1. Rappresenta la funzione $f(x)=\sqrt[3]{4-x^2}$ specificando la natura dei punti nei quali la curva $y=f(x)$ incontra l'asse delle ascisse (non è richiesto lo studio della derivata seconda). Spiega in modo esauriente perché NON si può applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)$ in $[0,4]$. Puoi dedurre che sicuramente non esiste alcun punto che soddisfa la tesi del teorema? Giustifica la tua risposta.

Dominio $\mathbb{R}$, interseca assi in $(-2,0);(0,\sqrt[3]{4});(2,0)$.

$f(x)<0$ per $x<-2 \vee x>2$; $f(x)>0$ per $-2<x<2$

Funzione pari: $f(-x)=-f(x)$, quindi il grafico è simmetrico rispetto l'asse delle ordinate

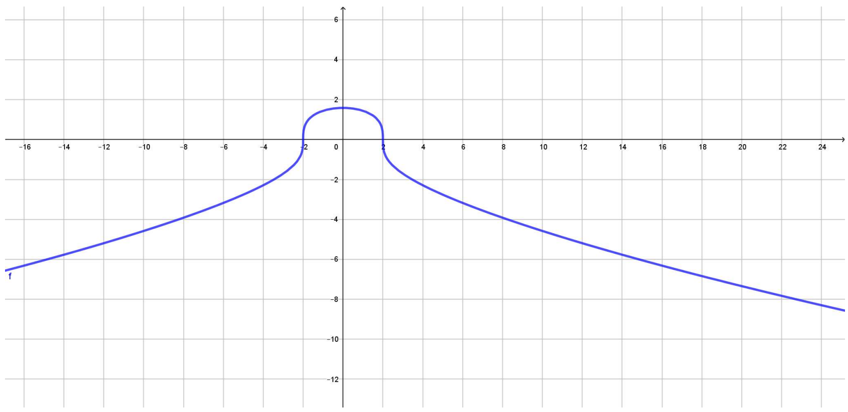
$f'(x)=-\dfrac{2x}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}$, la funzione non è derivabile in $x=\pm 2$,

$f'(x)>0$ per $x<0 \wedge x\neq -2$, funzione crescente; $f'(x)<0$ per $x>0 \wedge x\neq 2$, funzione decrescente.

$(-2,0)$ e $(+2,0)$ sono punti di flesso a tangente verticale in quanto punti di continuità e di non derivabilità e

$$\lim_{x\to 2}\left[-\frac{2x}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}\right]=-\infty \ , \ \lim_{x\to -2}\left[-\frac{2x}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}\right]=+\infty$$

Grafico:



Non è applicabile teorema di Lagrange perché la funzione non è derivabile in $2\in(0;4)$

Non possiamo dire che non esiste alcun punto che soddisfa la tesi, perché $a\Rightarrow b$ non è equivalente a $\overline{a}\Rightarrow\overline{b}$, quindi se le ipotesi (condizioni sufficienti ma non necessarie) non sono soddisfatte, la tesi potrebbe esserlo come no.

2. Determina i punti di massimo e di minimo relativi della funzione $f(x)=\int_0^{x^2+8x} arctg(2t)\,dt$ e l'equazione della retta tangente alla $y=f(x)$ nel suo punto di ascissa 0.

La funzione integranda è continua, quindi posso applicare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

$f'(x)=(2x+8)\,arctg(2x^2+16x)$

Dallo studio del segno:

$f'(x) > 0$ per $-8 < x < -4 \vee x > 0$

$f'(x) < 0$ per $x < -8 \vee -4 < x < 0$

$x_0 = -4$ è massimo relativo; $x_1 = -8$ e $x_2 = 0$ sono minimi relativi.

$f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$, l'equazione retta tangente in $(0,0)$ è $y = 0$, come si poteva osservare essendo $(0,0)$ un punto di minimo relativo interno al dominio (Teorema di Fermat).

3. Discuti al variare del parametro reale $\alpha > 0$ il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha \cdot n + 2}{3n+1} \right)^n$.

Serie con termini di segno non negativo.

