- Unicità della soluzione di una equazione.

Dimostrare che l'equazione $* x^3 + 3x - 2 = 0$ ha una sola soluzione reale.

Considero la funzione $f(x) = x^3 + 3x - 2$: è una funzione continua e derivabile in R (polinomiale)

A. Esistenza di almeno una soluzione.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 3x - 2\right) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 + 3x - 2\right) = -\infty$

allora $\exists a \in R \mid f(a) < 0$ e $\exists b \in R \mid f(b) > 0$, supponiamo per esempio che $a < b$. La funzione è continua ed essendo $f(a) \cdot f(b) < 0$ soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri in $[a, b]$, quindi esiste almeno $c \in (a, b) \mid f(c) = 0$. Pertanto l'equazione * ha almeno una soluzione reale.

B. Unicità

Calcolo la derivata della funzione: $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ per ogni x, quindi la funzione è strettamente crescente.

La curva $y = f(x)$ incontra l'asse della ascisse in un solo punto e pertanto l'equazione * ha UNA SOLA soluzione reale.

Dimostrare che l'equazione * $\ln x + 2x = 0$ ha una sola soluzione reale.

Sia $f(x) = \ln x + 2x$, funzione derivabile in R^+.

A. Esistenza della soluzione

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + 1 > 0$ e $f\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 0$

la funzione soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri in $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, quindi l'equazione * ha almeno una soluzione reale.

B. Unicità

$f'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0, x \in R^+$, la funzione è crescente e quindi l'equazione ha una sola soluzione.

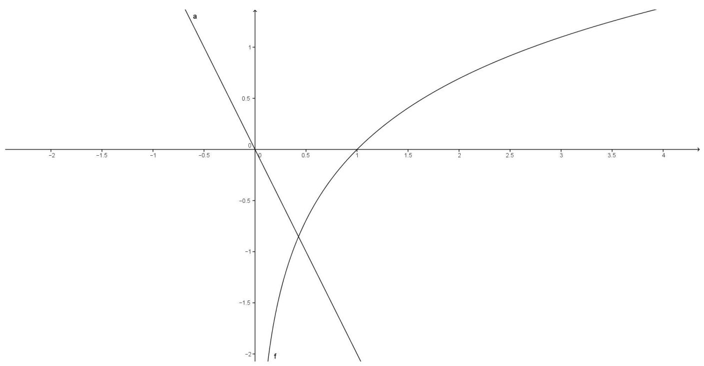
Metodo grafico.

$\ln x + 2x = 0 \to \ln x = -2x$

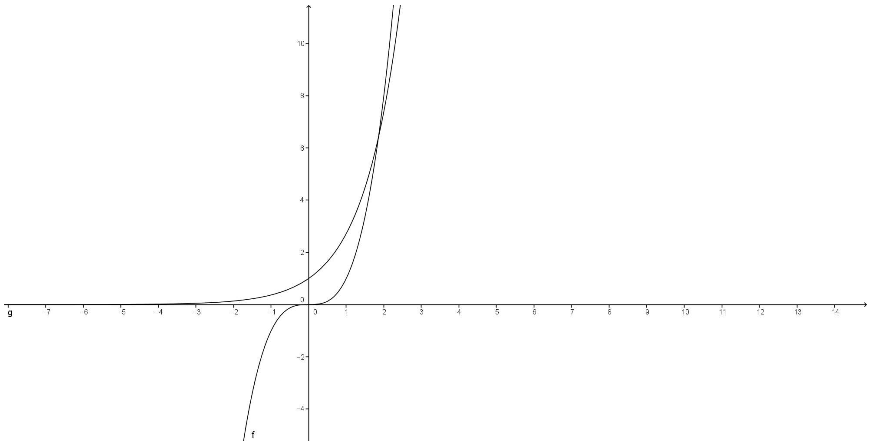
rappresento le curve $y = \ln x$ e $y = -2x$. Dal grafico si evince che la soluzione unica. Infatti si tratta di due funzioni una crescente e una decrescente con $\begin{matrix} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{matrix}$ e $\begin{matrix} \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty \end{matrix}$.

