1. Determina l'area della regione finita di piano situata nel primo e nel quarto quadrante delimitata dalla curva $y = f(x)$ dove $f(x) = \begin{cases} 1+\log x; \frac{1}{e} \le x \le 1 \\ 1-\log x; 1 < x \le 2e \end{cases}$ e dall'asse delle ascisse.

2. Sia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che presenta le seguenti caratteristiche: la sua derivata seconda è: $f''(x) = \sin(3x)+1$, la tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{3}$ è parallelo alla retta $(\pi+1)x - 3y = 0$ e il grafico di f passa per l'origine. Determina l'espressione analitica di f.

3. Sia $F: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ la funzione $F(x) := -\int_0^x \log(\cos\theta) d\theta$, calcola le derivate fino alla prima che non si annulla in $x_0 = 0$ e successivamente calcola il $\lim_{x\to 0} \frac{xF'(x)}{F(x)}$.

4. Determina le primitive della funzione $f(x) := \frac{\log(\log(x))}{x}$ e successivamente calcola, se possibile, il valore medio delle $f(x)$ in $\left[e, e^2\right]$, spiegando se sono soddisfatte le ipotesi del teorema.

5. Calcola le primitive della funzione $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x-6}$.

6. Enuncia il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale, quindi scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della curva $y = f(x)$, $f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t}{t} dt$, nel suo punto di ascissa $x = \frac{\pi}{2}$.

7. Determina l'equazione della retta tangente alla $f(x) = \int_0^x (\cos t)^3 \, dt$ nel suo punto di ascissa 0.

8. Sia $f(x) = \sqrt{x} - 1$

stabilisci giustificando opportunamente se alla funzione $f(x)$ possiamo applicare il teorema della media integrale nell'intervallo $[0,2]$. Se si può, determina le coordinate del punto (o dei punti) che soddisfa il teorema

ii) stabilisci giustificando opportunamente se alla funzione $f(x)$ possiamo applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,2]$. Se si può, determina le coordinate del punto (o dei punti) che soddisfa il teorema.

9. Determina il coefficiente angolare della retta tangente alla $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_1^x e^{-t^2} dt$ nel suo punto di ascissa 1.

10. Calcola $\int_1^{e^3} \frac{\log x}{x(\log x + 1)} dx$ (Suggerimento: porre $\log x = t$).

11. Calcola $\int \arctan\sqrt{2x}\, dx$ (Suggerimento: porre $\sqrt{2x} = z$) e determina la primitiva che passa per il punto $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

12. Calcola i seguenti integrali:

$$\int tg^3 x dx$$

$$\int \sin(\log x) dx$$

$$\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x} dx$$ (Suggerimento: $\sqrt{3-x^2} = t$)

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$$

$$\int_0^2 e^{-x} |x-1| dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x| \sin x}{1+x^2} dx$$

13. Determina l'equazione di una funzione derivabile $f(x)$ tale che $f'(x) = |1-x^2|$

14. Dimostra che la funzione $f(x) = \int_0^{(x+2)^3} \sqrt[3]{t^2} \cdot e^{-t} dt$ ha un punto di flesso a tangente orizzontale.

15. Calcola il $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{3x} \sin\left(\frac{t}{3}\right)^3 dt}{x^3}$