nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e spiegando in modo chiaro e leggibile i passaggi che esegui. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su ogni foglio (compreso questo) e di consegnare al termine dell'esame tutti i fogli di bella compia (compresi il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato). Durata della prova: 3 ore.

Con $\log x$ *si intende* $\ln x$

1. Calcola la somma della seguente serie nel campo complesso: $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(1+i)^n$, esprimi il risultato in forma algebrica.

2. Un numero complesso è tale che il suo cubo è uguale al quadrato del suo coniugato. Determina il numero.

3. Calcola il seguente limite: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-\cos\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$.

4. Rappresenta il grafico della funzione $y=f(x)=\arccos(1+\log x)$, determina il dominio $D(f)$ e l'immagine $\operatorname{Im}(f)$. Spiega in modo esauriente se la funzione è derivabile agli estremi del dominio e se si può applicare il teorema di Lagrange alla $f(x)$, con $x\in D(f)$. Spiega perché la funzione è invertibile e ricava l'espressione analitica della sua funzione inversa $g(x)$. Determina il dominio e l'immagine di $g(x)$. Deduci il grafico della curva $y=g(x)$.

5. Discuti continuità e derivabilità della funzione $f(x)=\begin{cases}|x|^x ; x\neq 0\\ 1; x=0\end{cases}$ in $x_0=0$.

   Calcola $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Rappresenta la funzione, non è richiesto lo studio della derivata seconda. Specifica la natura del punto $x_0=0$.

6. Considera le funzioni $f(x)=\int_0^x \sin t\cdot\log(1+t)\,dt$ e $g(x)=\int_0^{2x} t\left(e^t-1\right)dt$. Dimostra che le curve $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sono tangenti all'asse delle ascisse in $x_0=0$ e calcola $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}$.

7. Stabilisci per quali valori del parametro reale positivo α l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^\alpha}dx$ converge.

8. Calcola $\int_0^{\pi} x|\cos x|dx$ e stabilisci se è possibile applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=x|\cos x|$ in $[0;\pi]$.