UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA
- EX LABORE FRUCTUS -

APPUNTI SULLA MECCANICA DEI SISTEMI CONTINUI

1 TEOREMA DEL TRASPORTO

Lo scopo è riuscire ad effettuare derivate sostanziali operando su volumi di sistema (mobili) e passando a volumi di controllo (fissi) che siano utilizzabili per passare da relazioni concettuali a relazioni operative. La dimostrazione semplificata è stata fatta a lezione il 15/3. La dimostrazione completa è disponibile sul testo Marchi-Rubatta, Meccanica dei fluidi, UTET, Torino (pp. 65-68).

Per una grandezza generica *b* il teorema del trasporto si scrive:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} b\, dV = \int_{V_C} \frac{\partial b}{\partial t}\, dV + \int_{A_u} b\left|\vec{v}\cdot\vec{n}\right| dA - \int_{A_e} b\, \vec{v}\cdot\vec{n}\, dA \qquad \text{(T1)}$$

L'unione della superficie di controllo caratterizzata da un flusso entrante e della superficie di controllo caratterizzata da un flusso uscente è la superficie di controllo totale, contorno del volume di controllo:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} b\, dV = \int_{V_C} \frac{\partial b}{\partial t}\, dV - \int_{A} b\, \vec{v}\cdot\vec{n}\, dA \qquad \text{(T2)}$$

Sfruttando il teorema della divergenza posso scrivere:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} b\, dV = \int_{V_C} \frac{\partial b}{\partial t}\, dV + \int_{V_C} div\left(b\,\vec{v}\right) dV \qquad \text{(T3)}$$

Infine:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} b\, dV = \int_{V_C} \left[\frac{\partial b}{\partial t} + div\left(b\,\vec{v}\right)\right] dV \qquad \text{(T4)}$$

2 TEOREMA DEL TRASPORTO APPLICATO A GRANDEZZE VETTORIALI

Se la grandezza $\vec{b}$ è vettoriale opera per componenti. Per la componente k-ma ottengo:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} b_k\, dV = \int_{V_C} \left[\frac{\partial b_k}{\partial t} + div\left(b_k\,\vec{v}\right)\right] dV \qquad \text{(T5)}$$

3 EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Imponendo che la massa del sistema fluido si conservi, devo imporre che:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} \rho \, dV = 0 \tag{1}$$

Si applica il teorema del trasporto (nella forma integrale):

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} \rho \, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{V_C} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_u} \rho \left| \vec{v} \cdot \vec{n} \right| dA - \int_{A_e} \rho \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = 0 \tag{2}$$

che porge:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \Phi_u - \Phi_e = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial m}{\partial t} = \Phi_e - \Phi_u \tag{3}$$

Che si enuncia: la variazione della massa nel volume di controllo scelto è uguale al flusso di massa entrante – il flusso di massa uscente (**Equazione cardinale di continuità**).

Passando alla trattazione differenziale:

$$\begin{aligned} &\frac{D}{Dt}\int_{V_S} \rho \, dV = 0 \\ &\frac{D}{Dt}\int_{V_S} \rho \, dV = \int_{V_C} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{v}\right) \right] dV = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

La relazione deve essere vera comunque venga scelto il volume di controllo, pertanto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \vec{v}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho v_k\right)}{\partial x_k} = 0 \tag{5}$$

denominata **equazione indefinita di continuità**.

Tale equazione può essere ricavata in una forma alternativa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot grad \, \rho + \rho \, div \, \vec{v} = 0 \tag{6}$$

cioè:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \, div \, \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \tag{7}$$

Si noti che se un fluido è incomprimibile l'equazione di stato è:

$$\rho = \text{costante} \tag{8}$$

Pertanto l'**equazione indefinita di continuità per fluidi incomprimibili** è:

$$div \, \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \tag{9}$$

4 TEOREMA DEL TRASPORTO APPLICATO A GRANDEZZE VETTORIALI INTENSIVE

Supponiamo che la grandezza $\vec{b} = \rho \vec{c}$ consti nel prodotto tra la densità ed una grandezza intensiva.

Applichiamo il teorema del trasporto considerando $\rho\, c_k$ come un tutt'uno, ottenendo:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} (\rho c_k)\, dV = \int_{V_C} \left\{ \frac{\partial(\rho c_k)}{\partial t} + div\left[(\rho c_k)\vec{v}\right] \right\} dV \tag{10}$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} (\rho c_k)\, dV = \int_{V_C} \left\{ \rho \frac{\partial c_k}{\partial t} + c_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho c_k)\, div\, \vec{v} + \vec{v}\cdot grad\,(\rho c_k) \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} (\rho c_k)\, dV = \int_{V_C} \left\{ \rho \frac{\partial c_k}{\partial t} + c_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho c_k)\, div\, \vec{v} + \vec{v}\cdot grad\,(\rho c_k) \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} (\rho c_k)\, dV = \int_{V_C} \left\{ \rho \frac{\partial c_k}{\partial t} + c_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho c_k)\, div\, \vec{v} + c_k \vec{v}\cdot grad\, \rho + \rho \vec{v}\cdot grad\, c_k \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} (\rho c_k)\, dV = \int_{V_C} \left\{ \rho \frac{\partial c_k}{\partial t} + \rho \vec{v}\cdot grad\, c_k + c_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + c_k \vec{v}\cdot grad\, \rho + c_k\,(\rho\, div\, \vec{v}) \right\} dV$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} (\rho c_k)\, dV = \int_{V_C} \left\{ \rho \left(\frac{\partial c_k}{\partial t} + \vec{v}\cdot grad\, c_k \right) + c_k \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot grad\, \rho + \rho\, div\, \vec{v} \right) \right\} dV$$

