Prova Scritta

Esercizio n°1

Stimare, sulla base dell'idrogramma di portata di tabella 1 osservato alla sezione di chiusura di un bacini di 25 km^2 e del corrispondente ietogramma di precipitazione di tabella 2, il valore del parametro ϕ per il calcolo della pioggia netta. Rappresentare lo ietogramma di pioggia netta.
Per il calcolo del deflusso di base si utilizzi il metodo della linea retta.

t (ore)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q (m^3/s)	1.20	1.00	12.00	27.00	29.00	23.39	14.00	8.00	5.00	4.50	4.30

Tabella 1. Idrogramma di portata

t (ore)	1	2	3	4
P (mm)	8	12	7	3

Tabella 2. Ietogramma di precipitazione

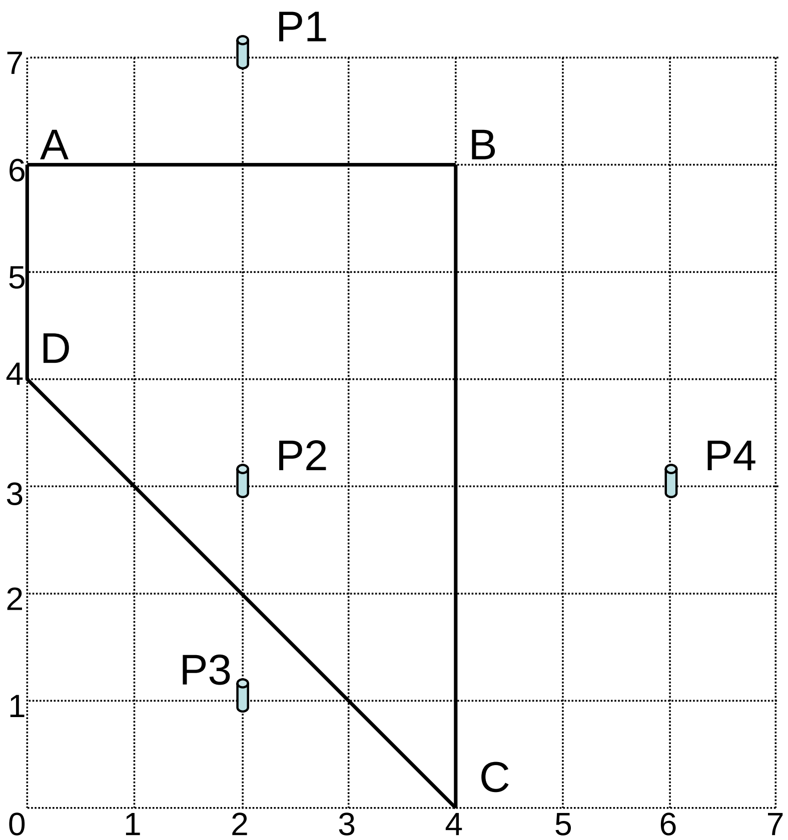
Esercizio n°2

Si consideri il bacino rappresentato in figura i cui vertici hanno coordinate:
A (0,6)
B (4,6)
C (4,0)
D (0,4)

I totali di pioggia registrati da 4 pluviometri situati all'interno o vicino al bacino sono:

Pluviometro	Coordinate	P (mm)
1	(2,7)	62
2	(2,3)	58
3	(2,1)	43
4	(6,3)	47

Disegnare i poligoni di Thiessen e calcolare la pioggia media areale sul bacino.



