1. Studia la convergenza delle serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(nx)}{3n^3+5n}+\frac{\cos(nx)}{n^4+7}\right]$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(nx)}{3n^3+5n}+\frac{\cos(nx)}{n^4+7}\right]$ Serie a termini di segno variabile.

Per la convergenza assoluta, si ha:

$$\left|\frac{\sin(nx)}{3n^3+5n}+\frac{\cos(nx)}{n^4+7}\right|\le\left|\frac{\sin(nx)}{3n^3+5n}\right|+\left|\frac{\cos(nx)}{n^4+7}\right|\le\left|\frac{1}{3n^3+5n}\right|+\left|\frac{1}{n^4+7}\right|=\frac{1}{3n^3+5n}+\frac{1}{n^4+7}\sim\frac{1}{3n^3}$$

La serie ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^3}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ che è convergente. Possiamo concludere che la serie è assolutamente convergente e quindi semplicemente convergente.

2. Calcola il seguente limite: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x(\sin x)^3}$

Si ha:

$x(\sin x)^3\sim x^4$ per $x\to 0$

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

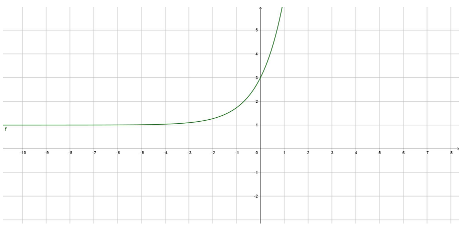
$$\to e^{x^2}+2\cos x-3\sim\frac{7}{12}x^4$$

Quindi: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x(\sin x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4}{x^4}=\frac{7}{12}$

3. Rappresenta il grafico della funzione $f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$ e determina l'equazione della retta tangente nel suo punto di flesso.

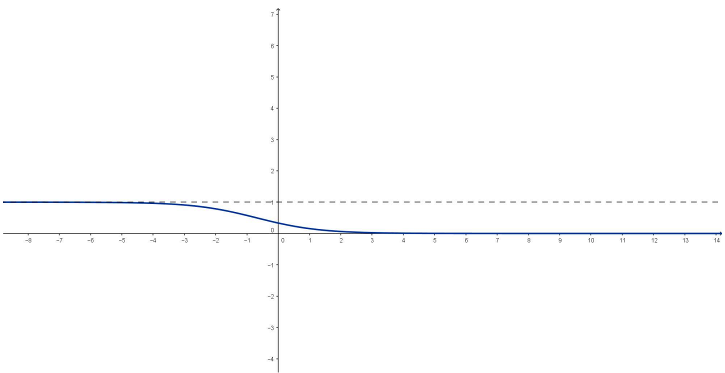
$f(x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}=\frac{1}{1+2e^x}$.

Grafico di $g(x)=1+2e^x$



dal quale si deduce immediatamente il grafico di

$f(x)=\frac{1}{1+2e^x}$



Dominio R

Asintoto orizzontale $y=1$ per $x \to -\infty$

Asintoto orizzontale $y=0$ per $x \to +\infty$

Sempre decrescente. Presenta un punto di flesso.

Calcoliamo le derivate: $f'(x)=\dfrac{-2e^x}{\left(1+2e^x\right)^2}$ sempre negativa, quindi la curva è sempre decrescente in R

$f''(x)=\dfrac{2e^x\left(2e^x-1\right)}{\left(1+2e^x\right)^3}$. $f''(x)>0$ per $x>\log\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $f''(x)<0$ per $x<\log\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

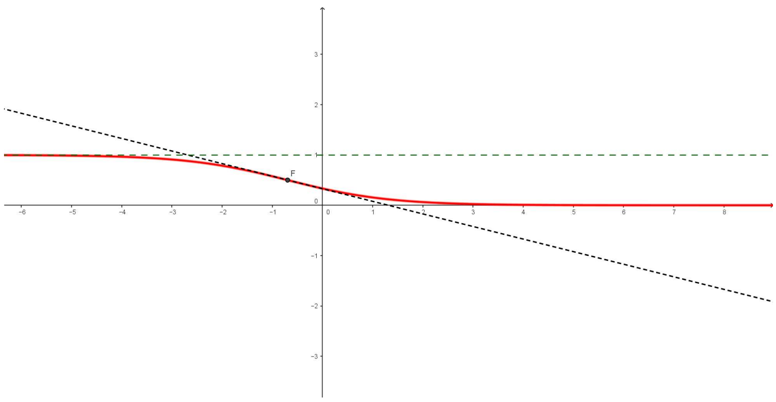
Punto di flesso $F\left(-\log 2;\dfrac{1}{2}\right)$.

