

nome e cognome:

matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e spiegando in modo chiaro e leggibile i passaggi che esegui. Ricorda di scrivere il tuo nome e il numero di matricola su ogni foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame i fogli che hai usato (compresi il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato). Durata della prova 3 ore.

1. a. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+a}{1-a} \right)^n$ converge? Per tali valori esprimi la somma

$$S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+a}{1-a} \right)^n \quad (\text{in funzione del parametro } a).$$

- b. Verifica che la successione $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{2n + \sin n}$ è convergente.

2. Calcola, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} [\sin x - \log(1+x)] \cdot x^{2+\alpha}$
3. Risolvi la seguente equazione nel campo dei numeri complessi. Scrivi la soluzione in forma algebrica e rappresenta le soluzioni: $z^6 = -iz^3$.

4. Determina il modulo e l'argomento del seguente numero complesso: $z = \frac{\sqrt[3]{-\sqrt{3}-i}}{i-1}$.

5. Rappresenta la curva di equazione $y = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 3}$ e scrivi l'equazione della retta tangente nel suo punto di flesso.

6. Stabilisci se la funzione $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$ è derivabile in $x_0 = 0$. In caso affermativo calcola la derivata in tal punto e studia l'esistenza della derivata seconda sempre in $x_0 = 0$.

7. Dopo avere rappresentato sommariamente la funzione $f(x) = \arctan \frac{1}{x-1}$ calcola il valore medio di

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x-1} \quad \text{negli intervalli } [0,2] \text{ e } [2,3]. \quad \text{Quindi rispondi alle seguenti domande}$$

- a. Esiste un punto $c_1 \in [0,2]$ tale che $f(c_1)$ risulti uguale al valore medio di $f(x)$ in tale intervallo?
- b. Esiste un punto $c_2 \in [2,3]$ tale che $f(c_2)$ risulti uguale al valore medio di $f(x)$ in tale intervallo?
- Giustifica le tue risposte.

8. Determina l'integrale generale della seguente equazioni differenziale $y' = \frac{1}{x}y + 2x^2$, specificando l'intervallo di definizione **oppure** Studia la convergenza puntuale di

$$f_n(x) = 2x - 3 \left(\frac{x}{2} - 2 \right)^n, \quad \text{specifica l'intervallo } \Phi \subseteq \mathbb{R} \text{ di convergenza e la funzione cui la successione di}$$

funzioni converge. Spiega perché in tale intervallo la convergenza non può essere uniforme.