Criterio della radice: $\sqrt[n]{\left(\frac{\alpha \cdot n + 2}{3n+1} \right)^n} = \left(\frac{\alpha \cdot n + 2}{3n+1} \right) \to \frac{\alpha}{3}$ per $n \to \infty$

Se $0 < \frac{\alpha}{3} < 1$ ovvero $0 < \alpha < 3$ la serie converge

Se $\frac{\alpha}{3} > 1$ ovvero $\alpha > 3$ la serie diverge

Se $\frac{\alpha}{3} = 1$ ovvero $\alpha = 3$, $a_n = \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^n \to \sqrt[3]{e}$ per $n \to \infty$, quindi la serie diverge (non è infatti soddisfatta la condizione necessaria di Cauchy per la convergenza).

4. Calcola il seguente limite $\lim_{x\to 0} \left(1 + \sin(5x)\right)^{\frac{\cos(5x)}{x}}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $1^{\pm\infty}$. Scriviamo il limite nel seguente modo:

$$\lim_{x\to 0} \left(1 + \sin(5x)\right)^{\frac{\cos(5x)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\log(1+\sin(5x))^{\frac{\cos(5x)}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos(5x)}{x}\log(1+\sin(5x))} = e^5$$

essendo $\frac{\cos(5x)}{x} \log\left(1 + \sin(5x)\right) \sim \frac{1}{x} \cdot 5x = 5$ per $x \to 0$.

5. Risolvi in $\mathbb{C}$ la seguente equazione $\frac{(z+2)^4}{8} + 1 + i\sqrt{3} = 0$ ed esprimi il risultato in forma algebrica. Rappresenta le soluzioni nel piano di Gauss.

Poniamo $\omega = z + 2$, l'equazione diventa: $\omega^4 = 8\left(-1 - i\sqrt{3}\right) = 16\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 16\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \sin\frac{4}{3}\pi \right)$

$$\omega_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \right) \right],\ k = 0,1,2,3$$

Esplicitiamo ω_k e quindi $z_k = \omega_k - 2$

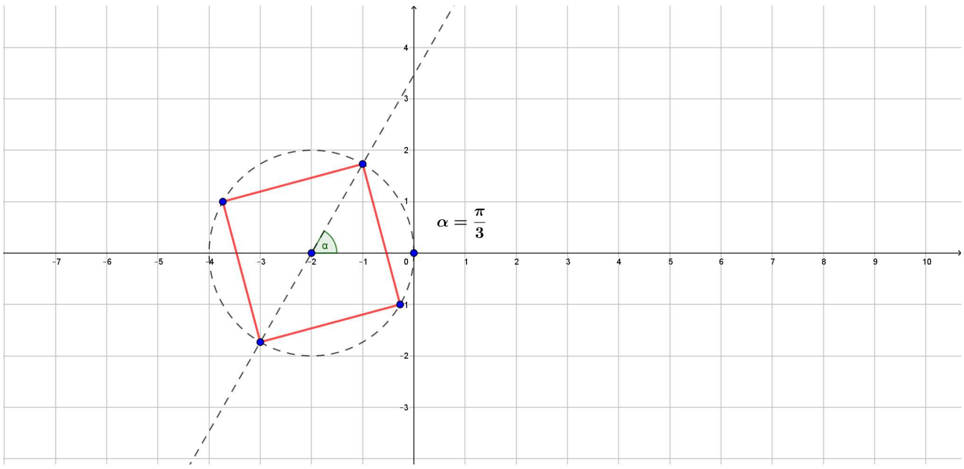
$$\omega_0 = 1 + i\sqrt{3} \rightarrow z_0 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\omega_1 = -\sqrt{3} + i \rightarrow z_0 = \left(-\sqrt{3} - 2\right) + i$$

