Esercizi di Analisi Matematica I

Andrea Corli e Alessia Ascanelli

16 settembre 2015

Indice

Introduzione **v**

1 Nozioni preliminari **1**
1.1 Fattoriali e binomiali . . . 1
1.2 Progressioni . . . 1
1.3 Massimi, minimi, estremo superiore e inferiore . . . 2

2 Successioni **5**
2.1 Definizioni e proprietà . . . 5
2.2 Calcolo dei limiti . . . 8
2.3 Altri esercizi . . . 11

3 Serie **13**
3.1 Convergenza delle serie . . . 13
3.2 Altri esercizi . . . 17

4 Funzioni di una variabile **21**
4.1 Domini e proprietà . . . 21
4.2 Grafici elementari . . . 22
4.3 Funzioni invertibili . . . 25
4.4 Limiti . . . 28
4.5 Asintoti . . . 32
4.6 Altri esercizi . . . 33

5 Calcolo differenziale **35**
5.1 Derivate . . . 35
5.2 Rette tangenti . . . 36
5.3 Derivate formali . . . 37
5.4 Derivazione delle funzioni inverse . . . 38
5.5 Funzioni derivabili e non derivabili . . . 40
5.6 Calcolo di limiti con la regola di de l'Hospital . . . 42
5.7 Studi di funzione . . . 43
5.8 Altri esercizi . . . 49

6 Calcolo integrale **55**
6.1 Primitive . . . 55
6.2 Integrali definiti . . . 62
6.3 Calcolo di aree . . . 64
6.4 Integrali generalizzati . . . 66
6.5 Altri esercizi . . . 68

Alcuni libri di esercizi **71**

Introduzione

Gli esercizi risolti di seguito sono stati assegnati alle prove scritte del Corso di Analisi Matematica I, Corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, durante gli anni 2002–2008. Lo scopo di questa raccolta è dunque quello di permettere allo studente di verificare il livello della sua preparazione in vista dell'esame, non tanto quello di proporre un libro organico di esercizi; per questi, si veda la lista riportata in bibliografia.

Numerosi grafici completano le risoluzioni; la grandezza delle figure è stata ridotta al minimo per questione di spazio.

Ringraziamo Stefano D'Angelo per averci segnalato alcuni errori ed imprecisioni in una versione precedente.

Ferrara, 16 settembre 2015

Andrea Corli, Alessia Ascanelli

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Fattoriali e binomiali

1.1.1 Calcolare

(a) $\dfrac{7!}{4!}$

(b) $\dfrac{3! \cdot 4!}{5!}$

(c) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$

(d) $\dfrac{(n!)^2}{n \cdot n!}$.

Risposta.

(a) 210*;*

(b) $\dfrac{6}{5}$*;*

(c) $\dfrac{1}{n+1}$*;*

(d) $(n-1)!$.

1.1.2 Calcolare

(a) $\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 20 \\ 18 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Risposta.

(a) 165;

(b) 35;

(c) 190;

(d) 120.

1.2 Progressioni

1.2.1 Calcolare

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{-k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(\log 3)^k}$.

Risposta. Basta applicare la formula $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, *valida per* $q \neq 1$.

(a) $\dfrac{e^{n+1}-1}{e^n(e-1)}$

(b) $\dfrac{(\log 3)^{n+1}-1}{(\log 3)^n(\log 3 - 1)}$.

1.3 Massimi, minimi, estremo superiore e inferiore

1.3.1 Dire se i seguenti insiemi hanno massimo o minimo e, in caso affermativo, calcolarli:

(a) $A = (-3, 1] \cup (0, 2]$, $B = (-\infty, 1] \cap [1, +\infty)$

(b) $A = [0, 1) \cup [2, 3)$, $B = (-\infty, 3) \cap [2, 4)$

(c) $A = (-\infty, 3] \cap (-1, +\infty)$, $B = [1, 3] \cup (2, 4)$

(d) $A = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $B = [0, 4] \cap (0, 3)$.

Risposta. Si ha:

(a) $\max A = 2$, $\min A$ *non esiste;* $\max B = \min B = 1$;

(b) $\max A$ *non esiste,* $\min A = 0$; $\max B$ *non esiste,* $\min B = 2$;

(c) $\max A = 3$, $\min A$ *non esiste;* $\max B$ *non esiste,* $\min B = 1$;

(d) non esistono $\max A$, $\min A$, $\max B$, $\min B$.

1.3.2 Dire se i seguenti insiemi hanno massimo o minimo e, in caso affermativo, calcolarli:

(a) $A = \{2^{1+\frac{1}{n}};\ n = 1, 2, \ldots\}$

(b) $B = \{ne^{-n};\ n = 1, 2, \ldots\}$

(c) $C = \{-\frac{1}{n^2+n};\ n = 1, 2, \ldots\}$

(d) $D = \{\frac{2^n}{n+1};\ n = 1, 2, \ldots\}$.

Risposta. Si ha:

(a) $\min A$ *non esiste,* $\max A = 4$;

(b) $\min B$ *non esiste,* $\max B = 1/e$;

(c) $\min C = -1/2$, $\max C$ *non esiste;*

(d) $\min D = 1$, $\max D$ *non esiste.*

1.3.3 Disegnare sommariamente nel piano gli insiemi riportati qui sotto; trovarne poi estremo superiore, inferiore, massimo e minimo (se esistono).

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(n, \sqrt{n});\ n = 1, 2, 3, \ldots\right\} \\
B &= \left\{\left(n, -\frac{1}{2^n}\right);\ n = 0, 1, 2, \ldots\right\} \\
C &= \left\{\left(n, \frac{1}{n} - 1\right);\ n = 1, 2, 3, \ldots\right\} \\
D &= \left\{\left(n, \frac{n}{n+1}\right);\ n = 1, 2, 3, \ldots\right\}.
\end{aligned}$$

Risposta. Vedi Figura 1.1. Si ha: $\sup A = +\infty$, $\inf A = \min A = 1$, $\max A$ *non esiste poiché* A *non è superiormente limitato;* $\sup B = 0$, $\inf B = \min B = -1$, $\max B$ *non esiste pur essendo* B *superiormente limitato;* $\sup C = \max C = 0$, $\inf C = -1$, $\min C$ *non esiste;* $\sup D = 1$, $\inf D = \min D = 1/2$, $\max D$ *non esiste.*

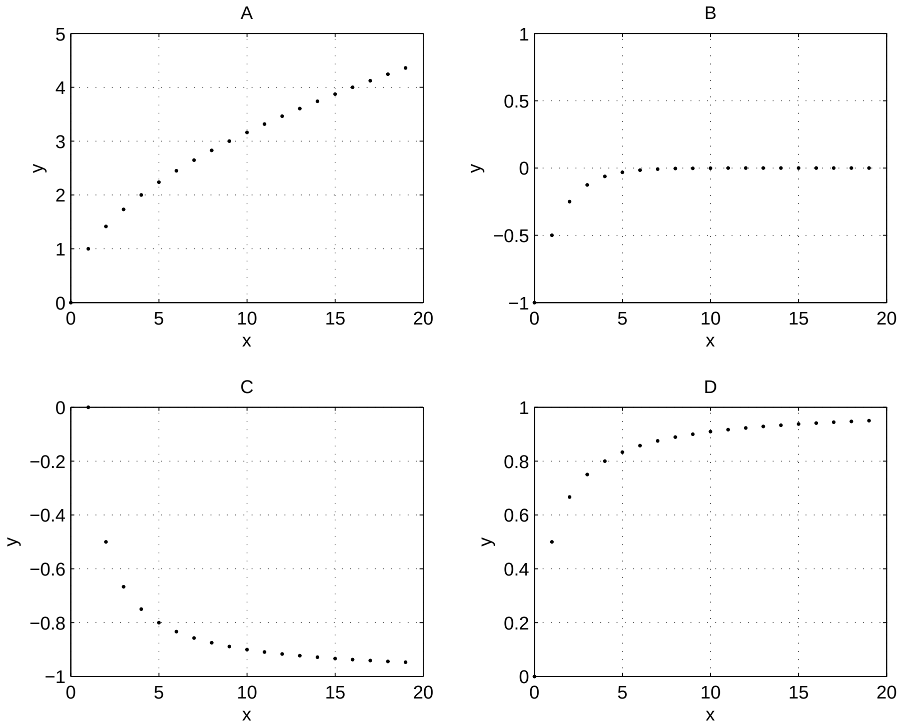

Figura 1.1: Vedi Esercizio 1.3.3.

Capitolo 2

Successioni

2.1 Definizioni e proprietà

2.1.1 Dire se le seguenti proprietà delle successioni $\{a_n\}$, $n \geq 1$, sono vere (o false) *definitivamente*, motivando la risposta:

(a) $a_n = (-2)^n \geq 10$;

(b) $a_n = (-1)^n n \geq 0$;

(c) $a_n = \log \dfrac{n-1}{n} \leq 0$;

(d) $a_n = 10^{1/n} > 1$.

Risposta.

(a) Falsa, ma non definitivamente perché per ogni n dispari la successione $\{a_n\}$ assume valori negativi mentre per ogni n pari assume valori positivi;

(b) falsa, ma non definitivamente perché per ogni n dispari la successione $\{a_n\}$ assume valori negativi mentre per ogni n pari assume valori positivi;

(c) vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, in quanto $a_n \leq 0$ se $\dfrac{n-1}{n} < 1$, condizione sempre soddisfatta;

(d) vera per tutti gli $n \in \mathbb{N}$, in quanto $10^{1/n} > 1$ equivale a $\dfrac{1}{n} > 0$.