Esercizio n°3

Dimostrare che la stima, mediante il metodo di massima verosimiglianza, dei parametri di una distribuzione di probabilità normale è data da:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Esercizio n°1

Stimare, sulla base dell'idrogramma di portata di tabella 1 osservato alla sezione di chiusura di un bacini di 25 km^2 e del corrispondente ietogramma di precipitazione di tabella 2, il valore del parametro ϕ per il calcolo della pioggia netta. Rappresentare lo ietogramma di pioggia netta.
Per il calcolo del deflusso di base si utilizzi il metodo della linea retta.

t (ore)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q (m^3/s)	1.20	1.00	12.00	27.00	29.00	23.39	14.00	8.00	5.00	4.50	4.30

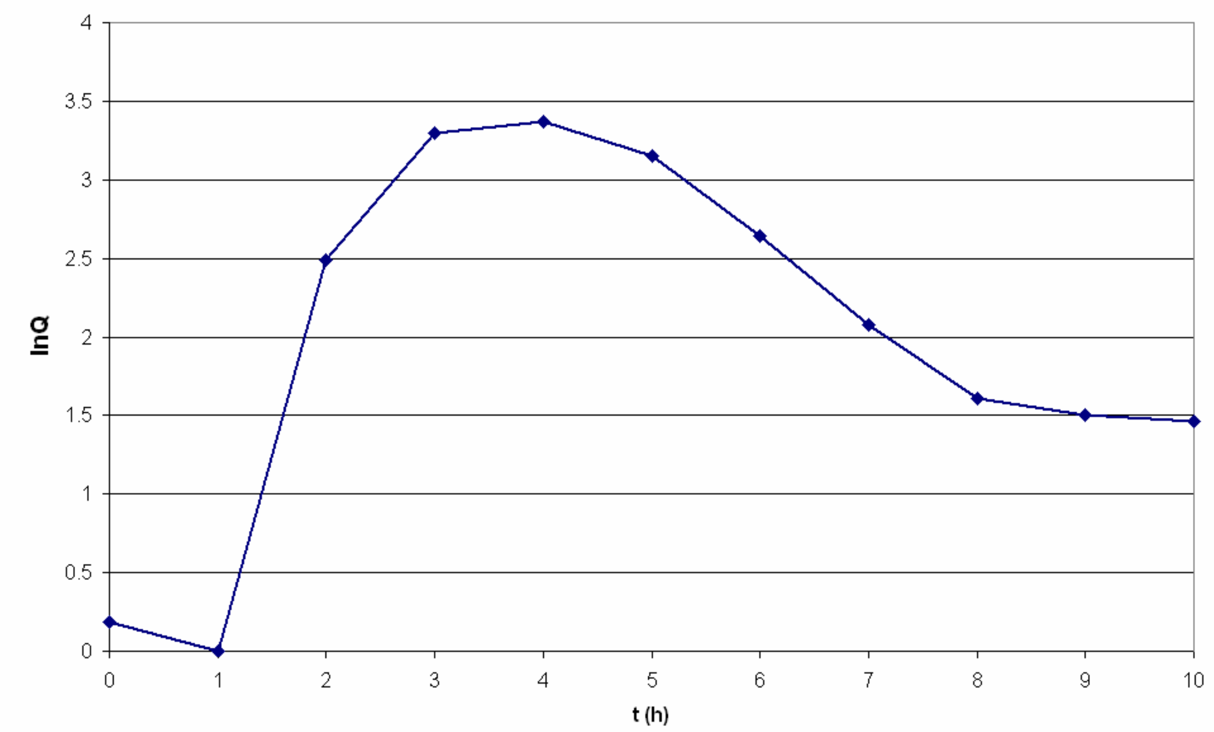
Tabella 1. Idrogramma di portata

t (ore)	1	2	3	4
P (mm)	8	12	7	3

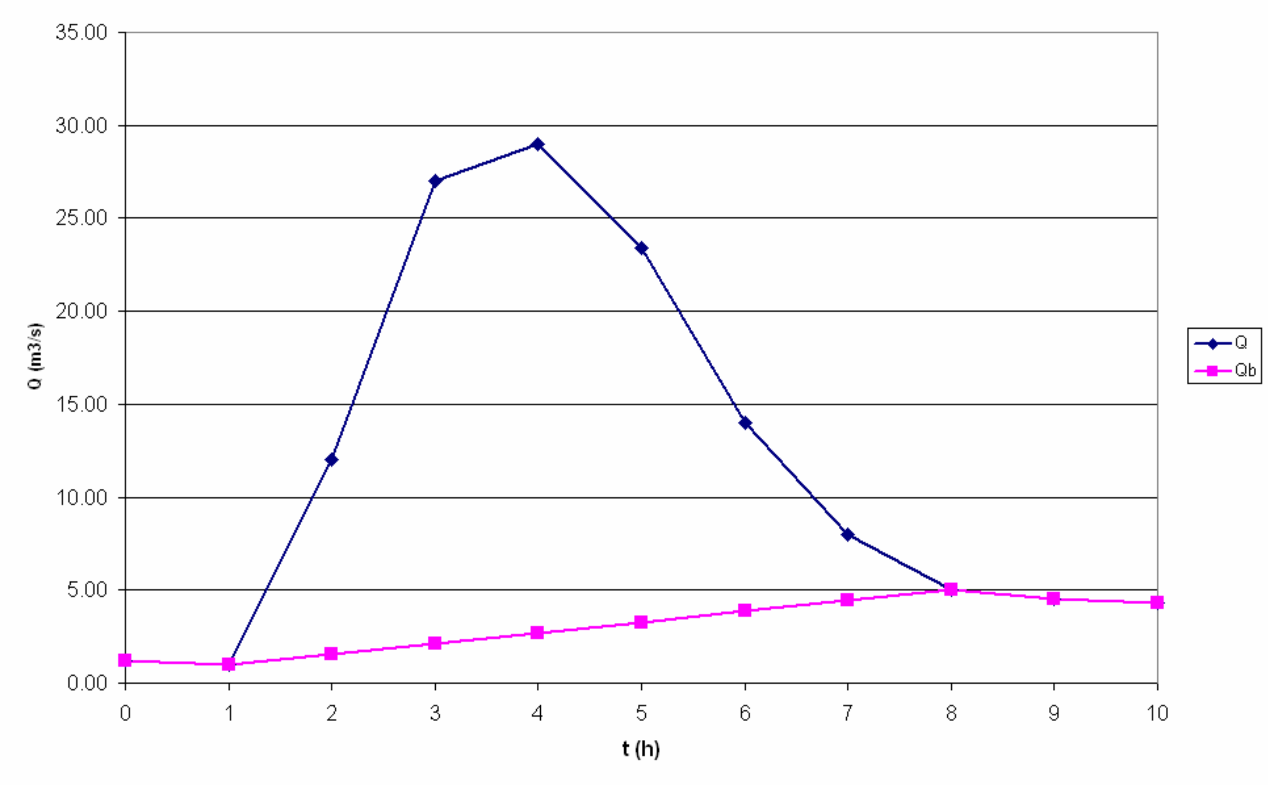
Tabella 2. Ietogramma di precipitazione

Soluzione

Identificazione del deflusso di base con il metodo della linea retta.
Graficando l'idrogramma di portata nel piano log(Q)-t si ottiene



Come si può osservare nella fase di recessione l'onda ha un cambiamento di pendenza in corrispondenza di t=8h. In tale istante si assume terminare il deflusso diretto.
