



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI FERRARA**
- EX LABORE FRUCTUS -

APPUNTI SULLA MECCANICA DEI SISTEMI CONTINUI

1 TEOREMA DEL TRASPORTO

Lo scopo è riuscire ad effettuare derivate sostanziali operando su volumi di sistema (mobili) e passando a volumi di controllo (fissi) che siano utilizzabili per passare da relazioni concettuali a relazioni operative. La dimostrazione semplificata è stata fatta a lezione, considerando un moto unidimensionale. La dimostrazione completa è disponibile sul testo Marchi-Rubatta, Meccanica dei fluidi, UTET, Torino (pp. 65-68).

Per una grandezza generica b il teorema del trasporto si scrive:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} b dV = \int_{V_c} \frac{\partial b}{\partial t} dV + \int_{A_i} b |\vec{v} \cdot \vec{n}| dA - \int_{A_e} b \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (T1)$$

L'unione della superficie di controllo caratterizzata da un flusso entrante e della superficie di controllo caratterizzata da un flusso uscente è la superficie di controllo totale, contorno del volume di controllo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} b dV = \int_{V_c} \frac{\partial b}{\partial t} dV - \int_A b \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (T2)$$

Sfruttando il teorema della divergenza posso scrivere:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} b dV = \int_{V_c} \frac{\partial b}{\partial t} dV + \int_{V_c} \text{div}(b \vec{v}) dV \quad (T3)$$

Infine:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} b dV = \int_{V_c} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + \text{div}(b \vec{v}) \right] dV \quad (T4)$$

2 TEOREMA DEL TRASPORTO APPLICATO A GRANDEZZE VETTORIALI

Se la grandezza \vec{b} è vettoriale opera per componenti. Per la componente k-ma ottengo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} b_k dV = \int_{V_c} \left[\frac{\partial b_k}{\partial t} + \text{div}(b_k \vec{v}) \right] dV \quad (T5)$$

3 EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Imponendo che la massa del sistema fluido si conservi, devo imporre che:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} \rho dV = 0 \quad (1)$$

Si applica il teorema del trasporto (nella forma integrale):

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} \rho dV = 0 \Rightarrow \int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_u} \rho |\vec{v} \cdot \vec{n}| dA - \int_{A_e} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2)$$

che porge:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \Phi_u - \Phi_e = 0 \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = \Phi_e - \Phi_u \quad (3)$$

Che si enuncia: la variazione della massa nel volume di controllo scelto è uguale al flusso di massa entrante – il flusso di massa uscente (**Equazione cardinale di continuità**).

Passando alla trattazione differenziale:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_s} \rho dV &= 0 \\ \frac{D}{Dt} \int_{V_s} \rho dV &= \int_{V_c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

La relazione deve essere vera comunque venga scelto il volume di controllo, pertanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0 \quad (5)$$

denominata **equazione indefinita di continuità**.

Tale equazione può essere ricavata in una forma alternativa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div} \vec{v} = 0 \quad (6)$$

cioè:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (7)$$

Si noti che se un fluido è incomprimibile l'equazione di stato è:

$$\rho = \text{costante} \quad (8)$$

Pertanto l'**equazione indefinita di continuità per fluidi incomprimibili** è:

$$\text{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (9)$$

4 TEOREMA DEL TRASPORTO APPLICATO A GRANDEZZE VETTORIALI INTENSIVE

Supponiamo che la grandezza $\vec{b} = \rho \vec{c}$ consti nel prodotto tra la densità ed una grandezza intensiva.

Applichiamo il teorema del trasporto considerando ρc_k come un tutt'uno, ottenendo:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} (\rho c_k) dV = \int_{V_c} \left\{ \frac{\partial(\rho c_k)}{\partial t} + \text{div}[(\rho c_k) \vec{v}] \right\} dV \quad (10)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} (\rho c_k) dV = \int_{V_c} \left\{ \rho \frac{\partial c_k}{\partial t} + c_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho c_k) \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho c_k) \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} (\rho c_k) dV = \int_{V_c} \left\{ \rho \frac{\partial c_k}{\partial t} + c_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho c_k) \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\rho c_k) \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} (\rho c_k) dV = \int_{V_c} \left\{ \rho \frac{\partial c_k}{\partial t} + c_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho c_k) \text{div} \vec{v} + c_k \vec{v} \cdot \text{grad} \rho + \rho \vec{v} \cdot \text{grad} c_k \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} (\rho c_k) dV = \int_{V_c} \left\{ \rho \frac{\partial c_k}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \text{grad} c_k + c_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + c_k \vec{v} \cdot \text{grad} \rho + c_k (\rho \text{div} \vec{v}) \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} (\rho c_k) dV = \int_{V_c} \left\{ \rho \left(\frac{\partial c_k}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} c_k \right) + c_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho + \rho \text{div} \vec{v} \right) \right\} dV$$

La seconda somma in parentesi tonda è nulla per l'equazione indefinita di continuità. La prima somma in parentesi è la derivata sostanziale di c_k :