2.1.2 Dire se le seguenti proprietà delle successioni $\{b_n\}$, $n \geq 1$, sono vere (o false) *definitivamente*, motivando la risposta; specificare esplicitamente da quale naturale n la proprietà diventa vera (o falsa):

(a) $b_n = 3^n \geq \dfrac{100}{9}$;

(b) $b_n = 3 - \log n < 0$;

(c) $b_n = 2^n - 100 \geq 0$;

(d) $b_n = e^n - 100 < 0$.

Risposta.

(a) Definitivamente vera: $3^n \geq \dfrac{100}{9}$ se $n \geq \log_3 \dfrac{100}{9}$, cioé se $n \geq 3$;

(b) definitivamente vera: $\log n > 3$ se $n > e^3$, cioé se $n \geq 21$;

(c) definitivamente vera: deve essere $n \geq \log_2 100$, cioé $n \geq 7$;

(d) definitivamente falsa: $e^n < 100$ se $n \leq 4$, perciò la proprietà è falsa per $n \geq 5$.

2.1.3 Sia $\epsilon > 0$; dire se è vero che vale definitivamente

(a) $\dfrac{1}{1+n^2} < \epsilon$

(b) $\dfrac{n}{1+n} < 1 - \epsilon$

(c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{n}} < \epsilon$.

Risposta.

(a) *Vero: basta che* $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$.

(b) *Falso: la disuguaglianza vale solo se* $n < \frac{1}{\epsilon} - 1$.

(c) *Vero: basta che* $n > (\frac{1}{\epsilon} - 1)^2$.

2.1.4 Provare, utilizzando la definizione di limite, che

(a) $\lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-n^2} = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$

(d) $\lim_{n\to\infty} \log\left(\sqrt{n} + 1\right) = +\infty$.

Risposta.

(a) *Dato* $\epsilon > 0$ *si deve verificare che* $\left|\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| < \epsilon$ *definitivamente, ovvero per* $n > N$. *Risolvendo* $\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \epsilon$, *ossia* $1 + \frac{1}{n} < e^\epsilon$, *si ottiene* $n > (e^\epsilon - 1)^{-1} = N$.

(b) *Verifichiamo che per ogni* $\epsilon > 0$ *è* $\left|\frac{1}{1-n^2}\right| < \epsilon$ *definitivamente, ovvero* $\frac{1}{n^2-1} < \epsilon$ *se* $n > N$. *Si ottiene* $n > \sqrt{\epsilon^{-1} + 1} = N$.

(c) *Sia* $\epsilon > 0$*; si deve verificare che* $|2^{1/n} - 1| < \epsilon$ *se* $n > N$. *Siccome* $2^{1/n} - 1 \geq 0$ *per ogni* n, *basta risolvere* $2^{1/n} < \epsilon + 1$, *da cui* $n > (\log_2(\epsilon + 1))^{-1} = N$.

(d) *Dato* $M > 0$, *si deve provare che* $\log\left(\sqrt{n} + 1\right) > M$ *definitivamente. Risolvendo* $\sqrt{n} + 1 > e^M$ *si ottiene* $n > (e^M - 1)^2 = N$.

2.1.5 Calcolare, usando la definizione di limite:

(a) $\lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n})$

(b) $\lim_{n\to\infty} (n - n^2)$.

Risposta.

(a) *Si ha* $\lim_{n\to\infty}(n - \sqrt{n}) = +\infty$*; infatti, dato* $M > 0$, *la disuguaglianza* $n - \sqrt{n} > M$ *è soddisfatta per* $n > \left(\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}\right)^2$.

(b) *Si ha* $\lim_{n\to\infty}(n - n^2) = -\infty$*; infatti, dato* $M > 0$, *la disuguaglianza* $n - n^2 < -M$ *è verificata per* $n > \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.

2.1.6 Provare che la successione $a_n = n^2 + n$ diverge a $+\infty$ usando la definizione stessa di limite.

Risposta. Dato $M > 0$, *si deve provare che* $a_n > M$ *definitivamente. Risolvendo la disequazione di secondo grado* $n^2 + n - M > 0$ *si ottiene* $n > \frac{-1 + \sqrt{1+4M}}{2} = N$.

2.1.7 Sia $\{a_n\}$ una successione. Dire se è vero o falso (motivando la risposta) che

(a) $\{a_n\}$ limitata $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ ha limite;

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = l,\ a_n > 1$ per ogni $n \Rightarrow l > 1$;

(c) $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \Rightarrow \{a_n\}$ ha limite;

(d) $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni $n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Risposta.

(a) *Falso. La successione* $a_n = (-1)^n$ *è limitata tra* -1 *ed* 1, *ma non ha limite.*

(b) *Falso. La successione* $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ *è tale che* $a_n > 1$ *per ogni* n, *ma il suo limite vale* $l = 1$.

(c) *Vero. Ogni successione monotona crescente ammette limite.*

(d) *Falso. La successione* $a_n = \dfrac{1}{n}$ *è monotona decrescente ma il suo limite vale zero.*

2.1.8 Provare che le seguenti successioni $\{a_n\}$ non hanno limite; trovare per ognuna di esse una successione $\{b_n\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$:

(a) $a_n = n\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)$

(b) $a_n = \log n \cdot \cos(\pi n)$

(c) $a_n = (-1)^n(n - n^2)$

(d) $a_n = n + (-1)^n n$.

Risposta.

(a) *Poiché* $\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n$, *si ha* $a_n = (-1)^n \cdot n$*: Tale successione non è limitata, quindi non può convergere. Se divergesse a* $+\infty$, *allora tutti i punti della successione, tranne al più un numero finito sarebbero contenuti in un intervallo* $(M, +\infty)$, $M > 0$*; questo non può essere perché per ogni* n *dispari la successione assume valori negativi. Analogamente non può divergere a* $-\infty$*; dunque la successione non ammette limite. Infine si scelga ad esempio* $b_n = 1/n^2$.

(b) *Si ha* $\cos(\pi n) = (-1)^n$, *quindi* $a_n = (-1)^n \log n$. *Tale successione non è limitata, e non diverge per lo stesso motivo del precedente esercizio; dunque non ammette limite. Si scelga* $b_n = 1/\log^2 n$.

(c) *La successione è asintoticamente equivalente a* $(-1)^{n+1}n^2$, *che non ha limite per lo stesso motivo dei precedenti esercizi. Si può scegliere* $b_n = 1/n^3$.

(d) *La successione non è superiormente limitata, quindi non può convergere. Se divergesse a* $+\infty$, *si arriverebbe ad un assurdo ragionando come negli esercizi precedenti; dunque la successione non ammette limite. Infine* $b_n = 1/n^2$.

2.1.9 Si consideri la successione $a_n = n + \dfrac{(-1)^n}{n}$ per $n = 1, 2, \ldots$.

(a) Dire se è limitata, monotona;

(b) calcolarne il sup, inf e, se esistono, max, min;

(c) calcolarne il limite.

Risposta. Si trova $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{8}{3}$, $\ldots$. *La successione è limitata inferiormente:* $n + \frac{(-1)^n}{n} \geq n - 1 \geq 0$. *La successione non è limitata superiormente: fissato* $M > 0$ *si ha* $n + \frac{(-1)^n}{n} \geq n - 1 > M$ *se* $n > M + 1$. *La successione è monotona; infatti*

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 1 - \frac{2n+1}{n(n+1)} & \text{se } n \text{ pari} \\ 1 + \frac{2n+1}{n(n+1)} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Se n *è dispari allora* $a_{n+1} - a_n > 0$. *Se* n *è pari* $a_{n+1} - a_n > 0$ *se* $\frac{n^2-n-1}{n(n+1)} > 0$, *dunque se* $n^2 - n - 1 > 0$*; risolvendo la disequazione si trova che questo è vero se* $n > 4$*; se* $n = 2$ *si verifica direttamente che* $a_3 - a_2 = \frac{1}{6} > 0$. *Dunque* $\{a_n\}$ *è monotona strettamente crescente. Infine si ha:* $\sup a_n = +\infty$, $\inf a_n = \min a_n = 0$, *non esiste* $\max a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2.1.10 Sia a_n una successione di numeri reali, con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando la risposta:

(a) $\lim_{n\to\infty} 2^{a_n} = 1$;

(b) $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$;

(d) $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < +\infty$.

Risposta.

(a) *Vero, per le proprietà dei limiti;*

(b) *vero, perché il limite della differenza di due successioni convergenti è uguale alla differenza dei loro limiti;*

(c) *falso, il limite potrebbe anche non esistere: si consideri ad esempio la successione* $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$*;*

(d) *vero, perché ogni successione convergente è limitata.*

2.1.11 (a) Dire per quali $k \in \mathbb{N}$ la successione $n \to \sin\left(\frac{\pi}{k} \cdot n\right)$ è convergente.

(b) Dire per quali $n \in \mathbb{N}$ la successione $k \to \sin\left(\frac{\pi}{k} \cdot n\right)$ è convergente.

Risposta.

(a) Per $k = 1$ la successione è identicamente nulla, dunque converge a zero; per $k > 1$ la successione non ammette limite per $n \to +\infty$, infatti: se $n = mk$, $m \in \mathbb{N}$, la successione è identicamente nulla, mentre se $n = 2mk + 1$ la successione vale $\sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \neq 0$;

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{k} \cdot n\right) = \sin 0 = 0$.

2.2 Calcolo dei limiti

2.2.1 Trovare un asintotico delle seguenti successioni:

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{2n^4 + 3n^3 + 1}}{n + \log n}$

(b) $\dfrac{n - \sqrt{n}}{n + e^{-n}}$

(c) $\dfrac{\log n - n}{\sqrt{n} - \log n}$

(d) $\dfrac{n^{1/2} + n^{1/3} + 1}{n^{1/4} + n^{1/5}}$.

