dxdy \leq 1 < +\infty,$$

ne deduciamo che la funzione x è integrabile in senso assoluto su E e vale

$$\int_E x dxdy = \lim_{h \to +\infty} \int_{E_h} x dxdy = 1.$$

Soluzione 6.18 La funzione ha per $\alpha < 0$ una singolarità nell'origine, quindi dobbiamo utilizzare la teoria degli integrali generalizzati. Possiamo considerare come insiemi invadenti gli insiemi $E_h = \overline{B}_r(0) \setminus B_{1/h}(0)$. Nel caso della prima funzione, passando alle coordinate polari otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{E_h} (x^2 + y^2)^\alpha dxdy &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{1/h}^r \varrho^{2\alpha} \varrho d\varrho = 2\pi \int_{1/h}^r \varrho^{2\alpha+1} d\varrho \\
&= \begin{cases} \dfrac{\pi}{\alpha+1}(r^{2\alpha+2} - h^{-2\alpha-2}) & \alpha \neq -1 \\ \\ 2\pi(\ln r + \ln h) & \alpha = -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

La funzione sarà quindi integrabile per $\alpha > -1$ e l'integrale vale

$$\int_{\overline{B}_r(0)} f(x,y) dxdy = \frac{\pi r^{2\alpha+2}}{\alpha+1}.$$

Nella dimensione tre, si passa alle coordinate sferiche e si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{E_h} (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha dxdydz &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi d\varphi \int_{1/h}^r \varrho^{2\alpha} \varrho^2 \text{sen}\varphi d\varrho \\
&= \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2\alpha+3}(r^{2\alpha+3} - h^{-2\alpha-3}) & \alpha \neq -\dfrac{3}{2} \\ \\ 4\pi(\ln r + \ln h) & \alpha = -\dfrac{3}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi la funzione è integrabile se e solo se $\alpha > -3/2$ e

$$\int_{\overline{B}_r(0)} f(x,y,z)dxdydz = \frac{4\pi}{2\alpha+3} r^{2\alpha+3}.$$

Soluzione 6.19 Se integriamo la funzione $f(x,y) = \text{sen}x e^{-xy}$ su $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$ prima rispetto a y otteniamo

$$\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)} f(x,y)dydx = \int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx,$$

mentre se integriamo prima rispetto a x si ottiene

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \text{sen}x e^{-xy} dxdy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{2},$$

da cui si ricava che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soluzione 6.20 Riscrivendo la prima curva, che è una circonferenza centrata in $(1/2, 0)$ e raggio $1/2$, in coordinate polari, abbiamo che essa è descritta dall'equazione

$$\rho = \cos\vartheta, \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2].$$

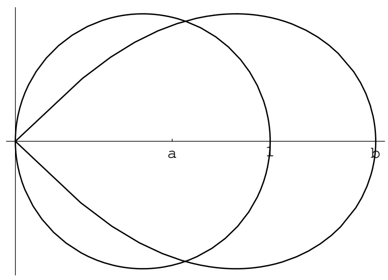

Figura 6.5:

Notando a questo punto che il dominio S di cui si vuole calcolare l'area è simmetrico rispetto all'asse x (si veda la figura (6.5)), la sua area sarà data da

$$\text{Area}(S) = 2\text{Area}(S'),$$

dove S' è individuata, nelle coordinate polari, da $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$. Cerchiamo anzitutto l'angolo ϑ_0 per il quale le due curve si incontrano; esso sarà individuato dalla condizione

$$\cos^2\vartheta = 2\cos 2\vartheta,$$

che ha come soluzione

$$\text{sen}\vartheta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\vartheta_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

L'area di S' sarà quindi data da

$$\begin{aligned}
\text{Area}(S') &= \int_{S'} dxdy = \int_{S'} \varrho d\varrho d\vartheta \\
&= \int_0^{\vartheta_0} d\vartheta \int_0^{\cos\vartheta} \varrho d\varrho + \int_{\vartheta_0}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{2\cos 2\vartheta}} \varrho d\varrho \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16} - \frac{\vartheta_0}{4}.
\end{aligned}$$

In definitiva

$$\text{Area}(S) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{\vartheta_0}{2}.$$

Soluzione 6.21 Il tetraedro è il solido delimitato dai quattro piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ e rappresentato in Figura 6.6. Per calcolare il volume di un solido S (e