$$\omega_2 = -1 - i\sqrt{3} \rightarrow z_2 = -3 - i\sqrt{3}$$

$$\omega_3 = \sqrt{3} - i \rightarrow z_3 = \left(\sqrt{3} - 2\right) - i$$

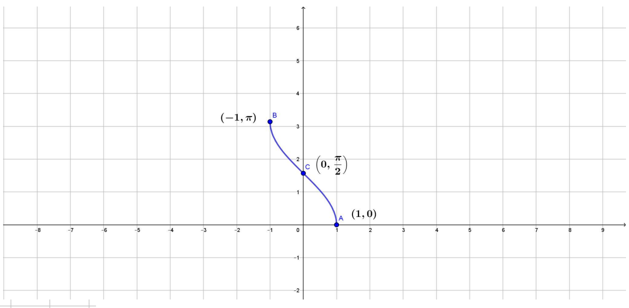
Rappresentiamo z_k



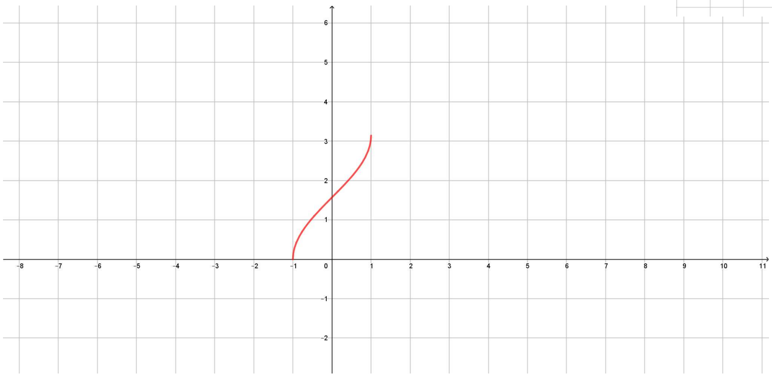
6. Rappresenta la curva di equazione $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{ar}\cos|x|$, specifica la natura del punto di ascissa 0 (continuità, derivabilità, punto di massimo relativo o assoluto, punto di minimo relativo o assoluto,....). Determina l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse.

Rappresentiamo nell'ordine

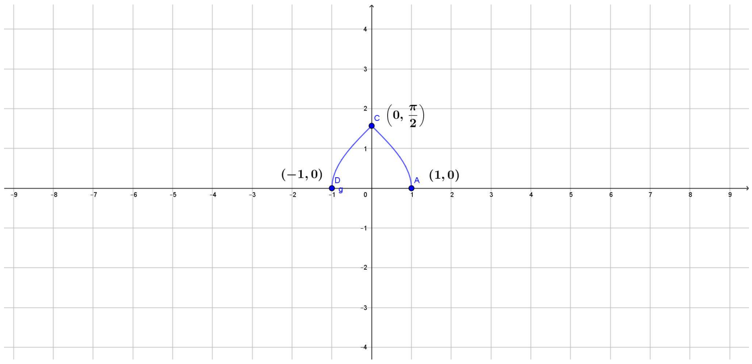
$y = ar\cos(x)$



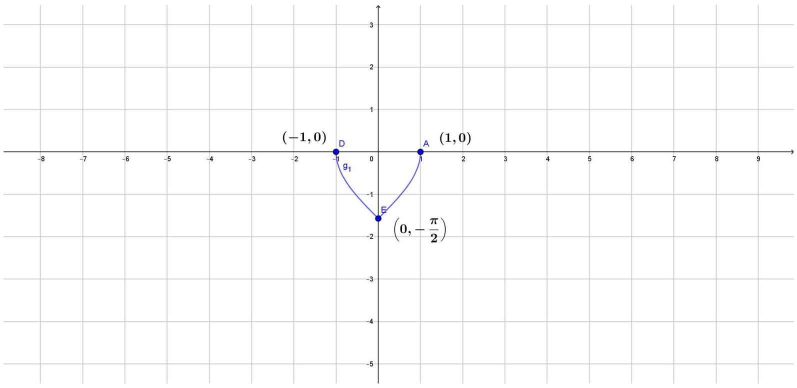
$y = ar\cos(-x)$, simmetrizzo rispetto all'asse delle ordinate.



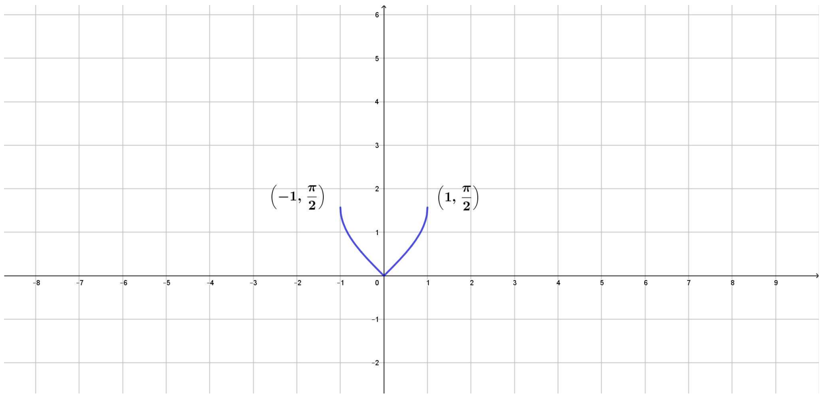
$y = ar\cos|x| = \begin{cases} ar\cos(x); x \geq 0 \\ ar\cos(-x); x < 0 \end{cases}$, funzione pari, grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