Quindi tracciando la retta tra l'istante t=1h in cui inizia il deflusso diretto e l'istante t=8h in cui termina il deflusso diretto si ottiene:



Ovvero il deflusso di base ha il seguente andamento:

t (ore)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Qb (m^3/s)	1.20	1.00	1.57	2.14	2.71	3.29	3.86	4.43	5.00	4.50	4.30

Dove per t=0, 1, 8, 9 e 10 h coincide con i valori dell'idrogramma riportati in Tabella 1, mentre nella generica ora t compreso tra 1 e 8 ($1<t<8$) vale:

$$Q_t = Q_1 + \frac{(Q_8 - Q_1)}{(8-1)}(t-1)$$

Facendo la differenza tra i valori del deflusso totale di Tabella 1 e quelli del deflusso di base sopra calcolati si ottengono i seguenti valori di deflusso diretto:

t (ore)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Qdir (m^3/s)	0.00	0.00	10.43	24.86	26.29	20.10	10.14	3.57	0.00	0.00	0.00

Il volume totale defluito conseguente al deflusso diretto è quindi pari a:

$$V_d = \sum_{i=1}^{N} Q_{dir} \cdot \Delta t = 343404\ m^3$$

Corrispondente ad una altezza di deflusso diretto r_d pari a:

$$r_d = \frac{V_d}{S} = 13.74\ mm$$

Essendo S la superficie del bacino pari a 25 km^2.