I grafici stabiliscono senza dubbio che la soluzione è unica.

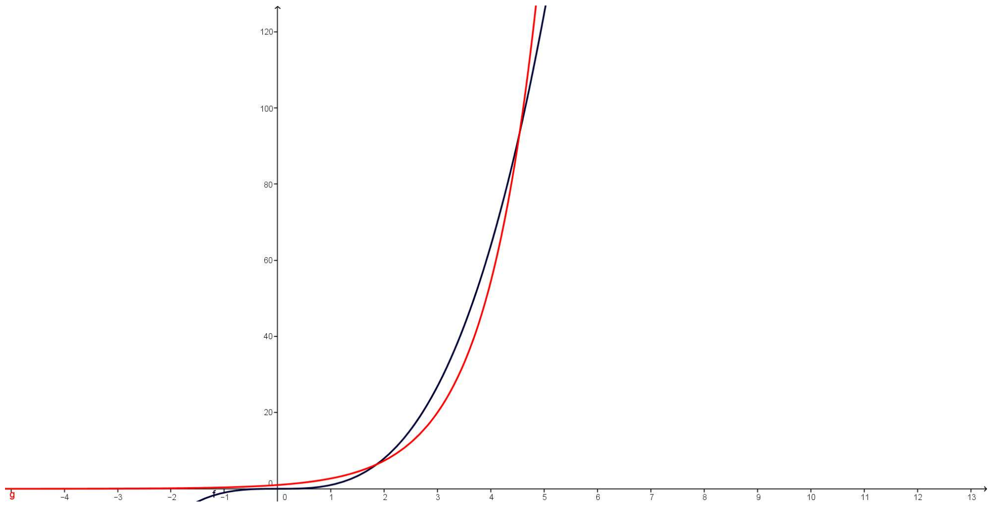
Attenzione nell'applicare questo metodo, non sempre il risultato è evidente. Potrebbero esserci "intersezioni non evidenti dal grafico"!



Per esempio considero $e^x - x^3 = 0 \rightarrow e^x = x^3$, le soluzioni sono date dall'intersezione delle curve $y = e^x$ e $y = x^3$.
Dal grafico di figura si potrebbe ipotizzare l'esistenza di una sola soluzione:



Ma se si amplia la zona del grafico, si evincono due intersezioni che corrispondono a due soluzioni dell'equazione.



Questo si poteva dedurre ricordando che l'esponenziale è un infinito di ordine superiore a x^3 per $x \rightarrow +\infty$

- Approssimazione della soluzione: metodo di bisezione (applicazione del teorema degli zeri).

Vogliamo trovare ora una soluzione approssimata dell'equazione

$\ln x + 2x = 0$, con un'approssimazione inferiore a $\varepsilon = 0.01$.

Considero la funzione $f(x) = \ln x + 2x$ continua in R^+ (la funzione è anche derivabile ma, dovendo applicare il teorema degli zeri, interessa solo la continuità).

Passo 1:
Individuo due punti (non troppo lontani) nei quali la funzione assume valori di segno opposto. Dal grafico vedo che la soluzione è sicuramente compresa nell'intervallo $(0,1)$, parto dall'intervallo: $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

$$a_0 = \frac{1}{4} \to f\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} < 0$$
$$b_0 = \frac{1}{2} \to f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} > 0$$

la funzione soddisfa il teorema degli zeri in $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

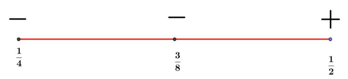
Considero ora il punto $m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{8}$, punto medio di $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Prendendo come valore approssimato della soluzione $m_0 = \frac{3}{8}$, commetto un errore

$$\varepsilon_0 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 > 0{,}01.$$

Considero come $m_0 = \frac{3}{8}$ e calcolo $f\left(\frac{3}{8}\right) = \ln\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} < 0$

Poiché $f\left(\frac{3}{8}\right) < 0$, considero l'intervallo $\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$ così agli estremi dell'intervallo la funzione assume segni opposti.



