1. Determina l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo del seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$: $A=\left\{x\in\mathbb{R}:x=(-1)^n\cos\frac{1}{n},n=1,2,3,....\right\}$.

Osserviamo innanzitutto che $0<\frac{1}{n}\leq 1$ e che la funzione $\cos x$ è decrescente in $(0;1]\subset\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Distinguiamo i due casi:

n pari: $A_1=\left\{x\in\mathbb{R}:x=\cos\frac{1}{n},n=1,2,3,....\right\}$

$0<\frac{1}{n}\leq 1\to\cos 0>\cos\frac{1}{n}\geq\cos 1$ e quindi: $\cos 1\leq\cos\frac{1}{n}<1$

n dispari: $A_2=\left\{x\in\mathbb{R}:x=-\cos\frac{1}{n},n=1,2,3,....\right\}$

$0<\frac{1}{n}\leq 1\to\cos 1\leq\cos\frac{1}{n}<1\to -1<-\cos\frac{1}{n}\leq-\cos 1$

L'insieme $A=A_1\cup A_2$, quindi $-1<\cos\frac{1}{n}<1$. L'insieme ha $Sup(A)=1$, $Inf(A)=-1$ ma non ha né massimo né minimo.

2. Risolvi nel campo dei numeri complessi la seguente equazione $\frac{3z+i\sqrt{3}}{z+5}=z$, e scrivi il risultato in forma algebrica.

Poniamo $z\neq-5$, otteniamo l'equazione di secondo grado $z^2+2z-i\sqrt{3}=0$;

$\frac{\Delta}{4}=1+i\sqrt{3}$ e quindi le soluzioni sono $z=-1+\sqrt{1+i\sqrt{3}}$

(osserviamo che non dobbiamo scrivere $z=-1\mp\sqrt{1+i\sqrt{3}}$ in quanto nel campo complesso $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$ ha due soluzioni).

Poniamo $\omega=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, le radici quadrate sono:

$$\omega_k=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right]$$ con $k=0,1$.

$$\omega_0=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\to z_0=-1+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$

$$\omega_1=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right)=-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\to z_1=-1-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$

Le soluzioni quindi sono: $z=-1\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$.

3. Nel piano complesso calcola il perimetro e l'area del poligono avente per vertici le soluzioni dell'equazione $z^4 = 8\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

$$z^4 = 8\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 16\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

le soluzioni stanno sul quadrato inscritto nella circonferenza di raggio $\rho = \sqrt[4]{16} = 2$ con $\rho \in \mathbb{R}$.

Quindi il lato del quadrato è $l = 2\sqrt{2}$, pertanto il perimetro $2p = 8\sqrt{2}$ e l'area $A = 8$.

Osserva che non è stato chiesto di determinare le soluzioni e nemmeno di rappresentare il quadrato.

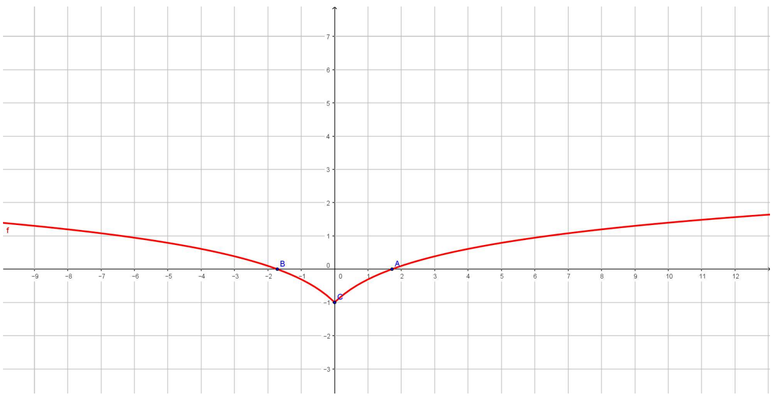
4. Nel piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy rappresenta, giustificando i passaggi, il grafico di $y = f(x) = \log\left(1 + |x|\right) - 1$ e stabilisci la natura del punto $x = 0$. Calcola l'area delle regione finita di piano situata nel terzo e quarto quadrante delimitata dalla curva e dall'asse delle ascisse.

Dominio di $f(x)$ è $1 + |x| > 0$, e quindi $\mathbb{R}$

La funzione è pari in quanto $f(-x) = \log\left(1 + |-x|\right) - 1 = \log\left(1 + |x|\right) - 1 = f(x)$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Studio per $x \geq 0$, $y = \log(1 + x) - 1$, funzione strettamente crescente, passa per $(0, -1)$ e interseca l'asse delle ascisse in $\log(1 + x) - 1 = 0 \rightarrow \log(1 + x) = 1 \rightarrow 1 + x = e \rightarrow x = e - 1$.

Simmetria rispetto all'asse delle ordinate, il grafico è quello a lato.



Stabiliamo ora la natura del punto $(0, -1)$, si può osservare che

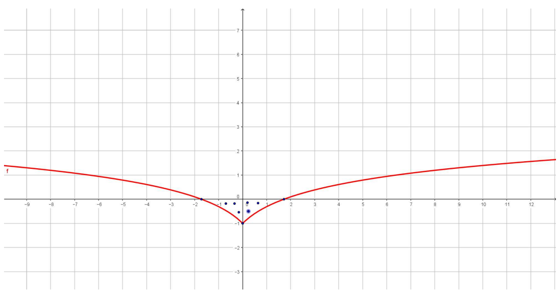
$$f(x) = \begin{cases} \log(1 + x) - 1; x \leq 0 \\ \log(1 - x) - 1; x > 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x}; x < 0 \\ -\dfrac{1}{1 - x}; x > 0 \end{cases}$$

ora $f'(0^+) = 1$ e $f'(0^-) = -1$ quindi si tratta di un punto angoloso.