Il coefficiente ϕ è quindi calcolabile come:

$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{M} P_i - r_d \right) \Big/ M \Delta t$$

Essendo M il numero di intervalli temporali di precipitazione che contribuiscono alla formazione di pioggia netta.
Ipotizzando in prima battuta M=4 (ovvero che tutti gli intervalli temporali di precipitazione contribuiscono alla formazione di pioggia netta) si avrebbe:

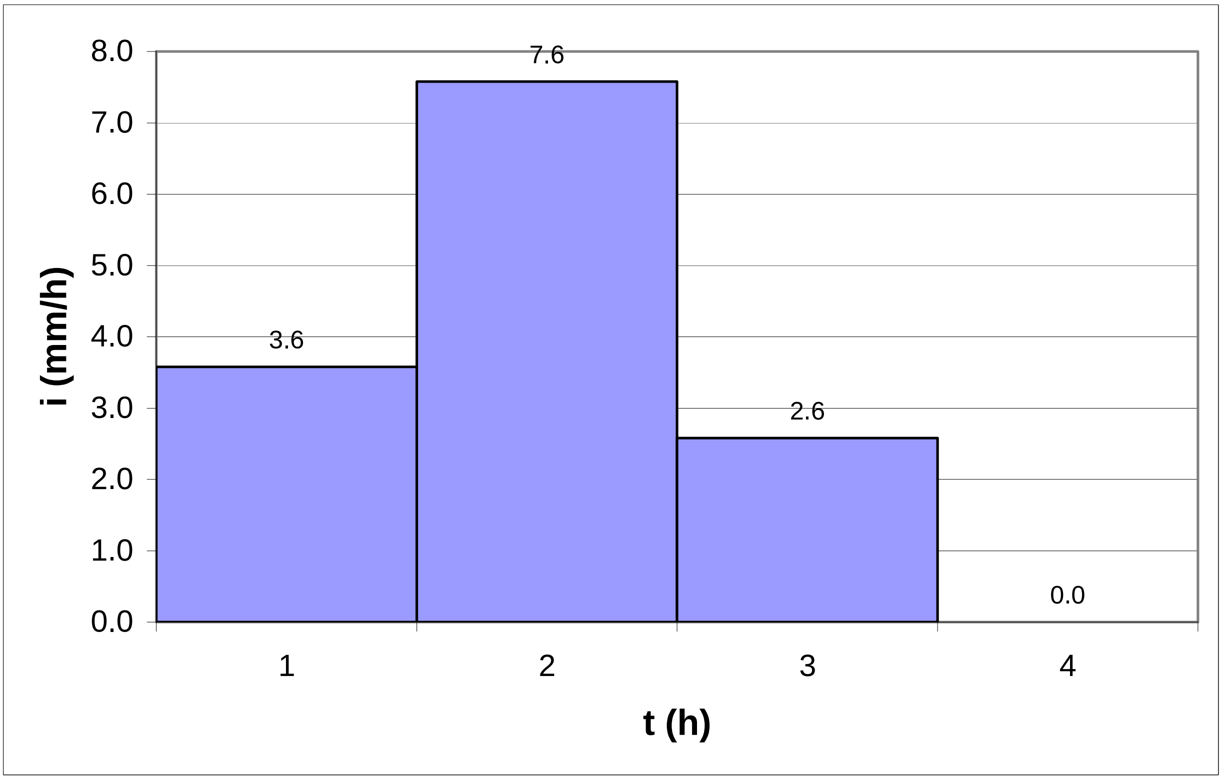
$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{4} P_i - 13.74 \right) \Big/ 4 = 4.07 mm/h$$

che è maggiore dell'intensità di precipitazione nel 4° intervallo (pari a 3 mm/h). Quindi il 4° intervallo non contribuirebbe alla formazione di pioggia netta.
Correggendo l'ipotesi di partenza ed assumendo che contribuiscono alla formazione di pioggia netta soli i primi 3 intervalli, ovvero M=3 si avrebbe:

$$\Phi = \left(\sum_{i=1}^{3} P_i - 13.74 \right) \Big/ 3 = 4.42 mm/h$$

che è minore dell'intensità di precipitazione in tutti e 3 gli intervalli tempo assunti contribuenti alla formazione di pioggia netta per cui l'ipotesi M=3 è verificata e si può assumere ϕ=5.42 mm/h.

