nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte spiegando in modo chiaro e leggibile i passaggi che esegui. Ricorda di scrivere il tuo nome e il tuo numero di matricola su ogni foglio (compreso questo) e di consegnare al termine dell'esame tutti i fogli di bella copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato. Durata della prova: 3 ore.

Con $\log x$ *si intende* $\ln x$

1. Studia, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-3n} \cdot n^{2n}}{(n!)^{\alpha}}$.

2. Risolvi nel campo dei numeri complessi, l'equazione $z^2 - i \cdot \bar{z} + |z|^2 = 4$, scrivi il risultato in forma algebrica e stabilisci se ci sono soluzioni tali che $|z|^2 \leq 3$. Rappresenta tutte le soluzioni nel piano di Gauss.

3. Sia $f(x) = 2e^x + \arctan(2x^3)$, con $x \in \mathbb{R}$. Spiega perché la funzione è invertibile in $\mathbb{R}$ e perché l'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione reale (per quale teorema?). Determina il Dominio e l'Immagine della funzione inversa $g = (f^{-1})$ e calcola $g'(2)$.

4. Rappresenta il grafico di $y = f(x) = \log(|x-2| - 2)$ e stabilisci, giustificando, se la funzione è iniettiva nel suo dominio. Indica con A il punto in cui il grafico della curva interseca il semiasse positivo delle ascisse, determina l'equazione della retta t tangente alla curva in A. Calcola l'area delle regione finita di piano racchiusa tra la tangente t, la curva $y = f(x)$ con $4.5 \leq x \leq 6$.

5. Determina il numero delle soluzioni dell'equazione $(x+1)(x+2)\log(x+2) - 4(x+1) = 0$, con $x \in [-1, +\infty)$. Stabilisci anche il segno delle eventuali soluzioni.

6. Scrivi lo sviluppo al terzo ordine (cioè fino alla derivata terza compresa) di MacLaurin della funzione $f(x) = Sinh(2x) - 2e^x$ e stabilisci la natura del punto $x_0 = 0$.

7. Stabilisci se la funzione $f(x) = \int_0^{(x+2)^3} \sqrt[3]{t^2} \cdot e^{-t} dt$ ha due punti di flesso uno dei quali a tangente orizzontale.

8. Risolvi l'equazione differenziale $y'(x) = y(x)(3 + y(x))$ e quindi risolvi il seguente Problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = y(x)(3 + y(x)) \\ y(0) = -6 \end{cases}$. Specifica l'intervallo massimale della soluzione.