Calcolo dell'area. Per la simmetria è:

$$A = 2\int_0^{e-1} \left(\log(1 + x) - 1\right) dx$$

$\int \log(1 + x)\, dx = (x + 1)\log(x + 1) - x + c$, integrando per parti.



$$\int\left[\log(1+x)-1\right]dx=(x+1)\log(x+1)-2x+c$$

$\int_0^{e-1}\left(\log(1+x)-1\right)dx=\left[(x+1)\log(x+1)-2x\right]_0^{e-1}=2-e$, quindi l'area richiesta è $2(2-e)$.

5. Studia il carattere della seguente serie numerica: $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)$.

Calcola $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in}}{2^n}$.

$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)$, osserviamo che $\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)<0$, scriviamo quindi:

$$\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)=\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{-1}=-\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right)=-\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$$

$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)=-\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$, con $a_n=\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)>0$

Assoluta convergenza: $\left|(-1)^n\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)\right|=\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)\sim\frac{3}{n-2}\sim\frac{3}{n}$. Poiché la serie $\sum\frac{3}{n}$ è divergente, si deduce che la serie non converge assolutamente.

Convergenza semplice, criterio di Leibnitz:

$a_n=\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)>0$ e $\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)=0$, resta da provare la decrescenza.

Considero la funzione $f(x)=\log\left(1+\frac{3}{x-2}\right)=\log\frac{x+1}{x-2}$

$f'(x)=-\frac{3}{(x+1)(x-2)}<0$ per $x>2$, resta così provata anche la decrescenza.

La serie pertanto converge semplicemente e non assolutamente.

Calcola $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^i}{2}\right)^n$, si tratta di una serie geometrica in campo complesso, la ragione è $q=\frac{e^i}{2}\in\mathbb{C}$, e

$|q|=\frac{1}{2}$, pertanto la serie converge. $S=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{e^i}{2}}=\frac{2}{2-e^i}$.

6. Calcola il seguente integrale definito $\int_0^{2\pi} e^{-x}\left|\sin x\right|dx$.

$$\int_0^{2\pi} e^{-2x}\left|\sin x\right|dx=\int_0^{\pi} e^{-2x}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi} e^{-2x}\sin xdx$$

calcoliamo la primitiva di $\int e^{-x}\sin xdx=-e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)-\int e^{-x}\sin xdx$, integrando due volte per parti.

$$2\int e^{-x}\sin xdx=-e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)\rightarrow\int e^{-x}\sin xdx=-\frac{e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)}{2}+c$$

$$\int_0^{\pi} e^{-2x}\sin xdx=\left[-\frac{e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{1+e^{-\pi}}{2}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{-2x}\sin xdx=\left[-\frac{e^{-x}\left(\cos x+\sin x\right)}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}=-\frac{e^{-\pi}+e^{-2\pi}}{2}$$. Quindi:

$$\int_0^{2\pi} e^{-2x}\left|\sin x\right|dx=\int_0^{\pi} e^{-2x}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi} e^{-2x}\sin xdx=\frac{1+e^{-\pi}}{2}+\frac{e^{-\pi}+e^{-2\pi}}{2}=\frac{1+2e^{-\pi}+e^{-2\pi}}{2}=\frac{\left(1+e^{-\pi}\right)^2}{2}$$

7. Determina la soluzione dell'equazione differenziale $y'=xy^2+x$ passante per l'origine. Precisa l'intorno dell'origine nel quale tale soluzione è definita.

$$y'=xy^2+x\rightarrow y'=x\left(y^2+1\right)\rightarrow\frac{y'}{y^2+1}=x\rightarrow\frac{1}{y^2+1}dy=xdx\rightarrow\int\frac{1}{y^2+1}dy=\int xdx$$

$arctgy=\frac{1}{2}x^2+c$, con $-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}x^2+c<\frac{\pi}{2}$ *(ricorda il grafico della funzione arctangente).

$y=\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)$, soluzione generale con la limitazione $-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}x^2+c<\frac{\pi}{2}$ *

La soluzione particolare deve passare per l'origine, quindi $y\left(0\right)=0$

$$\mathrm{tg}\left(c\right)=0\rightarrow c=0$$

la limitazione * diventerà: $-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}x^2<\frac{\pi}{2}$, $-\pi<x^2<\pi$. La prima disequazione è sempre soddisfatta, rimane quindi: $x^2<\pi\Leftrightarrow-\sqrt{\pi}<x<\sqrt{\pi}$, intervallo di definizione della soluzione.

8. Considera la funzione $f\left(x\right)=\frac{\sin x}{x}-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ e scrivi lo sviluppo di MacLaurin fino al primo termine non nullo. Utilizzando il risultato trovato, calcola il $\lim_{x\rightarrow0}\frac{f\left(x\right)}{x^4}$.

Per $x\rightarrow0$ $\quad\frac{\sin x}{x}-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\sim\frac{x}{x}-1=0$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \rightarrow \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)$$

ancora la parte principale si elide.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} o\left(x^5\right) \rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} o\left(x^4\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right) \rightarrow \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{216} + o\left(x^4\right)$$

$$f\left(x\right) = \frac{\sin x}{x} - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{216} + o\left(x^4\right) = \frac{x^4}{270} + o\left(x^4\right)$$

Si deduce che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\left(x\right)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{270}}{x^4} = \frac{1}{270}.$$