Risposta.

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{2n^4 + 3n^3 + 1}}{n + \log n} \sim \dfrac{2^{1/3} n^{4/3}}{n} = \sqrt[3]{2}n$;

(b) $\dfrac{n - \sqrt{n}}{n + e^{-n}} \sim \dfrac{n}{n} = 1$;

(c) $\dfrac{\log n - n}{\sqrt{n} - \log n} \sim \dfrac{-n}{\sqrt{n}} = -\sqrt{n}$;

(d) $\dfrac{n^{1/2} + n^{1/3} + 1}{n^{1/4} + n^{1/5}} \sim \dfrac{n^{1/2}}{n^{1/4}} = \sqrt[4]{n}$.

2.2.2 Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + n\sqrt{n} - n^2\sqrt[3]{n}}{n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 + (-1)^n n}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n - \log n}{\sqrt{n}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - n\right)$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1 - (2/3)^n}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2^n e^{-n} - e^n 3^{-n}\right)$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n - 2^n}{3^n}$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n \sin(n\pi/2)}{2^n}$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{2-n}}{e^{1-n} + e^{-2n}}$

Risposta.

(a) Si ha $\dfrac{1 + n\sqrt{n} - n^2\sqrt[3]{n}}{n} \sim -\dfrac{n^{7/3}}{n} = -n^{4/3}$, *e* $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^{4/3}) = -\infty$;

(b) *si ha* $\lim_{n\to\infty} |1 + (-1)^n n| = +\infty$, *dunque* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + (-1)^n n} = 0$;

(c) $\frac{n - \log n}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}$, *e* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$;

(d) *si ha* $\sqrt{n} - n \sim -n$, *perciò il limite vale* $-\infty$;

(e) *è* $1 - (2/3)^n \sim 1$, *dunque si ha* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1 - (2/3)^n} = +\infty$;

(f) *poiché* $2 < e < 3$, *si ha* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = 0$, *e dunque* $\lim_{n\to\infty} \left(2^n e^{-n} - e^n 3^{-n}\right) = 0$;

(g) $\frac{e^n - 2^n}{3^n} \sim \left(\frac{e}{3}\right)^n$, *perciò il limite vale zero;*

(h) *il limite non esiste, perché la successione data è il prodotto di una successione divergente a* $+\infty$, $3^n/2^n$, *per una successione che non ammette limite,* $\sin(n\pi/2)$;

(i) *si ha che* $\frac{e^{2-n}}{e^{1-n} + e^{-2n}} = \frac{e^2}{e + e^{-n}} \sim e$ *e dunque il limite vale* e.

2.2.3 Calcolare

(a) $\lim_{n\to\infty}[n \log(n-1) - (n-1)\log n]$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}}$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3} - n\sqrt{n+1}}$.

Risposta.

(a) *Si ha*

$$\log(n-1)^n - \log n^{n-1} = \log \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} = \log\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot n\right] = \log\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot n\right].$$

Inoltre $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$, *dunque* $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot n \to +\infty$; *pertanto il limite dato vale* $+\infty$;

(b) *Moltiplicando numeratore e denominatore per* $\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}$ *si ottiene*

$$\frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}}{2\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = 1,$$

dunque il limite vale 1.

(c) *Moltiplicando numeratore e denominatore per* $\sqrt{n^3} + n\sqrt{n+1}$ *si trova*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3} - n\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n^3} + n\sqrt{n+1})}{-n^2} \sim \frac{n^2 + n^2}{-n^2} = -2$$

che è il valore del limite.

2.2.4 Calcolare

(a) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}}$

(b) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\log n}}$.

Risposta. Ricordiamo che $x^a = e^{a \log x}$ *se* $x > 0$.

(a) *Si ha* $n^{\frac{1}{2n}} = e^{\frac{\log n}{2n}}$; *poiché* $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{2n} = 0$ *allora* $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$.

(b) *Si ha* $n^{\frac{1}{\log n}} = e^{\frac{\log n}{\log n}} = e$, *dunque* $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\log n}} = e$.

2.2.5 Calcolare

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$.

Risposta.

(a) *Si ha*

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = \left[2\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right]^n = 2^n\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2};$$

poiché $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$ *si ha* $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = +\infty$.

(b) *Si ha*

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^n = \frac{1}{2^n}\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2;$$

poiché $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = e$ *si ha* $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n = 0$.

2.2.6 Si considerino le successioni definite qui sotto; dire se esistono i rispettivi limiti e, in caso affermativo, calcolarli:

(a) $a_n = \begin{cases} (n+1)/n & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

(b) $b_n = \begin{cases} 2n-1 & \text{se } n \geq 10 \\ 1 & \text{se } n < 10 \end{cases}$

(c) $c_n = \begin{cases} 3n/(n+1) & \text{se } n \text{ pari} \\ 3 & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$

Risposta.

(a) *Il limite non esiste: poiché* $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$, *fissato* $0 < \epsilon < 1$ *i termini di indice pari sono definitivamente compresi nell'intervallo* $[1-\epsilon, 1+\epsilon]$, *mentre in tale intervallo non cade alcun termine di indice dispari.*

(b) *La successione* $\{b_n\}$ *coincide definitivamente (*$n \geq 10$*) con la successione* $\{2n-1\}$, *che diverge; dunque* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

(c) *Poiché* $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1} = 3$, *fissato* $\epsilon > 0$ *i termini di indice pari sono definitivamente compresi nell'intervallo* $[3-\epsilon, 3+\epsilon]$ *e in tale intervallo cadono pure tutti i termini di indice dispari; dunque* $\lim_{n\to\infty} c_n = 3$.

2.2.7 Dire se esistono i limiti delle successioni riportate di seguito e, in caso affermativo, calcolarli:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{(-1)^n n}$.

Risposta.

(a) *Si ha che* $\frac{(-1)^n n}{1+n^2} \sim \frac{(-1)^n}{n}$ *il cui limite è* 0; *dunque la successione è infinitesima.*

(b) *Poiché* $\frac{1+n^2}{(-1)^n n} \sim (-1)^n n$, *il limite non esiste.*

2.2.8 Calcolare per $q > 1$ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{q^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

Risposta. Si ha

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q};$$

dunque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q^n}\sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{q^n(1-q)} = \lim_{n\to\infty}\frac{q^n(q^{-n}-q)}{q^n(1-q)} = \frac{q}{q-1}$$

poiché $q > 1$.

2.3 Altri esercizi

2.3.1 Dare un esempio di una successione

(a) convergente a 1 non definitivamente monotona;

(b) non limitata e non divergente;

(c) divergente a $+\infty$ non definitivamente monotona;

(d) crescente e convergente a -1 .

Risposta.

(a) $a_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$;

(b) $a_n = (-1)^n n$;

(c) $a_n = n + (-1)^n$;

(d) $a_n = -1 - \dfrac{1}{n}$.

2.3.2 Vero o falso?

(a) Ogni successione monotona strettamente crescente ha sempre limite $+\infty$;

(b) esistono successioni non crescenti che tendono a $+\infty$.

Risposta.

(a) Falso: si consideri $a_n = \frac{n-1}{n}$.

(b) Vero: ad esempio $a_n = n + 2(-1)^n$.

2.3.3 Trovare una successione $\{a_n\}$ che soddisfi le seguenti due condizioni:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3} = +\infty$;

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}} = 0$;

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0$;

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\log n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{\log n} = +\infty$

Risposta. Si scelga ad esempio:

(a) $a_n = n^4$;

(b) $a_n = n\sqrt[3]{n}$;

(c) $a_n = e^n$;

(d) $a_n = (\log n)^{2/3}$.

2.3.4 Si considerino $a,\ b \in \mathbb{R}^+$.

(a) Determinare $a,\ b$ in modo che la successione $a_n = \left(\dfrac{2a+b-1}{a}\right)^n$ sia convergente.

(b) Disegnare nel piano cartesiano ab l'insieme delle coppie (a, b) del punto precedente.

Risposta.

(a) Si tratta di una successione geometrica di ragione $\dfrac{2a+b-1}{a}$*, la quale converge quando* $-1 < \dfrac{2a+b-1}{a} \le 1$*, cioè nell'insieme*

$$\begin{cases} 3a+b-1 > 0 \\ a+b-1 \le 0. \end{cases}$$

(b) Si tratta del triangolo di vertici $A(1/3, 0)$*,* $B(1, 0)$*,* $C(0, 1)$*, esclusi i lati* AB*,* AC*, incluso il lato* BC.

2.3.5 Sia $\{a_n\}$ una successione limitata con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se le successioni di termine generale $\dfrac{1}{a_n}$, $\dfrac{1}{1+a_n}$, $\dfrac{1}{\log a_n}$ sono allora necessariamente limitate.

Risposta. La successione $\frac{1}{a_n}$ *non è necessariamente limitata: ad esempio la successione* $a_n = \frac{1}{n}$ *è limitata,* $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *ma* $\frac{1}{a_n} = n$ *non è limitata.*

La successione $\frac{1}{1+a_n}$ *è limitata: se* $0 \le m \le a_n \le M$ *allora* $1+m \le 1+a_n \le 1+M$ *e dunque* $\frac{1}{1+M} \le \frac{1}{1+a_n} \le \frac{1}{1+m}$.

La successione $\frac{1}{\log a_n}$ *non è necessariamente limitata: ad esempio la successione* $a_n = 1+\frac{1}{n}$ *è limitata,* $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *ma* $\frac{1}{\log a_n} = \frac{1}{\log(1+1/n)} \sim \frac{1}{1/n} = n$ *non è limitata.*

2.3.6 Sia $\{a_n\}$ una successione convergente con $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se le successioni di termine generale $\dfrac{1}{a_n - 1}$, $\log(1+a_n)$, $\log a_n$ sono allora necessariamente convergenti.