La seconda somma in parentesi tonda è nulla per l'equazione indefinita di continuità. La prima somma in parentesi è la derivata sostanziale di c_k:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} (\rho c_k)\, dV = \int_{V_C} \rho \frac{Dc_k}{Dt}\, dV \tag{11}$$

Tornando infine alla notazione vettoriale:

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_S} (\rho \vec{c})\, dV = \int_{V_C} \rho \frac{D\vec{c}}{Dt}\, dV \tag{12}$$

5 PRIMA EQUAZIONE DEL MOTO

Considerando un volume di sistema, la risultante di tutte le forze deve essere uguale alla variazione totale di quantità di moto del sistema:

$$\int_{V_S} \rho\, \vec{f}\, dV + \int_{A_S} \vec{t}\, dA = \frac{D}{Dt}\int_{V_S} \rho \vec{v}\, dV \tag{13}$$

Applicando il teorema del trasporto si ottiene:

$$\int_{V_C} \rho\, \vec{f}\, dV + \int_{A_C} \vec{t}\, dA = \int_{V_C} \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t}\, dV + \int_{A_u} \rho \vec{v}\, |\vec{v}\cdot\vec{n}|\, dA - \int_{A_e} \rho \vec{v}\, (\vec{v}\cdot\vec{n})\, dA \tag{14}$$

che rappresenta la **prima equazione cardinale del moto**, che può essere scritta, in simboli:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = \vec{I} + \vec{M}_u - \vec{M}_e \tag{15}$$

La risultante delle forze di massa + la risultante delle forze di superficie è uguale all'inerzia locale (variazione della quantità di moto all'interno del volume di controllo) + il flusso di quantità di moto uscente – il flusso di quantità di moto entrante. Si noti che queste quantità sono, dimensionalmente, forze [N].

Tenuto conto della (12) e della (13), nonché del fatto che $\vec{t} = n \cdot \mathbf{T}$ (essendo $\mathbf{T}$ il tensore delle tensioni), si può scrivere:

$$\int_{V_C} \rho \, \vec{f} \, dV + \int_A \vec{n} \cdot \mathbf{T} \, dA = \int_{V_C} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV \tag{16}$$

e, tenuto conto del teorema della divergenza,

$$\int_{V_C} \rho \, \vec{f} \, dV + \int_{V_C} div \, \mathbf{T} \, dV - \int_{V_C} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = 0$$

$$\int_{V_C} \left(\rho \, \vec{f} + div \, \mathbf{T} - \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) dV = 0$$

Essendo l'integrale di volume pari a 0 per ogni volume di controllo, deve essere 0 la funzione integranda, cioè:

$$\rho \, \vec{f} + div \, \mathbf{T} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \tag{17}$$

che rappresenta la **prima equazione indefinita del moto**.

La componente *k*-ma di questa equazione è:

$$\rho \, f_k + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_k}{\partial t} + \rho \, v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \qquad (k \text{ fissato, } i \text{ muto per sottintendere } \sum_i \;) \tag{18}$$

Ricordando che la divergenza di un tensore deve essere fatta per colonne.

6 SECONDA E EQUAZIONE DEL MOTO

Considerando un volume di sistema, il momento risultante di tutte le forze deve essere uguale alla variazione totale di momento di quantità di moto del sistema:

$$\int_{V_S} \left[\vec{r} \wedge \left(\rho \, \vec{f} \right) \right] dV + \int_{A_S} \left(\vec{r} \wedge \vec{t} \right) dA = \frac{D}{Dt} \int_{V_S} \left[\vec{r} \wedge \left(\rho \vec{v} \right) \right] dV \tag{19}$$

Applicando il teorema del trasporto si ottiene:

$$\int_{V_C} \left[\vec{r} \wedge \left(\rho \, \vec{f} \right) \right] dV + \int_{A_C} \left(\vec{r} \wedge \vec{t} \right) dA = \int_{V_C} \left[\vec{r} \wedge \frac{\partial \left(\rho \vec{v} \right)}{\partial t} \right] dV + \int_{A_u} \left[\vec{r} \wedge \left(\rho \vec{v} \left| \vec{v} \cdot \vec{n} \right| \right) \right] dA - \int_{A_e} \left\{ \vec{r} \wedge \left[\rho \vec{v} \left(\vec{v} \cdot \vec{n} \right) \right] \right\} dA$$

(20)

che rappresenta la **seconda equazione cardinale del moto**, che può essere scritta, in simboli:

$$\vec{G}_m + \vec{\Pi}_m = \vec{I}_m + \vec{M}_{mu} - \vec{M}_{me} \tag{21}$$

Il momento risultante delle forze di massa + il momento risultante delle forze di superficie è uguale all'inerzia girotorica locale (variazione di momento di quantità di moto all'interno del volume di controllo) + il flusso di momento di quantità di moto uscente – il flusso di momento di quantità di moto entrante. Si noti che queste quantità sono, dimensionalmente, momenti di forze [N m].

A partire dalla seconda equazione cardinale del moto, tenendo conto che $\vec{t} = n \cdot \mathbf{T}$ e della prima equazione indefinita del moto, si può dimostrare (Marchi-Rubatta, pp. 76-77) che deve essere:

$$\mathbf{T}\big|_{ij} = \mathbf{T}\big|_{ji} \text{ , } \forall (i, j) \tag{22}$$

che rappresenta la **seconda equazione indefinita del moto**.

Quindi, il tensore delle tensioni è simmetrico anche nei problemi di dinamica, e non solo nei problemi di idrostatica (nei quali è addirittura isotropo). Si vedrà nel seguito che tale tensore resta isotropo nella dinamica dei fluidi ideali mentre è solo simmetrico nella dinamica dei fluidi viscosi.