Lo ietogramma di pioggia netta è quindi:



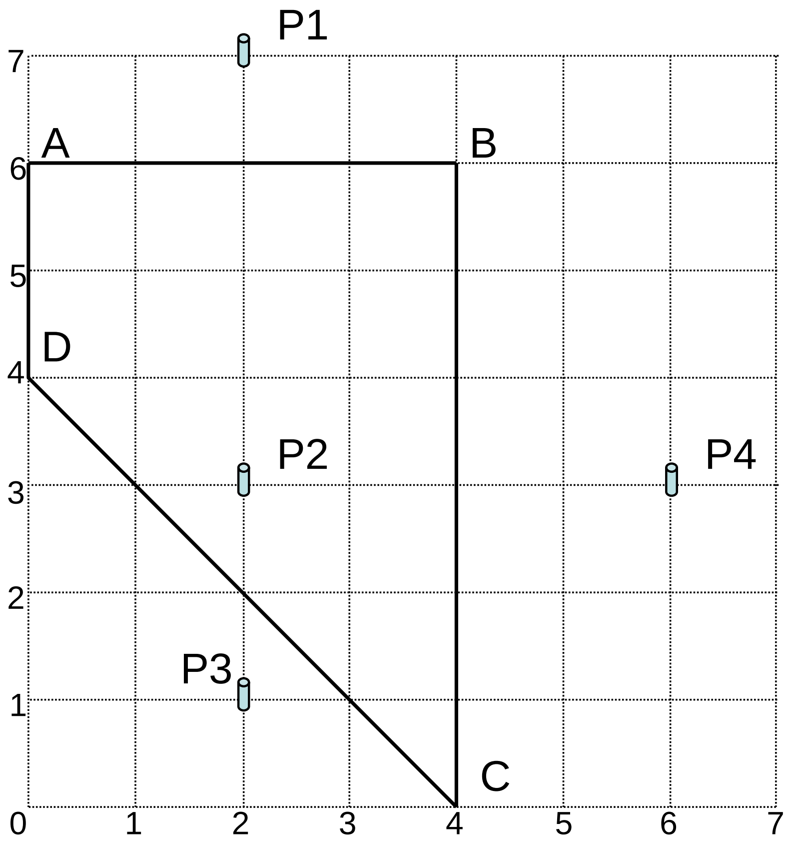
Esercizio n°2

Si consideri il bacino rappresentato in figura i cui vertici hanno coordinate:
A (0,6)
B (4,6)
C (4,0)
D (0,4)

I totali di pioggia registrati da 4 pluviometri situati all'interno o vicino al bacino sono:

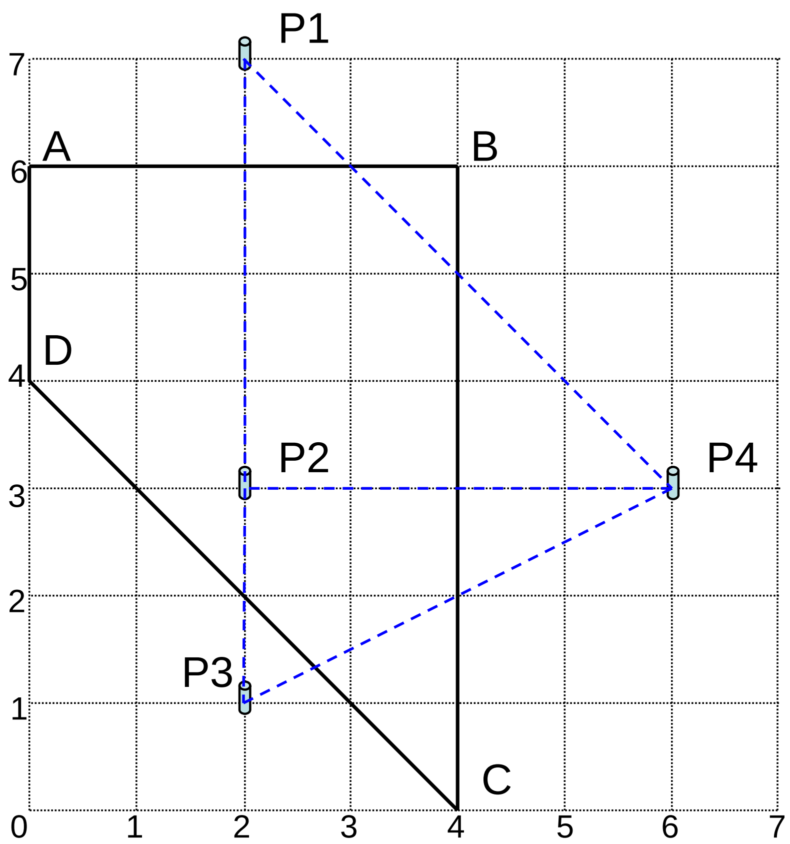
Pluviometro	Coordinate	P (mm)
1	(2,7)	62
2	(2,3)	58
3	(2,1)	43
4	(6,3)	47

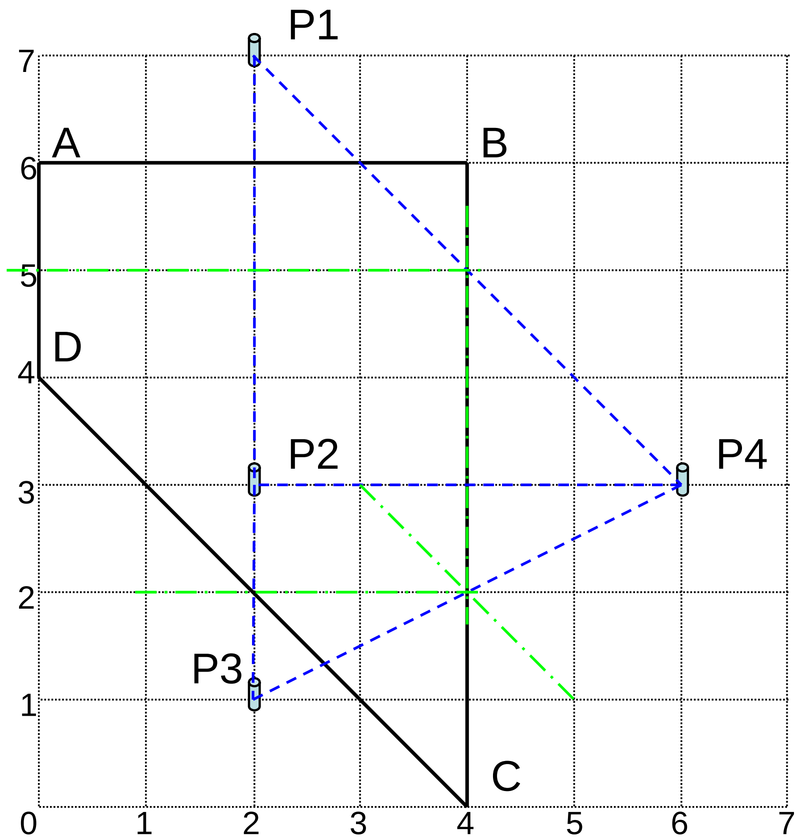
Disegnare i poligoni di Thiessen e calcolare la pioggia media areale sul bacino.