Risposta. Sia $\{a_n\}$ *una successione convergente a* l *con* $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*; si noti che* $l \ge 0$ *per il teorema della permanenza del segno.*

La successione $\frac{1}{a_n-1}$ *non è necessariamente convergente: ad esempio la successione* $a_n = 1+\frac{1}{n}$ *converge a 1,* $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *ma* $\frac{1}{a_n-1} = n$ *diverge a* $+\infty$.

La successione $\log(1+a_n)$ *è convergente a* $\log(1+l)$.

La successione $\log a_n$ *non è necessariamente convergente: ad esempio la successione* $a_n = \frac{1}{n}$ *è convergente a 0,* $a_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *ma* $\log a_n = -\log n$ *diverge a* $-\infty$.

2.3.7 Trovare due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ tali che

(a) $a_n \to 0^+$, $b_n \to 0^-$, $\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} \to +\infty$

(b) $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$, $\dfrac{a_n}{b_n} \to -\infty$.

Risposta.

(a) Ad esempio $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = -\frac{1}{n}$.

(b) Ad esempio (utilizzando i reciproci delle successioni precedenti) $a_n = n^2$, $b_n = -n$.

2.3.8 Sia q un numero reale e si consideri la successione $\{a_n\}$ definita da $a_1 = 1$ e $a_n = \dfrac{q}{a_{n-1}}$ per $n \ge 2$. Per quali q la successione $\{a_n\}$ è convergente?

Risposta. Si trova che $a_1 = 1$, $a_2 = q$, $a_3 = 1$ *e, in generale,*

$$a_n = \begin{cases} 1 & \textit{se } n \textit{ dispari} \\ q & \textit{se } n \textit{ pari.} \end{cases}$$

Pertanto la successione converge se e soltanto se $q = 1$, *e il limite è 1.*

2.3.9 Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ calcolare, quando esiste, il $\lim\limits_{n\to\infty} ((2a)^n - a^n)$.

Risposta. Entrambe le successioni $\{(2a)^n\}$ *e* $\{a^n\}$ *sono geometriche; pertanto si ha*

$$\lim_{n\to\infty} ((2a)^n - a^n) = \begin{cases} +\infty & \textit{se } a > \frac{1}{2} \\ 1 & \textit{se } a = \frac{1}{2} \\ 0 & \textit{se } -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2} \\ \nexists & \textit{se } a \le -\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

2.3.10 Esiste un numero reale $a > 0$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty} (3^n - 2^n - a^n) = 0$?

Risposta. No. Infatti se $a < 3$ *allora* $3^n - 2^n - a^n \sim 3^n \to +\infty$*; se* $a = 3$ *si ha* $3^n - 2^n - a^n = -2^n \to -\infty$*; infine, se* $a > 3$, *si ha* $3^n - 2^n - a^n \sim -a^n \to -\infty$.

Capitolo 3

Serie

3.1 Convergenza delle serie

3.1.1 Dire se è vero che definitivamente

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 10$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} > \frac{9}{10}$.

Risposta.

(a) Sì. Infatti la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ è divergente, cioè per ogni $M > 0$ esiste N tale che $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > M$. Basta allora prendere $M = 10$.

(b) Sì. Infatti

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e $1 - \frac{1}{n+1} > \frac{9}{10}$ se $n > 9$.

3.1.2 Per quale N si ha $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq 100$?

Risposta. Sia $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ e si ricordi la maggiorazione $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$. Si ha che $1 + \frac{n}{2} \geq 100$ se $n \geq 198$ e dunque basta prendere $N = 2^{198}$.

3.1.3 Studiare la convergenza delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n})$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1/n}}{ne^{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - n + n^2}{1 + n^2 + n^4}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+e^{-n}}{n!}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-n}+\frac{1}{2}\right)^n$.

Risposta. Nelle seguenti soluzioni verifichiamo anche la condizione necessaria per la convergenza di una serie, cioè: se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge, allora* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(a) La condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta; applicando il criterio del rapporto si ottiene $\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, *e dunque la serie converge.*

(b) La condizione necessaria per la convergenza della serie non è soddisfatta: $\lim_{n\to\infty}(1-e^{-n}) = 1$; *trattandosi di una serie a termini positivi, essa diverge a* $+\infty$.

(c) La condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta; applicando il criterio della radice si ottiene $\dfrac{\sqrt[n^2]{2}}{\sqrt[n]{n}e} \longrightarrow_{n\to\infty} \dfrac{1}{e} < 1$, *e dunque la serie converge.*

(d) La condizione necessaria per la convergenza della serie non è soddisfatta in quanto non esiste il $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \sqrt[n]{n}$; *si tratta di una serie a termini di segno alterno che risulta indeterminata in quanto* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(e) La serie converge per il criterio del confronto asintotico poiché ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, *che converge.*

(f) La condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta; poiché la serie è a termini di segno alterno ed il termine $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ *decresce, per il criterio di Leibniz essa converge.*

(g) La condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta; poiché la serie è a termini di segno alterno ed il termine $\dfrac{1}{n\log n}$ *decresce, per il criterio di Leibniz essa converge.*

(h) La serie converge per il criterio del confronto asintotico poiché ha lo stesso comportamento di $3\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, *che converge.*

(i) La serie converge per il criterio del confronto asintotico poiché ha lo stesso comportamento di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, *serie geometrica convergente. Allo stesso risultato si perviene applicando il criterio della radice.*

3.1.4 Studiare il carattere delle seguenti serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\sin n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{1/3}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n-\sqrt{n}}{n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\log_2 n}}$.

Risposta.

(a) Si ha $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n} > \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$; *poiché la serie armonica diverge e la serie data ne è un maggiorante, anch'essa diverge per il criterio del confronto.*

(b) *La serie converge per il criterio del confronto asintotico poiché ha lo stesso comportamento di* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$*, che converge.*

(c) *La condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta; poiché la serie è a termini di segno alterno ed il termine* $\frac{1}{n^{1/3}}$ *decresce, per il criterio di Leibniz essa converge.*

(d) *Si ha* $\frac{\log n - \sqrt{n}}{n+1} \sim \frac{-1}{\sqrt{n}}$*; la serie diverge per il criterio del confronto asintotico poiché ha lo stesso comportamento di* $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$*, che diverge a* $-\infty$*.*

(e) *Utilizzando la formula di cambiamento di base per i logaritmi si ha*

$$3^{\log_2 n} = 3^{\frac{\log_3 n}{\log_3 2}} = 3^{\log_3 (n^{1/\log_3 2})} = n^{\frac{1}{\log_3 2}} ;$$

dunque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\log_2 n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\log_3 2}}} < +\infty$$

poiché $\frac{1}{\log_3 2} > 1$ *(serie armonica generalizzata).*

3.1.5 Studiare il carattere delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\log n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1+e^{-n})$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+\sin n}{1+n^2}$.

Risposta.

(a) *La condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta; applicando il criterio del rapporto si ottiene* $\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2+1} = \frac{n^2+2n+2}{n^3+n^2+n+1} \sim \frac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$*, dunque la serie converge.*

(b) *La serie diverge per il criterio del confronto asintotico poiché ha lo stesso comportamento di* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$*, che diverge.*

(c) *La condizione necessaria per la convergenza della serie non è soddisfatta in quanto* $\lim_{n\to\infty}(1+e^{-n}) = 1$*; la serie risulta indeterminata poiché ha lo stesso comportamento di* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$*.*

(d) *La serie diverge per il criterio del confronto asintotico poiché ha lo stesso comportamento di* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$*, che diverge.*

3.1.6 Studiare la convergenza delle serie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

Risposta.

(a) *Si ha che* $n^{\log n} > n^2$ *se* $n > e^2$*; per il criterio del confronto la serie converge.*

(b) La condizione necessaria per la convergenza della serie è soddisfatta in quanto

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n \log \log n} = 0.$$

Applicando il criterio della radice si ottiene $\dfrac{1}{\log n} \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, *dunque la serie converge.*

3.1.7 Studiare convergenza semplice e convergenza assoluta delle serie a termini di segno alterno

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n + e^{-n})$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 2e^{-n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3 + 1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$.

Risposta.

(a) Poiché $\lim_{n\to\infty}(n + e^{-n}) = +\infty$ *la serie non converge semplicemente né assolutamente.*

(b) Si ha che $\frac{1}{n+2e^{-n}} \sim \frac{1}{n}$, *e dunque la serie non converge assolutamente; converge invece semplicemente per il criterio di Leibniz.*

(c) Vale che $\frac{n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}$, *pertanto la serie converge assolutamente e dunque semplicemente.*

(d) Poiché $\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}$ *la serie non converge assolutamente; converge invece semplicemente per il criterio di Leibniz.*

3.1.8 Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{2^n}$ è convergente.

Risposta. La condizione necessaria per la convergenza è soddisfatta; applicando il criterio della radice si ottiene $\sqrt[n]{\dfrac{n^{3/2}}{2^n}} = \dfrac{(\sqrt[n]{n})^{3/2}}{2} \longrightarrow_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} < 1$, *dunque la serie converge.*

3.1.9 Studiare il comportamento delle serie numeriche

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n + e^{-n}}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \left(\frac{3}{5}\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n + \log n}}$.

Risposta.

(a) La serie converge assolutamente in quanto $\left|\frac{\cos(2n)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$.