Passo 2:

$$a_1 = \frac{3}{8} \to f\left(\frac{3}{8}\right) < 0$$
$$b_1 = \frac{1}{2} \to f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

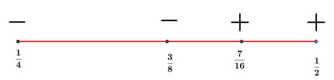
, la funzione soddisfa il teorema degli zeri in $\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$.

Considero ora il punto $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{16}$, punto medio di $\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$.

Prendendo come valore approssimato della soluzione $m_1 = \frac{7}{16}$, commetto un errore

$$\varepsilon_1 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 > 0{,}01.$$

Considero come $m_1 = \frac{7}{16}$ e calcolo $f\left(\frac{7}{16}\right) = \ln\frac{7}{16} + 2\cdot\frac{7}{16} > 0$



Poiché $f\left(\frac{7}{16}\right) > 0$, considero l'intervallo $\left[\frac{3}{8}, \frac{7}{16}\right]$ così agli estremi dell'intervallo la funzione assume segni opposti.

Passo 3......

Completiamo la seguente tabella:

n	$a_n\ ;\ f(a_n)<0$	$b_n\ ;\ f(b_n)>0$	$m_n=\frac{a_n+b_n}{2}$	$\varepsilon_n=\frac{b_n-a_n}{2}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}\ ;\ f\left(\frac{3}{8}\right)<0$	$0{,}125>0{,}01$
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}\ ,\ f\left(\frac{7}{16}\right)>0$	$0{,}0625>0{,}01$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{13}{32}\ ;\ f\left(\frac{13}{32}\right)<0$	$0{,}03125>0{,}01$
3	$\frac{13}{32}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{27}{64}\ ;\ f\left(\frac{27}{64}\right)<0$	$0{,}015625>0{,}01$
4	$\frac{27}{64}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{55}{128}$	$0{,}008<0{,}01$

Conclusione:

Se consideriamo come soluzione $\alpha=\frac{55}{128}$, commettiamo un errore minore di $\varepsilon=0.01$.

- Funzioni contenenti parametri

Vogliamo studiare il numero delle soluzioni reali dell'equazione $\log x=k\sqrt{x}$, al variare del parametro $k\in\mathbb{R}$.

Vediamo due procedimenti risolutivi.

Procedimento 1. Isoliamo il parametro $\frac{\log x}{\sqrt{x}}=k$, si tratta quindi di determinare le intersezioni della curva di equazione $y=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ con il fascio di rette $y=k$.

Grafico di $y=\frac{\log x}{\sqrt{x}}$

Dominio: $x>0$; $\lim_{x\to0^+}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=-\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}}=0$; $y'=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}>0$ per $0<x<e^2$, $y\left(e^2\right)=\frac{2}{e}$.

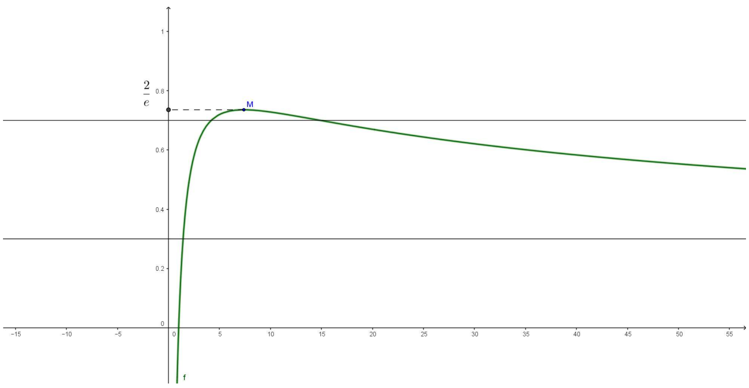
Dal grafico deduciamo che il numero delle soluzioni sono:

1 soluzione per $k\le0$

2 soluzioni per $0<k<\frac{2}{e}$

1 soluzione per $k=\frac{2}{e}$

Nessuna soluzione per $k>\frac{2}{e}$.