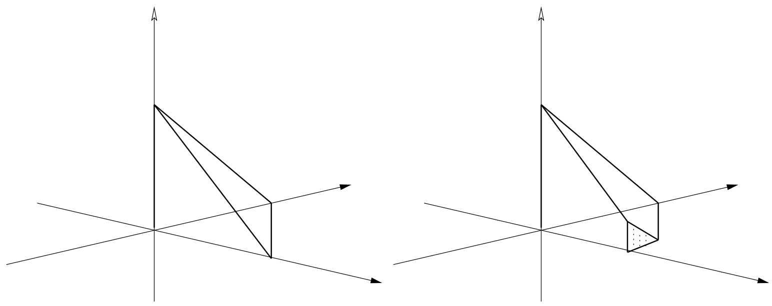

Figura 6.6:

in generale la misura n-dimensionale di un aperto in $\mathbb{R}^n$) si può calcolare l'integrale della funzione 1 sull'insieme S. Per cui valutiamo

$$\int_T dxdydz\,.$$

Scegliendo x come variabile libera si hanno le limitazioni $0 \le x \le 1$. Per x fissato ora esprimiamo gli estremi per y e z (si veda il secondo disegno in Figura 6.6). Scegliendo y si ottiene $0 \le y \le 1 - x$ e infine $0 \le z \le 1 - x - y$. Quindi

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(T) &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy(1 - x - y) \\
&= \int_0^1 dx\, (y - xy - y^2/2)\Big|_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 \left[1 - 2x + x^2 - \frac{x^2 - 2x + 1}{2}\right] dx = \frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Soluzione 6.22 Chiamando V il solido dato dall'intersezione di C_1 e C_2 si ha

$$\int_V dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz = \frac{16}{3}.$$

Soluzione 6.23 Per rotazione di f attorno all'asse x si intende ruotare l'insieme del piano dato dal sottografico di f rispetto all'asse x, operazione che determina l'insieme

$$E = \{(x, y, z) : x \in [1, 3], y^2 + z^2 \leq e^{2x}\},$$

quindi il volume di E, dato che E è stratificato in direzione x e gli strati sono cerchi di raggio e^x, sarà dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \pi \int_2^3 e^{2x} dx = \frac{\pi(e^6 - e^2)}{2}.$$

Per quanto riguarda la rotazione attorno all'asse z, si intende l'insieme che si ottiene ruotando rispetto a z il sottografico di f, cioè l'insieme

$$E = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}\},$$

quindi, dato che E è z–semplice, si ottiene che il suo volume è dato da

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_{\{1 \leq x^2+y^2 \leq 9\}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = 2\pi \int_1^3 \varrho e^{\varrho} d\varrho = 4\pi e^3.$$

Soluzione 6.24 Il toro è una figura la cui superficie può essere ottenuta ruotando una circonferenza di raggio r su una circonferenza di raggio R ortogonale alla prima, $0 < r < R$ per ottenere una figura come quella a sinistra in Figura 6.7. In generale per calcolare il

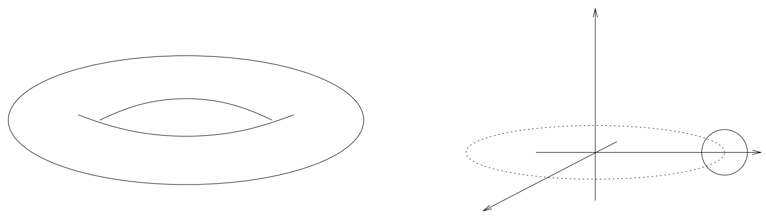

Figura 6.7:

volume di un solido di rotazione, cioè un solido la cui superficie si ottiene ruotando una curva $(z, f(z))$ nel piano con $f > 0$ (si veda la Figura 6.8), si possono usare le coordinate cilindriche. Considerando $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, e il solido ottenuto ruotando il grafico di f, descriviamo il solido con le coordinate

$$(\rho, \vartheta, z) \mapsto (\rho \cos \vartheta, \rho \mathrm{sen} \vartheta, z)$$

il cui jacobiano è ρ. Se denotiamo con S il solido, integrando si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{f(z)} \rho\, d\rho = \pi \int_a^b f^2(z) dz\,.$$