(b) La serie non converge assolutamente in quanto $\frac{1}{\sqrt{n+e^{-n}}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. *Si ha convergenza semplice per il criterio di Leibniz.*

(c) Si ha $\sqrt[n]{n^2 \left(\frac{3}{5}\right)^n} \to \frac{3}{5} < 1$, *dunque la serie converge per il criterio della radice.*

(d) La serie non converge assolutamente in quanto $\frac{1}{\sqrt[3]{n+\log n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1}{n^{1/3}}$; *essa converge semplicemente per il criterio di Leibniz.*

3.2 Altri esercizi

3.2.1 Se una serie diverge a $+\infty$ allora il suo termine generale non può tendere a 0. Vero o falso?

Risposta. Falso, la serie armonica è un controesempio.

3.2.2 È vero che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} < 1$?

Risposta. Sì. Infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1\right) = \frac{4}{9} < 1\,.$$

3.2.3 Dire se la successione $\{a_n\}$ definita da $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\log k}{k^2}$ è limitata.

Risposta. La successione $\frac{\log k}{\sqrt{k}}$ *è limitata in quanto convergente (a* 0*), dunque* $\frac{\log k}{\sqrt{k}} < C$ *e* $\frac{\log k}{k^2} < C \frac{1}{k\sqrt{k}}$. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^2}$ *converge allora per il criterio del confronto; perciò la successione* $\{a_n\}$ *delle somme parziali è convergente, dunque limitata.*

3.2.4 Sia $q > 0$; discutere la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^n}$.

Risposta. Se $q = 1$ *si ha* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty$. *Se* $q > 1$, *è* $\dfrac{q^n}{1+q^n} \sim \dfrac{q^n}{q^n} = 1$ *e dunque la serie diverge a* $+\infty$. *Se* $0 < q < 1$ *è* $\dfrac{q^n}{1+q^n} \sim q^n$ *e la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *converge (serie geometrica). Dunque la serie data converge per* $q \in (0,1)$ *e diverge a* $+\infty$ *per* $q \geq 1$.

3.2.5 Calcolare la somma delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (2-\sqrt{2})^n$.

Risposta. In entrambi i casi si tratta di serie geometriche, la prima di ragione $-1/4$, *la seconda* $2-\sqrt{2}$; *entrambe le ragioni sono minori di* 1 *in valore assoluto, dunque le serie convergono. Ricordando che, se* $|q| < 1$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1 - q\,,$$

si deduce che la prima serie converge a $1/20$ *e la seconda a* $2(\sqrt{2}-1)$.

3.2.6 Calcolare la somma delle serie

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{n+1}}$.

Risposta.

(a) Si ha $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

(b) In questo caso $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{12} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

3.2.7 Provare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$ è convergente e calcolarne la somma.

Risposta. Si ha $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \frac{3}{n(n+3)} \sim \frac{3}{n^2}$*; la serie converge per il criterio del confronto asintotico perché ha lo stesso comportamento di* $3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$*. Per calcolare la somma basta osservare, come nelle serie telescopiche, che:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

3.2.8 Discutere al variare dei numeri reali a e b la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}\right)$. Calcolare la somma nei casi di convergenza.

Risposta. Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-b)n + a}{n(n+1)}\,.$$

Se $a \neq b$ *si ha* $\frac{(a-b)n+a}{n(n+1)} \sim \frac{a-b}{n}$*, termine generale di una serie (armonica) divergente; se* $a = b$ *si ha* $\frac{(a-b)n+a}{n(n+1)} \sim \frac{a}{n^2}$*, termine generale di una serie (armonica generalizzata) convergente. In tal caso la serie di partenza si riduce alla serie di Mengoli:*

$$a \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = a\,.$$

3.2.9 Dire per quali numeri reali $a \geq 0$ le serie seguenti sono convergenti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,(1+a^n)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{1}{n}}$.

Risposta.

(a) La serie converge se e solo se $a > 1$*. Infatti se* $a > 1$ *si ha* $\frac{1}{1+a^n} \sim (\frac{1}{a})^n$*, termine generale di una serie geometrica convergente. Se* $0 \leq a < 1$ *il termine generale tende a 1, se* $a = 1$ *tende a* $\frac{1}{2}$*; dunque in nessuno di questi due casi ci può essere convergenza.*

(b) La serie converge se e solo se $0 \leq a < 1$*. Infatti se* $a > 1$ *si ha* $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$*, dunque la serie non può convergere. Se* $0 \leq a < 1$ *la serie converge per il criterio della radice; se* $a = 1$ *si ha la serie armonica, divergente.*

(c) La serie non converge per alcun a*. Infatti il termine generale della serie non tende in nessun caso a 0 in quanto*

$$\lim_{n\to\infty} (1+a^n) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 2 & \text{se } a = 1 \\ 1 & \text{se } 0 \leq a < 1. \end{cases}$$

(d) La serie converge se e soltanto se $a = 0$*. Infatti il termine generale della serie tende a 1 se* $a > 0$*.*

3.2.10 Siano a, b, c numeri reali positivi. Dire per quali valori di a, b e c le serie seguenti convergono:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{1+n^b}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a + \frac{1}{n^b}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{b^n + c^n}$, per $0 < a < b < c$.

Risposta.

(a) *La serie data ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{b-a}}$, serie armonica generalizzata che converge se $b - a > 1$, ossia $b > a + 1$, e diverge a $+\infty$ se $b < a + 1$. Dunque, per il criterio del confronto asintotico, la serie converge per ogni a, b tali che $b > a + 1$.*

(b) *Si ha $\frac{1}{n^a + \frac{1}{n^b}} \sim \frac{1}{n^a}$ e dunque si ha convergenza se e soltanto se $a > 1$.*

(c) *Poiché $0 < a < b < c$ si ha $\frac{a^n}{b^n+c^n} \sim \frac{a^n}{c^n} = \left(\frac{a}{c}\right)^n$. La serie di termine generale $\left(\frac{a}{c}\right)^n$ converge (è una serie geometrica di ragione minore di 1); dunque converge la serie di partenza per il criterio del confronto asintotico.*

3.2.11 Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, $a_n \geq 0$.

(a) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, può convergere la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + a_n}$?

(b) Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, può la successione $\{a_n\}$ non avere limite?

Risposta.

(a) *Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dunque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = 1$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ non può convergere.*

(b) *Sì. Si consideri ad esempio la successione $a_n = 2 + (-1)^n$.*

3.2.12 Si consideri la serie geometrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

(a) È possibile scrivere una serie geometrica che abbia per somma $\frac{2}{3}$? Se sì, quale?

(b) È possibile scrivere una serie geometrica che abbia per somma $\frac{1}{3}$?

Risposta. Ricordiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ se $|q| < 1$.

(a) *Si ha $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$ se $q = -\frac{1}{2}$.*

(b) *Invece $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{3}$ se $q = -2$, ma la serie geometrica non converge per la ragione -2; dunque non esistono serie geometriche come sopra con somma $\frac{1}{3}$.*

3.2.13 Si consideri la successione $a_n = \sin(n\pi/2) + |\cos(n\pi/2)|$.

(a) Dire se esiste il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$;

(b) dire se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Risposta. La successione data assume valori $1; 1; 1; -1; 1; \ldots$, quindi $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste. Di conseguenza la condizione necessaria per la convergenza della serie non è soddisfatta: la serie non può convergere.

3.2.14 Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha} - n^{1-\alpha}}$, per $0 < \alpha < 1$.

Risposta. La serie converge in quanto

$$\frac{1}{n^{1+\alpha} - n^{1-\alpha}} \sim \frac{1}{n^{1+\alpha}}$$

e la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ converge poiché $1 + \alpha > 1$.

Capitolo 4

Funzioni di una variabile

4.1 Domini e proprietà

4.1.1 Determinare i domini delle seguenti funzioni:

(a) $\dfrac{1}{1-\log x}$

(b) $\dfrac{1}{x-x^3}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\sqrt{x^2-4x+3}$

(e) $\log\left(\dfrac{1}{1-|x|}\right)$

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{1-\log|x|}}$

(g) $\arcsin(\sqrt{4x^2-1}-2)$

(h) $\log\left(1-2\sqrt{1-4x^2}\right)$.

Risposta.

(a) $(0,e)\cup(e,+\infty)$*;*

(b) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$*;*

(c) $(-1,1)$*;*

(d) $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$*;*

(e) $(-1,1)$*;*

(f) $(-e,0)\cup(0,e)$

(g) $\left[-\sqrt{\frac{5}{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$

(h) $\left[-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right]$.

4.1.2 Calcolare il dominio di $\log\big(\log(\log x)\big)$ e di $\sqrt{x-\sqrt{x}}$.

Risposta. Nel primo caso, affinché la funzione $\log$ *più esterna sia definita occorre* $\log(\log x)>0$*, dunque* $\log x>1$*, dunque* $x>e$*. Nel secondo, la radice esterna è definita quando* $x-\sqrt{x}\geq 0$*, dunque se* $x\geq 1$*.*

4.1.3 Determinare i domini delle seguenti funzioni:

(a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(b) $\arccos(2-x^2)$.

Risposta.

(a) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;

(b) $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$.

4.1.4 Dire se le seguenti funzioni sono pari, dispari o né pari né dispari:

(a) $\dfrac{1-x}{e^x}$

(b) $e^x - e^{-x}$

(c) $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$

(d) $x - x^2$

(e) $x^2 - x^3$

(f) $e^x + e^{-x}$

(g) $x|x|$

(h) $\sin x - \cos x$.

Risposta.

(a) Né pari né dispari;

(b) dispari;

(c) dispari;

(d) né pari né dispari;

(e) né pari né dispari;

(f) pari;

(g) dispari;

(h) né pari né dispari.

