nome e cognome:	matricola:

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte motivando ogni passaggio e spiegando in modo chiaro e leggibile i passaggi che esegui. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su ogni foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame tutti i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. Studia la convergenza delle serie:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \sin\frac{1}{n} \cdot \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) - 1\right]$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n^{\alpha} \cdot a^{n}\right]$$ al variare di $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Calcola il seguente limite:
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 2\cos x + 1}{x^2 \log\left(1 + 4x^2\right)} .$$

3. Rappresenta la funzione
$$f(x) = 2arctg\left(1 - |x|\right)$$
Individua esplicitamente il dominio e il codominio. Spiega perché la funzione non è derivabile in $x_0 = 0$ e stabilisci la natura del punto $x_0 = 0$ (cioè stabilisci se si tratta di un punto di flesso a tangente verticale, di un punto di cuspide oppure di un punto angoloso). Determina l'area della regione finita di piano situata nel primo e nel secondo quadrante, delimitata dalla curva $y = f(x)$ e dall'asse delle ascisse.

4. Per ogni $L > 0$ calcola il valore medio (ricorda il teorema della media) $\mu(L)$ della funzione $f(x) = e^{-x} \cdot \cos x$ sull'intervallo $[0; L]$. Determina poi il valore del $\lim_{L \to \infty} \mu(L)$.

5. Risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione
$$z^4 - 4iz^2 + 5 = 0 .$$

6. Determina i punti di massimo e di minimo relativi della funzione
$$f(x) = \int_0^{x^2+4x} arctg(t)\, dt .$$

7. Risolvi il seguente Problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 3x^2\left(y-1\right)^3 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
OPPURE

   Determina l'intervallo di convergenza uniforme della successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$.

8. Spiega perché $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$.