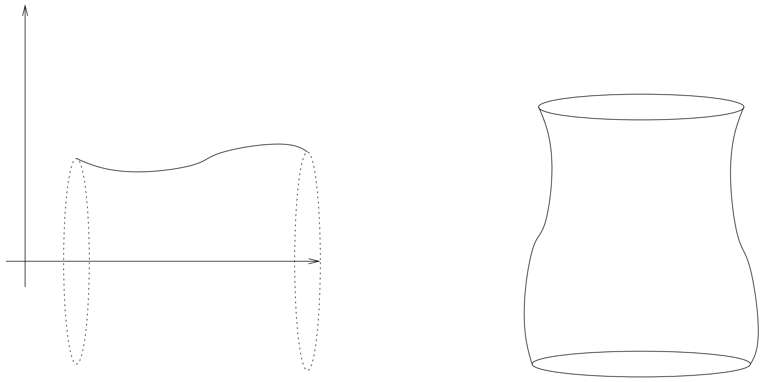

Figura 6.8:

Per calcolare il volume del toro consideriamo quindi le funzioni $f(z) = \sqrt{r^2 - z^2} + R$ e $g(z) = -\sqrt{r^2 - z^2}$ definite tra $-r$ e r valutando prima l'integrale di f^2 al quale sottraiamo l'integrale di g^2. Si ha quindi

$$\pi \int_{-r}^{r} [f^2(z) - g^2(z)]dz = 4R\pi^2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - z^2}dz\,.$$

Si noti che l'integrale da calcolare fornisce l'area del semicerchio, per cui il volume del toro è dato da

$$4R\pi\frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 Rr^2\,.$$

Il risultato puó essere interpretato come il prodotto dell'area del cerchio piccolo πr^2 moltiplicata per la lunghezza della circonferenza grande $2\pi R$.

Soluzione 6.25 L'insieme dato è invariante per rotazioni attorno all'asse y, quindi possiamo provare a passare alle coordinate cilindriche con asse lungo l'asse y, cioè

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = t \\ z = \varrho \mathrm{sen}\vartheta. \end{cases}$$

In queste nuove coordinate l'insieme E risulta essere determinato da

$$\left\{(\vartheta, \varrho, t) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3} \le \varrho \le 1 + \frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}\right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(E) &= \int_E dxdydz = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-1/2}^{1/2} dt \int_{1-\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{1-4t^2}}{3}} \varrho d\varrho \\ &= \frac{4\pi}{3}\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-4t^2}dt = \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Soluzione 6.26 L'insieme di $\mathbb{R}^3$ $x^2+y^2 \le 1$ rappresenta un cilindro centrato nell'origine e raggio 1, avente l'asse z come asse di rotazione. Si chiede pertanto di calcolare il volume della porzione di questo cilindro compreso tra il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2-2$ ed il piano $z = 4-x-y$; otteniamo quindi, dato che per tutti i punti (x,y) per i quali $x^2+y^2 \le 1$ vale la condizione $x^2+y^2-2 \le 4-x-y$,

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz = \int_B dxdy \int_{x^2+y^2-2}^{4-x-y} dz = \int_B (6-x-y-x^2-y^2)dxdy.$$

Quest'ultimo integrale può infine essere calcolato utilizzando le coordinate polari:

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (6-\varrho\cos\vartheta - \varrho\operatorname{sen}\vartheta - \varrho^2)\varrho d\varrho = \frac{11}{2}\pi.$$

Soluzione 6.27 L'insieme dato consiste nella parte esterna al cerchio di raggio $1/2$ centrato nell'origine ed interno al cerchio di raggio $1/2$ centrato in $(1/2,0)$ (si veda Figura 6.9. In

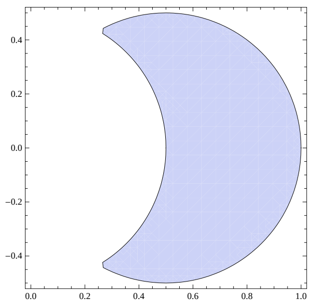

Figura 6.9:

coordinate polari tale insieme diventa

$$E' = \left\{(\vartheta,\varrho) \in (-\pi,\pi] \times [0,+\infty) : \frac{1}{2} \le \varrho \le \cos\vartheta\right\}.$$