4.2 Grafici elementari

4.2.1 Disegnare approssimativamente i grafici delle funzioni

(a) $1 - x - x^2$

(b) $(x-2)^3$

(c) $1 + x + \cos x$

(d) $|x^3|$

(e) $\log x - e^x$

(f) $1 - x^2$

(g) $e^x - x$

(h) $\sin(x - \pi/4)$.

Risposta. Vedi Figura 4.1.

4.2.2 Disegnare un grafico approssimativo, senza svolgere calcoli, delle funzioni

(a) $\log x \cdot \sin x$

(b) $1 - e^{-|x|}$

(c) $1 - (x+1)^2$

(d) $\log x - x$.

Risposta. Vedi Figura 4.2.

4.2.3 Disegnare approssimativamente i grafici delle funzioni

(a) $1/\sqrt{x}$, $1/x$, $1/x^2$ in $(0, 1]$

(b) $e^{x/2}$, e^x, e^{2x}

(c) $\sin(x/2)$, $\sin x$, $\sin(2x)$ in $[0, 4\pi]$

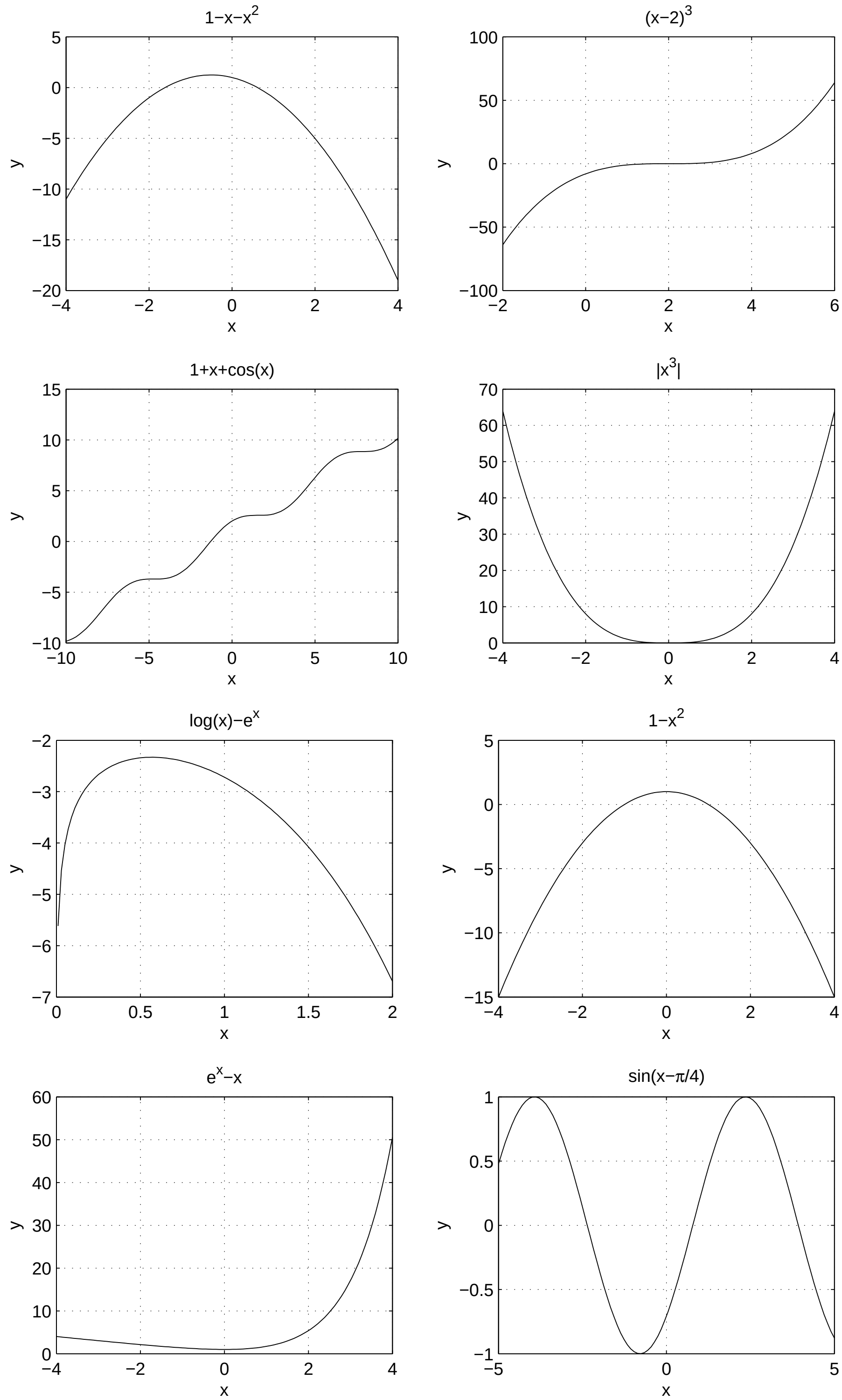

Figura 4.1: Vedi Esercizio 4.2.1

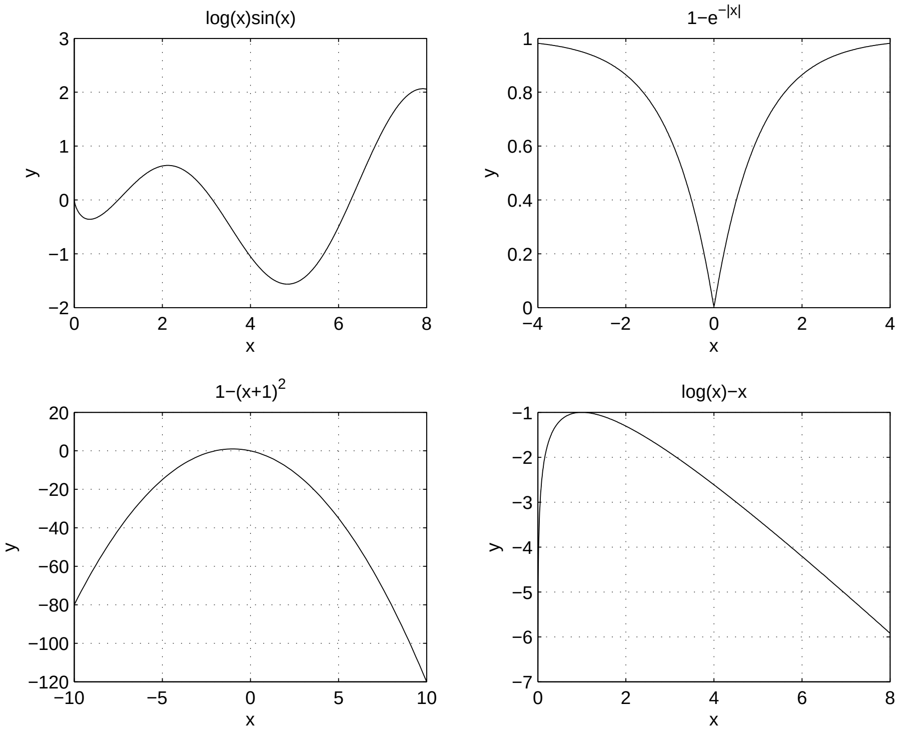

Figura 4.2: Vedi Esercizio 4.2.2

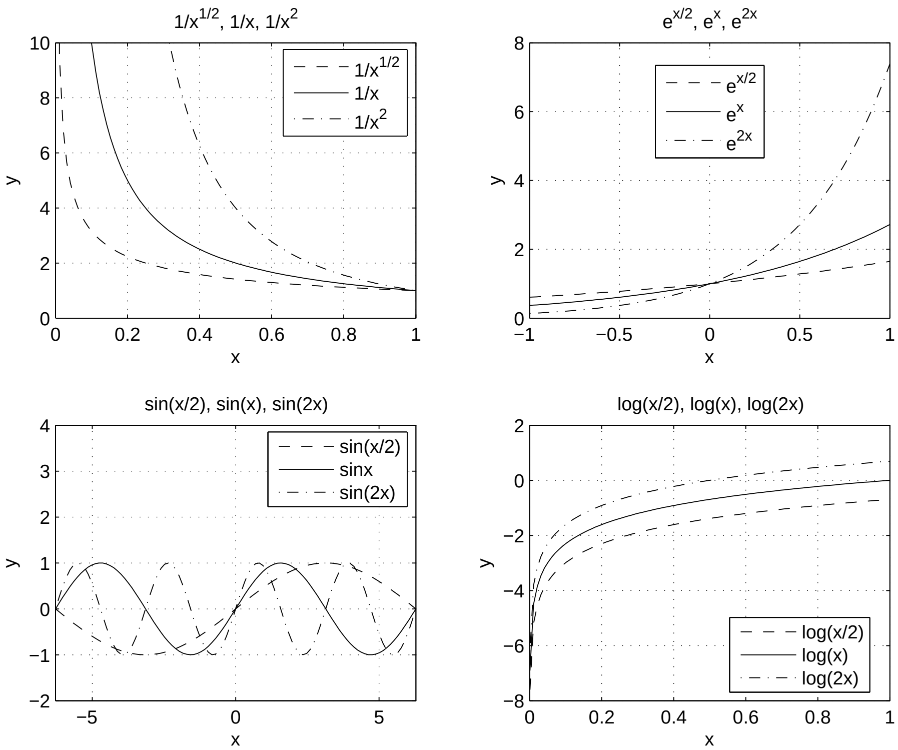

Figura 4.3: Vedi Esercizio 4.2.3.

(d) $\log(2x)$, $\log x$, $\log(x/2)$ in $(0, +\infty)$.

Risposta. Vedi Figura 4.3.

4.2.4 Disegnare in maniera approssimativa i grafici delle funzioni

(a) $f_1(x) = x^2 - 1$

(b) $f_2(x) = (x+1)^2 - 1$

(c) $f_3(x) = |x^2 - 1|$

(d) $f_4(x) = 1 - (x-1)^2$.