$y = -ar\cos|x|$, si ottiene simmetrizzando la precedente rispetto asse delle ascisse:

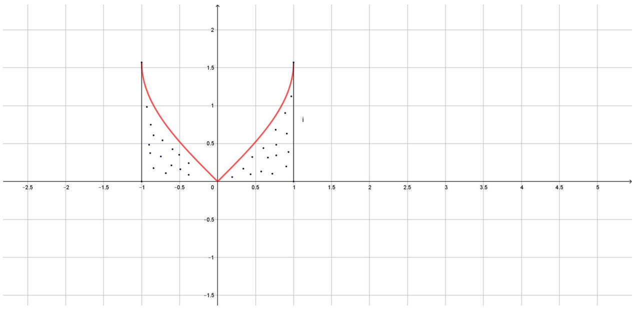


$y = \frac{\pi}{2} - ar\cos|x|$, si ottiene traslando del vettore $\vec{v}\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la curva precedente:



$$y' = \frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \to y' = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; x > 0 \to y'(0^+) = 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; x < 0 \to y'(0^-) = -1 \end{cases}$$, quindi $(0,0)$ punto angoloso.

$A=2\int_0^1\left[\frac{\pi}{2}-ar\cos(x)\right]dx=2\int_0^1\frac{\pi}{2}dx-2\int_0^1 \operatorname{arcos}dx$, essendo la funzione pari.



$2\int_0^1\frac{\pi}{2}dx=\pi$

Calcoliamo per parti $\int ar\cos(x)dx=x\cdot ar\cos x-\frac{1}{2}\int -2x\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=x\cdot ar\cos x-\sqrt{1-x^2}+c$

$\int_0^1 ar\cos x dx=\left[x\cdot ar\cos x-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1=1$, quindi: $2\int_0^1 ar\cos(x)dx=2$

$$A=\pi-2$$

7. Determina $\lambda\in\mathbb{C}$ tale che $z_0=i$ sia radice del polinomio

$$P(z)=z^4-2z^3+\lambda z^2-2z+2,\ z\in\mathbb{C}.$$

Per tale valore determina tutte le soluzioni dell'equazione $P(z)=0$.

$z_0=i$ radice se e solo se $P(i)=0$

$P(i)=i^4-2i^3+\lambda i^2-2i+2=3-\lambda\rightarrow 3-\lambda=0\rightarrow\lambda=3$

Per $\lambda=3$ è $P(z)=z^4-2z^3+3z^2-2z+2$,

Poiché $P(i)=0$ il polinomio è divisibile per $(z-i)$.

Osserviamo che anche $P(-i)=0$ in quanto tutti i coefficienti del polinomio sono reali, quindi il polinomio è divisibile anche per il binomio $(z+i)$.

Risolviamo $P(z)=0$

$P(z)=(z-i)(z+i)\cdot Q(z)=\left(z^2+1\right)\cdot Q(z)=\left(z^2+1\right)\left(z^2-2z+2\right)$, per la regola di divisione di polinomi.

Risolvendo $z^2-2z+2=0\rightarrow z=1\pm i$

L'equazione $P(z)=0$ ha quattro soluzioni: $z=\pm i$, $z=1\pm i$

8. Determina la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{x-2} \\ y(1) = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$y = 0$ non è soluzione, quindi $y \neq 0$

$$y' = \frac{y^2}{x-2} \rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \frac{1}{x-2}\,dx \rightarrow -\frac{1}{y} = \log|x-2| + c$$

$y = -\dfrac{1}{\log(2-x)+c}$, per il problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y(1) = -\dfrac{1}{c} \\ y(1) = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow c = 3$$

Soluzione del problema di Cauchy: $y = -\dfrac{1}{\log(2-x)+3}$

Intervallo massimale di soluzione

$-\dfrac{1}{\log(2-x)+3} < 0 \rightarrow \log(2-x)+3 > 0$ e quindi: $\left(-\infty; 2-e^{-3}\right)$