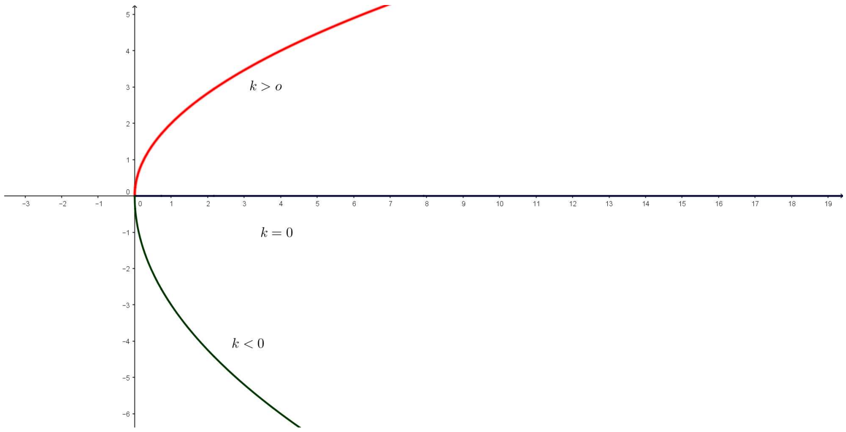
Procedimento 2

Determiniamo per quale valore di k la curva $y = k\sqrt{x}$ è tangente alla curva $y = \log x$.

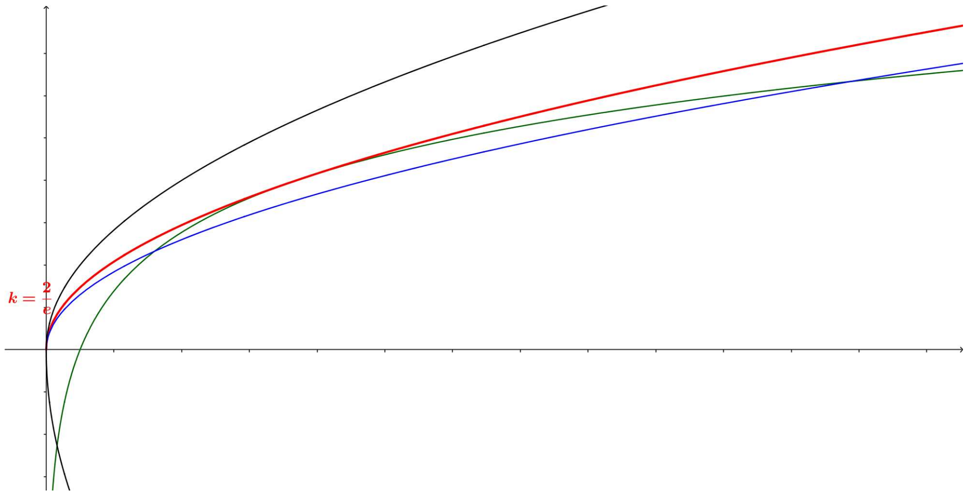
Le curve devono passare per lo stesso punto: $k\sqrt{x} = \log x$ e in tale punto devono avere la stessa tangente:

$\dfrac{k}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x}$, quindi: $\begin{cases} k\sqrt{x} = \log x \\ \dfrac{k}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ k = \dfrac{2}{e} \end{cases}$

Le curve $y = k\sqrt{x}$ hanno, al variare di $k \in \mathbb{R}$, i seguenti grafici



Intersechiamo con la curva $y = \log x$, si ha:



quindi:

1 soluzione per $k \leq 0$

2 soluzioni per $0 < k < \dfrac{2}{e}$

1 soluzione per $k = \dfrac{2}{e}$

Nessuna soluzione per $k > \dfrac{2}{e}$.