Risposta. Vedi Figura 4.4.

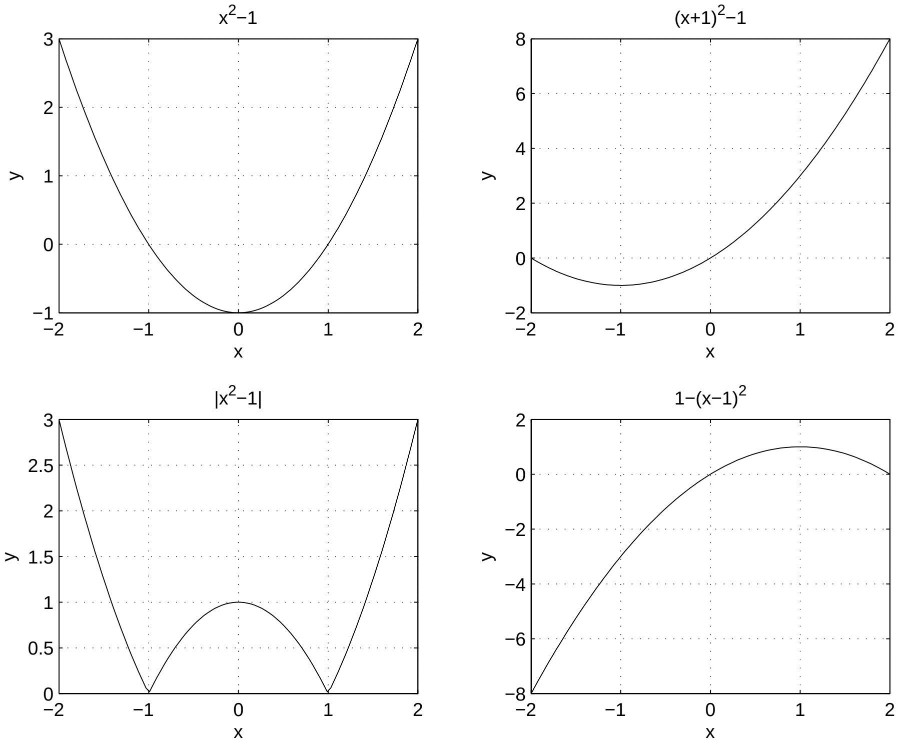

Figura 4.4: Vedi Esercizio 4.2.4.

4.3 Funzioni invertibili

4.3.1 Sia f la funzione definita qui sotto. Disegnare il grafico di f, provare che è invertibile, disegnare il grafico della funzione inversa, calcolare esplicitamente la funzione inversa.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ 2x-1 & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [-1,0] \\ -2x & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-1,0] \\ x/2 & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-1,0] \\ 1+x/2 & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$.

Risposta. Vedi Figura 4.5.

(a) La funzione è monotona crescente, dunque è invertibile con inversa

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in [0,1] \\ (y+1)/2 & \text{se } y \in (1,3] \end{cases}$$

(b) La funzione è monotona decrescente, $f^{-1}(y) = \begin{cases} -y & \text{se } y \in [0,1] \\ -y/2 & \text{se } y \in [-2,0) \end{cases}$

(c) La funzione è monotona crescente, $f^{-1}(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in [-1,0] \\ 2y & \text{se } y \in (0,1/2] \end{cases}$

(d) La funzione è monotona crescente, $f^{-1}(y) = \begin{cases} y-1 & \text{se } y \in [0,1] \\ 2y-2 & \text{se } y \in (1,3/2] \end{cases}$.

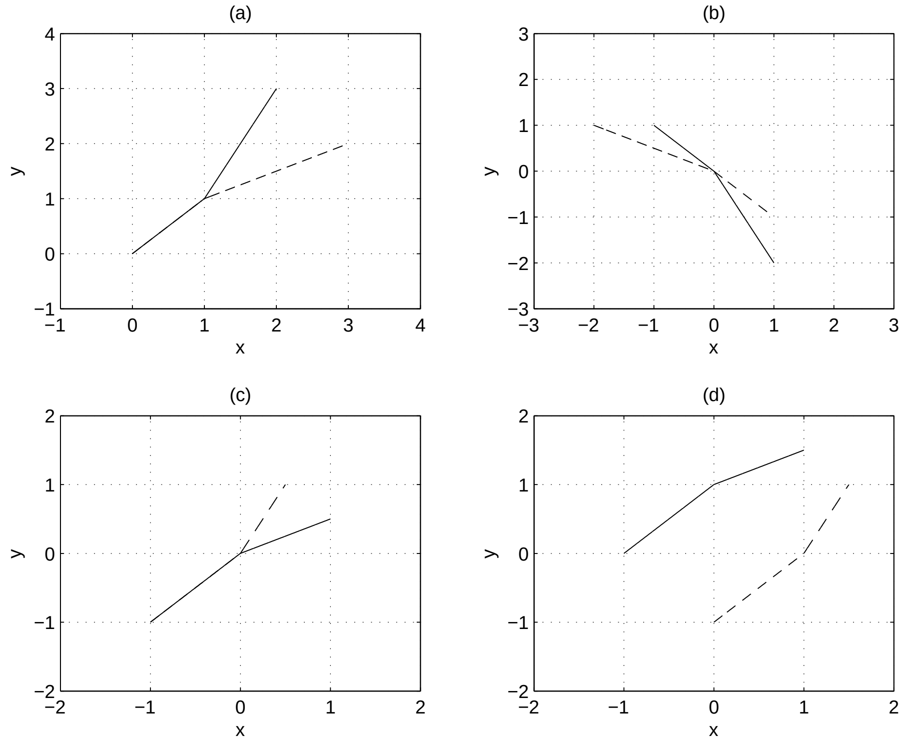

Figura 4.5: Vedi Esercizio 4.3.1.

4.3.2 Si considerino le funzioni

(a) $f_1(x) = \begin{cases} x/2 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0; \end{cases}$

(b) $f_2(x) = \begin{cases} x/2+1 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x-1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Disegnarne i grafici, calcolarne le funzioni inverse, disegnare i grafici delle funzioni inverse.

Risposta. Vedi Figura 4.6.

(a) Si ha $f_1^{-1}(y) = \begin{cases} 2y & \text{se } y \geq 0 \\ y/2 & \text{se } y < 0; \end{cases}$

(b) Si ha $f_2^{-1}(y) = \begin{cases} 2y-2 & \text{se } y \geq 1 \\ (y+1)/2 & \text{se } y < -1. \end{cases}$

4.3.3 Dire in che intervallo del tipo $(a,+\infty)$ è invertibile la funzione $f(x) = x^2 + x$; calcolare la funzione inversa della restrizione di f a questo intervallo .

Risposta. Il grafico di f è una parabola di vertice $V(-1/2,-1/4)$; la funzione f è dunque invertibile in $(-1/2,+\infty)$ perché in tale intervallo è monotona crescente; si ha $f^{-1}(y) = \dfrac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$ per $y \in [-1/4,+\infty)$.

4.3.4 Calcolare la funzione inversa delle seguenti funzioni f; specificare il dominio di f^{-1}; disegnare un grafico approssimativo di f e f^{-1}:

(a) $f(x) = e^{2x-3}$

(b) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

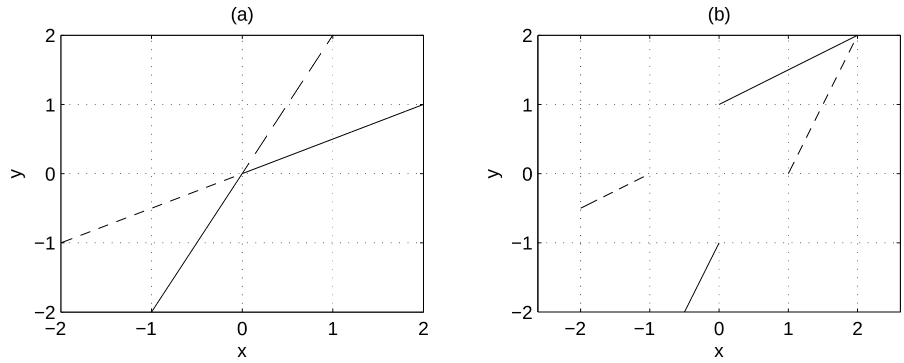

Figura 4.6: Vedi Esercizio 4.3.2.

(c) $f(x) = \operatorname{arctg}(2x - 1)$

(d) $f(x) = \log(2 + 3x)$.

Risposta. Vedi Figura 4.7. Le funzioni sono tutte invertibili perché strettamente monotone; si ha:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{\log y + 3}{2}$;

(b) $f : (-\infty, 1/2] \to [0, +\infty)$, $f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 1/2]$, $f^{-1}(y) = (1 - y^2)/2$;

(c) $f : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, $f^{-1} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \dfrac{\operatorname{tg} y + 1}{2}$;

(d) $f : (-2/3, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-2/3, +\infty)$, $f^{-1}(y) = \dfrac{e^y - 2}{3}$.