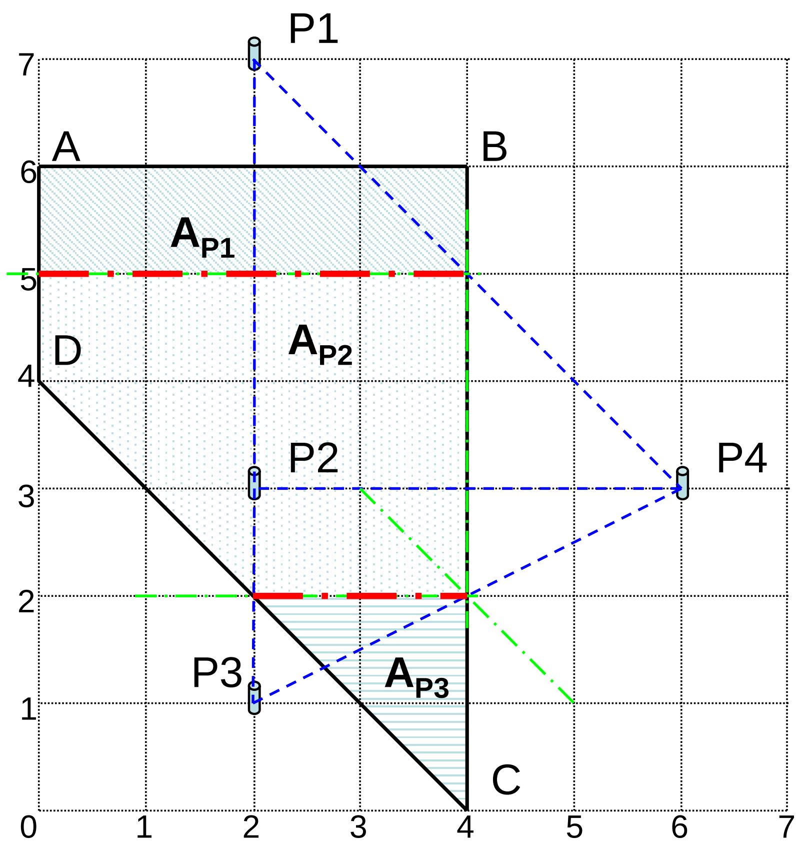


Soluzione

Costruzione dei Poligoni di Thiessen:




P1
A
B
D
P2
P4
P3
C
0
1
2
3
4
5
6
7


P1
A
B
A_{P1}
D
A_{P2}
P2
P4
P3
A_{P3}
C
0
1
2
3
4
5
6
7

Le aree di competenze di ciascun pluviometro ed i relativi pesi sono quindi:

Pluviometro	***P (mm)***	***Area***	***Peso***
P1	62	4	4/16=0.25
P2	58	10	10/16=0.625
P3	43	2	2/16=0.125
P4	47	0	0
Tot		*16*	*1*

La pioggia media areale è quindi pari a:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{4} P_i \cdot \frac{A_i}{A_{tot}} = \sum_{i=1}^{4} P_i \cdot Peso_i = 62 \cdot 0.25 + 58 \cdot 0.625 + 43 \cdot 0.125 = 57.125 mm$$

Esercizio n°3

Dimostrare che la stima, mediante il metodo di massima verosimiglianza, dei parametri di una distribuzione di probabilità normale è data da:

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Soluzione

La funzione di densità di probabilità per una distribuzione normale è:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Assumendo di disporre di un campione di *n* osservazioni indipendenti ed ugualmente distribuite, la funzione di log-verosimiglianza sarebbe:

$$\ln(L) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(f(xi)\right) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(x_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2} - n\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2 - n\ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - n\ln(\sigma)$$

Le stime a massima verosimiglianza di μ e σ si ottengono massimizzando la funzione di log-verosimiglianza, ovvero ponendo:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma} = 0$$

Ora

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} = \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2\left(x_i-\mu\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right) - n\mu\right)$$

e quindi ponendo

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} = 0$$

si ottiene

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right) - n\mu\right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\right) = n\mu$$

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)$$

Analogamente

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma} = -\frac{(-2)}{2\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^3}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\sigma^2\right)$$

e quindi ponendo

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma} = 0$$

si ottiene

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = n\sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$