Si noti che abbiamo preso $\vartheta \in (-\pi,\pi]$; questa scelta risulta più comoda, in quanto il nostro insieme è contenuto nel semipiano $x \ge 0$. Si deve avere $1/2 \le \cos\vartheta$ per non avere insiemi vuoti in ϱ, da cui si deduce che $\vartheta \in [-\pi/3, \pi/3]$. Possiamo quindi calcolare l'integrale dato passando alle coordinate polari e sfruttando la simmetria dell'insieme E rispetto all'asse x e la parità in y della funzione integranda,

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = 2\int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_{1/2}^{\cos\vartheta} \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}} d\varrho = \frac{\pi}{\sqrt{12}} - 1.$$

Soluzione 6.28 La funzione non è definita per $x+y=0$; possiamo quindi considerare degli insiemi che invadono il triangolo E di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ del tipo

$$E_h = \{(x,y) : \frac{1}{h} \le y \le 1, 0 \le x \le y\}.$$

In questo modo otteniamo che

$$\int_{E_h} \frac{1}{x+y} dxdy = \int_{1/h}^{1} dy \int_0^y \frac{1}{x+y} dx = \int_{1/h}^{1} \log 2 dy = \log 2 \left(1 - \frac{1}{h}\right).$$

La funzione f è positiva e quindi

$$\sup_{h \geq 0} \int_{E_h} \frac{1}{x+y} dxdy \leq \log 2,$$

quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato su E e

$$\int_E \frac{1}{x+y} dxdy = \lim_{h \to +\infty} \int_{E_h} \frac{1}{x+y} dxdy = \log 2.$$

Soluzione 6.29 La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette un'esplicita primitiva. Per calcolare quest'integrale usiamo un trucco: passiamo attraverso un integrale in $\mathbb{R}^2$. Valutiamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Usando le coordinate polari, il cui jacobiano è ρ, otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int_{\mathbb{R}} dx \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} dy \Big) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx \Big(e^{-x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \Big) = \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \Big)^2 \end{aligned}$$

da cui si conclude che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ e più in generale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = (\pi)^{n/2}.$$

Soluzione 6.30 L'insieme E è rappresentato in Figura 6.10; dobbiamo trovare una successione di insiemi misurabili e limitati E_h tali che $E_h \subset E_{h+1}$ e

$$E = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h \qquad \text{(a meno di insiemi di misura nulla).}$$

Una possibile scelta è data dagli insiemi

$$E_h = \{(x, y, z) : \frac{1}{h^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq |\log(x^2 + y^2)|\}.$$

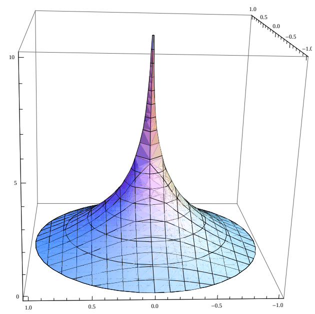

Figura 6.10:

Tali insiemi sono z–semplici, e quindi la loro misura sarà data da

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(E_h) =&|E_h| = \int_{\{\frac{1}{h^2}\le x^2+y^2\le 1\}} dxdy \int_0^{|\log(x^2+y^2)|} dz\\ =&-\int_{\{\frac{1}{h^2}\le x^2+y^2\le 1\}} \log(x^2+y^2)dxdy = -2\pi\int_{1/h}^{2} 2\varrho\log\varrho d\varrho\\ =&\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2h^2}-\frac{\pi\log h}{h^2}.\end{aligned}$$

Quindi $\sup_h \mathrm{Vol}(E_h) < +\infty$; inoltre

$$\bigcup_{h=1}^{\infty} E_h = E\setminus\{x=y=0\},$$

ma l'insieme $\{x=y=0\}$ (l'asse z) è un insieme di misura nulla, quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = \lim_h \mathrm{Vol}(E_h) = \frac{\pi}{2}.$$

Infine, dato che l'insieme è z–semplice, il calcolo del suo volume è esattamente equivalente al calcolo dell'integrale generalizzato

$$\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} |\log(x^2+y^2)|dxdy.$$

Soluzione 6.31 Uso le coordinate polari modificate che possiamo chiamare coordinate ellittiche

$$(\rho,\vartheta)\mapsto(a\rho\cos\vartheta, b\rho\mathrm{sen}\vartheta)$$

che ha jacobiano $ab\rho$. L'area diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 \rho ab\, d\rho = \pi ab.$$