Coefficiente angolare della retta tangente in

$F: f'\left(\log\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=-\dfrac{1}{4}$

Equazione retta tangente in F :

$y=-\dfrac{1}{4}\left(x+\log 2\right)+\dfrac{1}{2}$



4. Risolvi nel campo dei numeri complessi l'equazione $z^5+iz^2=0$, $z\in\mathbb{C}$ e rappresenta le soluzioni trovate.

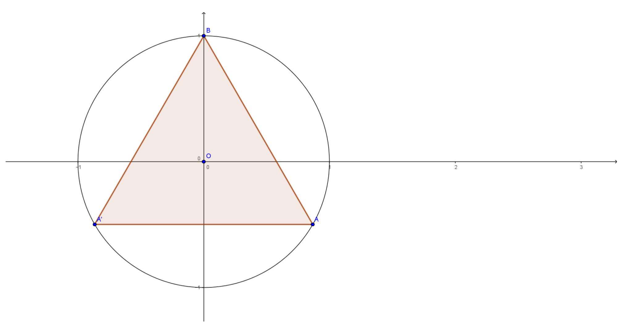
$z^5+iz^2=0 \to z^2\left(z^3+i\right)=0$

$z^2=0 \to z=0$

$z^3+i=0 \to z^3=-i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

radici: $z_k=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}\right)$,

con $k=0,1,2$.



$z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$, $z_1=i$, $z_0=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}$ Le soluzioni coincidono con i vertici del triangolo equilatero di figura, mentre la soluzione $z=0$ coincide con l'origine O.

5. Calcola il seguente integrale: $\int_0^{\infty} x^3 e^{1-x^2}\,dx$.

$\int x^3 e^{1-x^2}\,dx = e\int x^3 e^{-x^2} = -\frac{e}{2}\int -2xe^{-x^2}x^2\,dx$, integrando per parti: $f(x)=x^2$ e $g'(x)=-2xe^{-x^2}$, si ottiene:

$\int x^3 e^{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}\left(x^2+1\right)+c$ con $c\in\mathbb{R}$.

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{1-x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^{M} x^3 e^{1-x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{1-x^2}\left(x^2+1\right)\right]_0^M = \frac{e}{2}$$

6. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione che presenta le seguenti caratteristiche: la sua derivata seconda è: $f''(x)=\sin(3x)+1$, la tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{3}$ è parallelo alla retta $(\pi+1)x-3y=0$ e il grafico di f passa per l'origine. Determina l'espressione analitica di f. (15 luglio 2016 _fila 1)

$$f''(x)=\sin(3x)+1 \to f'(x)=\int\left(\sin(3x)+1\right)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)+x+c$$

Il coefficiente angolare della retta tangente è $m=\frac{\pi+1}{3}\to f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi+1}{3}$.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}\cos(\pi)+\frac{\pi}{3}+c=\frac{1+\pi}{3}+c=\frac{1+\pi}{3}\to c=0$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x)+x\to f(x)=\int\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)+x\right)dx=-\frac{1}{9}\sin(3x)+\frac{1}{2}x^2+c_1$$

e poiché la curva passa per l'origine, si deduce $f(x)=-\frac{1}{9}\sin(3x)+\frac{1}{2}x^2$.

7. Spiega perché la funzione $f(x)=x\cdot(\log x)^2$ è invertibile in $(1,+\infty)$. In questo intervallo di invertibilità indica con g la funzione inversa. Calcola $g'\left(4e^2\right)$.

Dominio della funzione $x>0$

$$f'(x)=\log^2 x + x\cdot 2\cdot\log x\cdot\frac{1}{x}=\log^2 x+2\log x=\log x\left(\log x+2\right)$$

Il segno della derivata prima è:

$f'(x)>0$ negli intervalli $\left(0,e^{-2}\right)$ e $(1,+\infty)$

$f'(x)<0$ nell'intervallo $\left(e^{-2},1\right)$

quindi per il teorema di Lagrange la funzione è sicuramente crescente in $(1,+\infty)$, e quindi invertibile.

$$g'\left(4e^2\right)=\frac{1}{f'\left(e^2\right)}=\frac{1}{8}$$

8. Considera la funzione $f(x) = \int_0^{2x} \cos(t^2)\,dt$ e calcola $f'(x)$. Utilizza questo risultato per calcolare il

$\lim_{x \to 0} \frac{2x - f(x)}{x^5}$.

La funzione $\cos(x^2)$ è continua. Per il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale è: $f'(x) = 2\cos(4x^2)$.

Il limite $\lim_{x \to 0} \frac{2x - f(x)}{x^5}$ si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$, applichiamo la regola dei De L'Hopital (le condizioni di applicabilità sono soddisfatte).

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - f(x)}{x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - f'(x)}{5x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos(4x^2)}{5x^4} = \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(4x^2)}{x^4} = \frac{16}{5}$$