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} (\rho c_k) dV = \int_{V_c} \rho \frac{Dc_k}{Dt} dV \quad (11)$$

Tornando infine alla notazione vettoriale:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_s} (\rho \vec{c}) dV = \int_{V_c} \rho \frac{D\vec{c}}{Dt} dV \quad (12)$$

5 PRIMA EQUAZIONE DEL MOTO

Considerando un volume di sistema, la risultante di tutte le forze deve essere uguale alla variazione totale di quantità di moto del sistema:

$$\int_{V_s} \rho \vec{f} dV + \int_{A_s} \vec{t} dA = \frac{D}{Dt} \int_{V_s} \rho \vec{v} dV \quad (13)$$

Applicando il teorema del trasporto si ottiene:

$$\int_{V_c} \rho \vec{f} dV + \int_{A_c} \vec{t} dA = \int_{V_c} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV + \int_{A_e} \rho \vec{v} |\vec{v} \cdot \vec{n}| dA - \int_{A_e} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \quad (14)$$

che rappresenta la **prima equazione cardinale del moto**, che può essere scritta, in simboli:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = \vec{I} + \vec{M}_u - \vec{M}_e \quad (15)$$

La risultante delle forze di massa + la risultante delle forze di superficie è uguale all'inerzia locale (variazione della quantità di moto all'interno del volume di controllo) + il flusso di quantità di moto uscente – il flusso di quantità di moto entrante. Si noti che queste quantità sono, dimensionalmente, forze [N].

Tenuto conto della (12) e della (13), nonché del fatto che $\vec{t} = n \cdot \mathbf{T}$ (essendo \mathbf{T} il tensore delle tensioni), si può scrivere:

$$\int_{V_c} \rho \vec{f} dV + \int_A \vec{n} \cdot \mathbf{T} dA = \int_{V_c} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV \quad (16)$$

e, tenuto conto del teorema della divergenza,

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \rho \vec{f} dV - \int_{V_c} \text{div} \mathbf{T} dV - \int_{V_c} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV &= 0 \\ \int_{V_c} \left(\rho \vec{f} - \text{div} \mathbf{T} - \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) dV &= 0 \end{aligned}$$

Essendo l'integrale di volume pari a 0 per ogni volume di controllo, deve essere 0 la funzione integranda, cioè:

$$\rho \vec{f} - \text{div} \mathbf{T} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (17)$$

che rappresenta la **prima equazione indefinita del moto**.

La componente k -ma di questa equazione è:

$$\rho f_k + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_k}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (k \text{ fissato, } i \text{ muto per sottintendere } \sum_i) \quad (18)$$

Ricordando che la divergenza di un tensore deve essere fatta per colonne.

6 SECONDA E EQUAZIONE DEL MOTO

Considerando un volume di sistema, il momento risultante di tutte le forze deve essere uguale alla variazione totale di momento di quantità di moto del sistema:

$$\int_{V_s} [\vec{r} \wedge (\rho \vec{f})] dV + \int_{A_s} (\vec{r} \wedge \vec{t}) dA = \frac{D}{Dt} \int_{V_s} [\vec{r} \wedge (\rho \vec{v})] dV \quad (19)$$

Applicando il teorema del trasporto si ottiene:

$$\int_{V_c} [\vec{r} \wedge (\rho \vec{f})] dV + \int_{A_c} (\vec{r} \wedge \vec{t}) dA = \int_{V_c} \left[\vec{r} \wedge \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} \right] dV + \int_{A_u} [\vec{r} \wedge (\rho \vec{v} | \vec{v} \cdot \vec{n} |)] dA - \int_{A_e} \{ \vec{r} \wedge [\rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n})] \} dA \quad (20)$$

che rappresenta la **seconda equazione cardinale del moto**, che può essere scritta, in simboli:

$$\vec{G}_m + \vec{\Pi}_m = \vec{I}_m + \vec{M}_{mu} - \vec{M}_{me} \quad (21)$$

Il momento risultante delle forze di massa + il momento risultante delle forze di superficie è uguale all'inerzia girotorica locale (variazione di momento di quantità di moto all'interno del volume di controllo) + il flusso di momento di quantità di moto uscente – il flusso di momento di quantità di moto entrante. Si noti che queste quantità sono, dimensionalmente, momenti di forze [N m].

A partire dalla seconda equazione cardinale del moto, tenendo conto che $\vec{t} = n \cdot \mathbf{T}$ e della prima equazione indefinita del moto, si può dimostrare (Marchi-Rubatta, pp. 76-77) che deve essere:

$$\mathbf{T}|_{ij} = \mathbf{T}|_{ji}, \forall (i, j) \quad (22)$$

che rappresenta la **seconda equazione indefinita del moto**.

Quindi, il tensore delle tensioni è simmetrico anche nei problemi di dinamica, e non solo nei problemi di idrostatica (nei quali è addirittura isotropo). Si vedrà nel seguito che tale tensore resta isotropo nella dinamica dei fluidi ideali mentre è solo simmetrico nella dinamica dei fluidi viscosi.