In altro modo, si può fare il cambio di variabili

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right)$$

in modo che l'ellisse data venga trasformata nel cerchio unitario; il determinante della matrice Jacobiana di tale cambiamento di variabili è dato da $\frac{1}{ab}$, e quindi

$$\text{Area}(E) = \int_E dxdy = ab \int_E \frac{1}{ab} dxdy = ab\text{Area}(B_1(0)) = \pi ab.$$

Per l'ellissoide possiamo considerare il cambio di variabili

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$$

che trasforma l'elissoide nella palla unitaria. Il determinante della matrice Jacobiana è $\frac{1}{abc}$ e quindi

$$\text{Vol}(E) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Soluzione 6.32 Sfruttando la simmetria sia rispetto al piano x, y che rispetto al piano y, z il volume del solido risulta essere quattro volte il volume del solido determinato dalle ulteriori condizioni $x > 0$ e $z > 0$.
A questo punto usiamo le coordinate cilindriche con asse lungo l'asse z e centrate nell'origine: il cilindro è determinato dall'equazione

$$\rho^2 \cos^2 \vartheta + (\rho \text{sen}\vartheta - a)^2 = a^2$$

che equivalentemente può essere scritto come

$$\rho(\rho - 2a\text{sen}\vartheta) = 0$$

che ha soluzioni $\rho = 0$ e $\rho = 2a\text{sen}\vartheta$. Quindi le limitazioni per le variabili sono

$$0 \leq \vartheta \leq \pi/2\,, \qquad 0 \leq \rho \leq 2a\text{sen}\vartheta.$$

Infine da $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ si ricava $z^2 = 4a^2 - \rho^2$ da cui le limitazioni sulla z diventano

$$0 \leq z \leq \sqrt{4a^2 - \rho^2}.$$

Quindi il volume è dato da

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2a\text{sen}\vartheta} d\rho \int_0^{\sqrt{4a^2-\rho^2}} \rho dz$$

che fornisce, usando il fatto che per $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ $\sqrt{1 - \text{sen}^2\vartheta} = \cos\vartheta$, il seguente risultato

$$V = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3.$$

Soluzione 6.33 L'insieme delimitato dagli estremi -1 e 1 per la variabile x e $|x|$ e $\sqrt{2 - x^2}$ per la variabile y è quello in Figura 6.11. Quindi l'integrale diventa

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x, y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)dx.$$

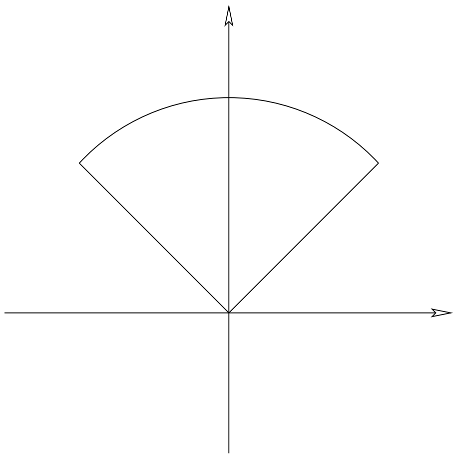

Figura 6.11:

Soluzione 6.34 Uso le coordinate cilindriche

$$\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{z/\sqrt{\alpha}} \rho d\rho = \frac{h^3\pi}{3\alpha}.$$

Provare in alternativa ad usare la formula per i solidi di rotazione.

Soluzione 6.35 Per il calcolo dell'integrale dato conviene passare alle coordinate cilindriche e sfruttare il fatto che l'insieme dato è stratificato in direzione z per ottenere

$$\begin{aligned}\int_E \frac{z}{x^2+y^2+z^2} dxdydz =& \int_0^h dt \int_{B_{\frac{Rt}{h}}(0,0)} \frac{t}{x^2+y^2+t^2} dxdy \\ =& \int_0^h dt \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\frac{Rt}{h}} \frac{t}{\varrho^2+t^2} \varrho d\varrho \\ =& \pi \int_0^h t \ln\left(\frac{R^2}{h^2}+1\right) dt = \frac{\pi h^2}{2} \ln \frac{R^2+h^2}{h^2}.\end{aligned}$$

Soluzione 6.36 Utilizziamo le coordinate cilindriche

$$x = \rho\cos\vartheta, \qquad y = t, \qquad z = \rho \mathrm{sen}\vartheta,$$

con $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$ e $\rho \le t \le \sqrt{2-\rho^2}$. L'integrale diventa

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 d\rho \int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \left(\rho \frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho^2}\right) dt = (2\sqrt{2}-2)\frac{\pi}{3}.$$

In questo caso potrebbe sembrare più naturale utilizzare le coordinate sferiche: convincersi che non è così.

Soluzione 6.37 L'insieme E è quello a sinistra in Figura 6.12. Sicuramente l'integrale esiste perché la funzione integranda è limitata e quindi $|\int_E f dxdy| \leq |E|$.
Un modo di risolvere questo integrale è effettuare il cambio di variabile

$$\phi(s,t) = \Big(\frac{s}{1+t}, \frac{st}{1+t}\Big), \qquad 0 \leq s \leq 2, 1 \leq t \leq 2.$$

che porta il rettangolo $\widetilde{E}$ in E. Il cambio ϕ si ottiene ponendo $y/x = t$ e $x + y = s$. Lo

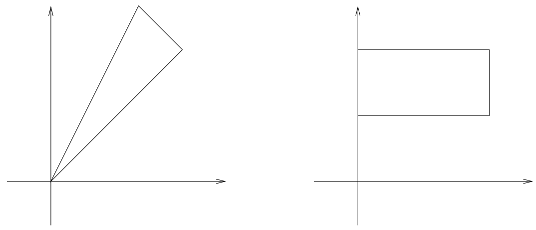

Figura 6.12: a sinistra l'insieme E, a destra $\widetilde{E}$

Jacobiano è dato da $\frac{s}{(1+t)^2}$, per cui si perviene all'integrale

$$\int_0^2 ds \int_1^2 \frac{s}{(1+t)^2} \text{sen}\left(\frac{\pi}{1+t}\right) dt$$

che risolto è

$$\int_0^2 \frac{s}{\pi} \cos \frac{\pi}{1+t}\Big|_{t=1}^{t=2} ds = \int_0^2 \frac{s}{\pi}\Big(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\Big) ds = \frac{1}{\pi}.$$

Provare anche con il cambio di variabile

$$\psi(s,t) = (s - ts, ts), \qquad 0 \leq s \leq 2, \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{2}{3}.$$

che mappa $\widetilde{\widetilde{E}}$ in E come indicato in Figura 6.13.

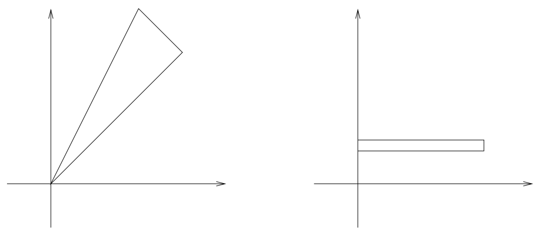

Figura 6.13: a sinistra l'insieme E, a destra $\widetilde{\widetilde{E}}$

Soluzione 6.38 Per calcolare l'integrale dato, proviamo ad effettuare un cambio di variabili in modo che la funzione integranda si semplifichi ed in modo tale che la matrice del cambiamento di coordinate non dia problemi nell'integrazione e, ancora, che nel nuovo sistema di riferimento l'insieme su cui si vuole integrare non si complichi. Per non avere problemi con la matrice del cambiamento di coordinate si può fare in modo che tale matrice abbia determinante pari a 1; particolari trasformazioni con tale determinante sono le rotazioni, trasformazioni che hanno il vantaggio nel nostro caso di trasformare la palla B centrata nell'origine e di raggio 1 in se stessa. Cerchiamo quindi una rotazione dello spazio che ad esempio mandi il piano $x+y+z=0$ nel piano determinato nelle nuove coordinate (u,v,w) ad esempio da $u=0$. Una tale rotazione è data da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

In tal modo l'integrale diventa

$$\int_B \operatorname{sen}(x+y+z)dxdydz = \int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3})dudvdw.$$

A questo punto notiamo che la funzione integranda è dispari nella variabile u e il dominio B è simmetrico rispetto a tale variabile, e quindi si ottiene che

$$\int_B \operatorname{sen}(u\sqrt{3})dudvdw = 0.$$

Soluzione 6.39 Notiamo che l'insieme di integrazione è invariante per rotazioni intorno all'asse z; seguendo la discussione del punto precedente, cerchiamo una rotazione dello spazio in modo che il piano $x+y=0$ si trasformi, nelle nuove coordinate (u,v,w), nel piano $u=0$ e consideriamo una rotazione che lasci inalterato l'insieme di integrazione, cioè una rotazione effettuata attorno all'asse z. Una tale rotazione è data ad esempio da

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

L'integrale diventa quindi

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz \quad = \quad \int_E e^u dudvdw = \int_{I_u} e^u A_u du,$$

dove A_u è l'area dell'ellisse

$$E_u = \left\{ (v,w) \in \mathbb{R}^2 : \frac{v^2}{a^2-u^2} + \frac{a^2}{b^2}\frac{z^2}{a^2-u^2} = 1 \right\}$$

e $I_u = [-a,a]$. In definitiva troviamo che

$$\int_E e^{\frac{x+y}{\sqrt{2}}} dxdydz \quad = \quad \int_{-a}^{a} e^u \pi \frac{b}{a}\left(a^2-u^2\right) du = 2\pi\frac{b}{a}((a-1)e^a + (a+1)e^{-a})$$

Soluzione 6.40 L'insieme E è normale rispetto al piano xy, quindi

$$\mathrm{Vol}(E) = \int_D \sqrt{xy}dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le (1-\sqrt{x})^2\}$. Quindi

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(E) =& \int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} \sqrt{xy}dy = \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})^{3/2}dx \\ =&\frac{4}{3}\int_0^1 s^2(1-s)^3 ds = \frac{1}{45}.\end{aligned}$$

Il baricentro è invece dato dal punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ con

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)}\int_E (x, , y, z)dxdydz,$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}\overline{x} =& 45\frac{2}{3}\int_0^1 x\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^{3/2}dx \\ =&30\int_0^1 s^4(1-s)^3 ds = \frac{3}{28},\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\overline{y} =& 45\int_D \sqrt{xy^3}dxdy = 45\frac{2}{5}\int_0^1 \sqrt{x}(1-\sqrt{x})^{5/2}dx \\ =&36\int_0^1 s^2(1-s)^5 ds = \frac{3}{14}\end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned}\overline{z} =& \frac{45}{2}\int_D xydxdy = \frac{45}{4}\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^4 dx \\ =&\frac{45}{2}\int_0^1 s^3(1-s)^4 ds = \frac{9}{112}.\end{aligned}$$

Quindi il baricentro ha coordinate $(3/28, 3/14, 9/112)$.

Soluzione 6.41 Dire che la lamina è omogenea significa dire che la sua densità di massa è costante, che supporremo essere uguale ad 1. La distanza di un punto (x, y, z) dall'asse x è dato $\sqrt{y^2+z^2}$. E è un insieme bidimensionale con $z = 0$, quindi il suo momento d'inerzia è dato da

$$I_x = \int_E y^2 dxdy = \int_0^\pi \int_0^{\mathrm{sen}x} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \mathrm{sen}^3 x dx = \frac{4}{9}.$$

Soluzione 6.42 Iniziamo col calcolare la massa del cono, passando alle coordinate cilindriche;

$$\begin{aligned}M =& \int_E f(x, y, z)dxdydz = \int_E (x^2+y^2+2z)dxdydz \\ =& \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (\varrho^2+2z)\varrho d\varrho = \frac{4\pi}{15}.\end{aligned}$$

Per il calcolo del baricentro avremo quindi

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_E xf(x,y,z)dxdydz = \bar{y} = \frac{1}{M}\int_E yf(x,y,z)dxdydz = 0,$$

in quanto la funzione da integrare è dispari sia nella x che nella y e E è simmetrico rispetto ai piani $x = 0$ e $y = 0$. Infine

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_E zf(x,y,z)dxdydz = \frac{5}{16}.$$

Per il momento di inerzia, dato che la distanza al quadrato dall'asse z è data da $x^2 + y^2$, avremo che

$$I_z(E) = \int_E (x^2 + y^2)f(x,y,z)dxdydz = \frac{17\pi}{210}.$$