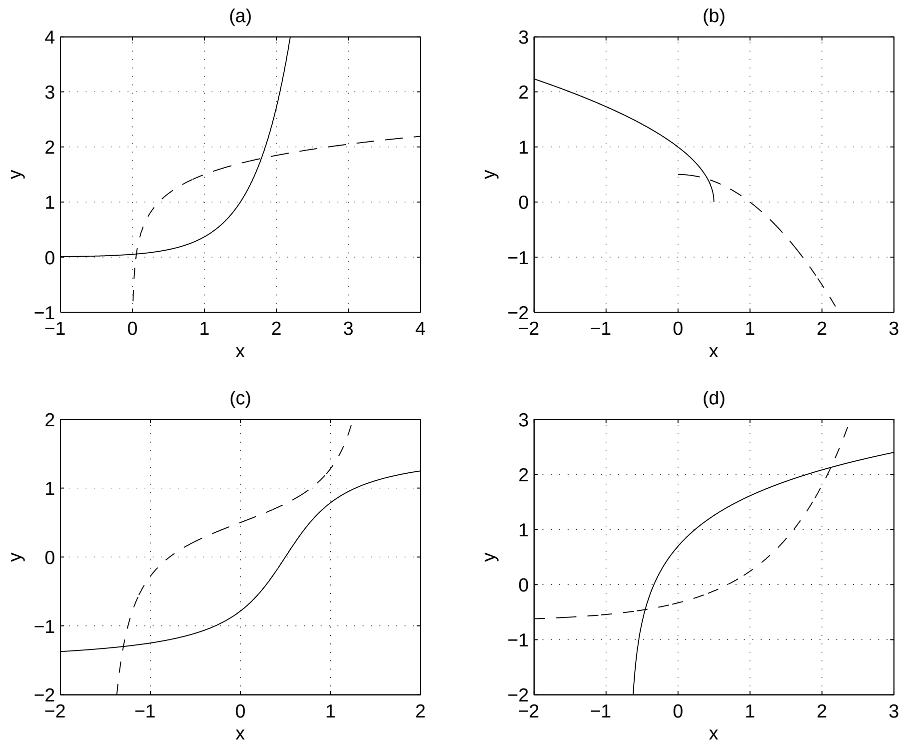

Figura 4.7: Vedi Esercizio 4.3.4.

4.3.5 Provare che le seguenti funzioni f sono invertibili e calcolare le loro funzioni inverse f^{-1}:

(a) $f(x) = -1 + \sqrt[5]{1 + x}$

(b) $f(x) = 1 - \sqrt[3]{1 - x}$

Esistono punti in cui i grafici di $x \to f(x)$ e $x \to f^{-1}(x)$ si intersecano? Se sì, quali? Disegnare i grafici di tutte le funzioni in modo approssimativo.

Risposta. Vedi Figura 4.8. Osserviamo che, se f è una funzione invertibile, il grafico di $f(x)$ e quello di $f^{-1}(x)$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo quadrante; i punti in cui i due grafici eventualmente si incontrano sono dunque sulla retta $y = x$.

(a) *Il dominio di f è $\mathbb{R}$; si tratta di una funzione strettamente crescente, dunque invertibile. Risolvendo $y = -1 + \sqrt[5]{1+x}$ rispetto a x si trova la sua funzione inversa $f^{-1}(y) = -1 + (y+1)^5$. Risolvendo il sistema $y = f(x)$, $y = x$ si trova $x = -1 + \sqrt[5]{1+x}$, dunque $x = -2, -1, 0$ sono le ascisse dei punti di interesezione.*

(b) *Il dominio di f è $\mathbb{R}$; si tratta di una funzione strettamente crescente, dunque invertibile. Risolvendo $y = 1 - \sqrt[3]{1-x}$ rispetto a x si trova $f^{-1}(y) = 1 - (1-y)^3$. Risolvendo $y = f(x)$, $y = x$ si trova $x = 1 - \sqrt[3]{1-x}$, dunque $x = 0, 1, 2$ sono le ascisse dei punti di interesezione.*

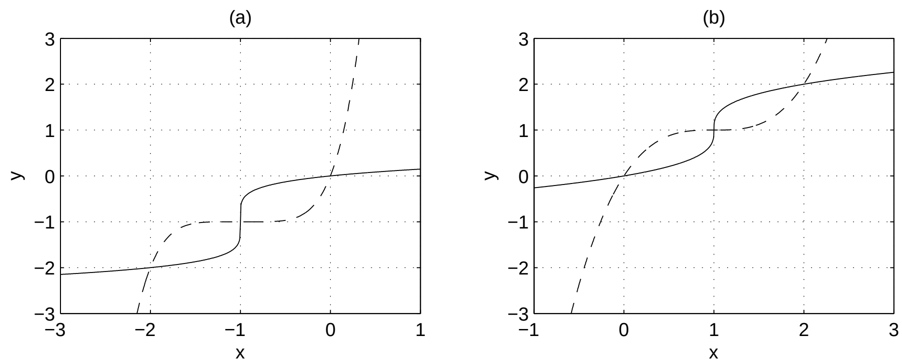

Figura 4.8: Vedi Esercizio 4.3.5.

4.4 Limiti

4.4.1 Calcolare, usando la definizione di limite e cercando un intorno centrato nel punto in cui si calcola il limite,

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{1}{x-2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}$.

Risposta.

(a) *Si ha $\lim_{x\to 5} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{3}$; per verificarlo, fissato $\epsilon > 0$ cerchiamo $\delta > 0$ tale che $\left|\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon$ se $x \in (5-\delta, 5+\delta)$, $x \neq 5$. Risolvendo la disequazione $\left|\frac{1}{x+2} - \frac{1}{3}\right| < \epsilon$, si ottiene $2 + \frac{3}{1+3\epsilon} < x < 2 + \frac{3}{1-3\epsilon}$, cioé $5 - \frac{9\epsilon}{1+3\epsilon} < x < 5 + \frac{9\epsilon}{1-3\epsilon}$. Poiché $\frac{9\epsilon}{1+3\epsilon} < \frac{9\epsilon}{1-3\epsilon}$ si sceglie $\delta = \frac{9\epsilon}{1+3\epsilon}$.*

(b) *Si ha $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$; procedendo come sopra, fissato $\epsilon > 0$ cerchiamo $\delta > 0$ tale che $\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$ se $x \in (1-\delta, 1+\delta)$, $x \neq 1$. Risolvendo $\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$, si ottiene $-1 + \frac{2}{1+2\epsilon} < x < -1 + \frac{2}{1-2\epsilon}$, cioé $1 - \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon} < x < 1 + \frac{4\epsilon}{1-2\epsilon}$. Poiché $\frac{4\epsilon}{1+2\epsilon} < \frac{4\epsilon}{1-2\epsilon}$ si sceglie $\delta = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$.*

4.4.2 Calcolare, usando la definizione di limite, il $\lim_{x\to 1+} \frac{x}{x-1}$.

Risposta. Proviamo che $\lim_{x\to 1+} \frac{x}{x-1} = +\infty$. Fissato infatti $M > 0$ cerchiamo δ in modo che $\frac{x}{x-1} > M$ se $1 < x < 1 + \delta$. Risolvendo la disuguaglianza $\frac{x}{x-1} > M$ si ottiene $1 < x < 1 + \frac{1}{M-1}$, da cui $\delta = \frac{1}{M-1}$.

4.4.3 Calcolare

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{1+x}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-e^x}$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{e^x - e}$

(e) $\lim_{x\to 1+} \frac{\log(\log x)}{\log^2 x}$.

Risposta.

(a) Per $x \to +\infty$, *è* $\frac{x \sin x}{1+x^2} \sim \frac{\sin x}{x}$, *e* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$;

(b) per $x \to +\infty$ *si ha* $\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{1+x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, *e* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$;

(c) poiché per $x \to 0$ *si ha* $1 - e^x \sim -x$, *è* $\frac{x^2}{1-e^x} \sim -x$, *dunque il limite vale zero;*

(d) introducendo il cambiamento di variabile $x - 1 = y$ *si ottiene*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{e(e^{x-1} - 1)} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(y+1)}{e(e^y - 1)}.$$

Ma poiché per $y \to 0$ *è* $\log(y+1) \sim y$ *ed* $e^y - 1 \sim y$, *si ha che* $\frac{\log(y+1)}{e(e^y-1)} \sim \frac{1}{e}$, *ed il limite vale* $\frac{1}{e}$;

(e) il numeratore tende a $-\infty$ *mentre il denominatore tende a* 0 *per valori positivi; dunque il limite vale* $-\infty$.

4.4.4 Calcolare i limiti

(a) $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \log(\sqrt{x})$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\sin(1-x)}$

(c) $\lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}$

(d) $\lim_{x\to -\infty} x^4 e^x$

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{2\log x}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg} x}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\log(1-2x)}$

(h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$.

Risposta.

(a) Posto $\sqrt{x} = y$, *si ottiene* $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\log(\sqrt{x}) = \lim_{y\to 0+} y \log y = 0$;

(b) posto $y = 1 - x$, *si ottiene* $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{\sin(1-x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{\sin y} = \lim_{y\to 0} y = 0$;

(c) poichè per $x \to 0$ *è* $\operatorname{tg} x \sim x$, *si ha* $\lim_{x\to 0-} \frac{\operatorname{tg} x}{x^2} = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$;

(d) posto $-x = y$ *si ottiene* $\lim_{x\to-\infty} x^4 e^x = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^4}{e^y} = 0$;

(e) posto $x - 1 = y$, *si ha*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{2\log x} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{2\log(1+y)} = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{2y} = -\frac{1}{2};$$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\arccos\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arctg} x}=\frac{\arccos 0}{\pi/2}=\frac{\pi/2}{\pi/2}=1;$

(g) *poiché per* $x\to 0$ *si ha* $e^{3x}-1\sim 3x$ *e* $\log(1-2x)\sim -2x$, *il limite vale* $-\dfrac{3}{2}$;

(h) *posto* $x-\pi/2=y$, *si ha*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\cos(y+\pi/2)}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-\sin y}=-1.$$

4.4.5 Calcolare

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[4]{x^4+x}\right)$;

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-\sqrt[3]{x^3+x}\right)$.

Risposta.

(a) *Si ha:*

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[4]{x^4+x} &= x\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}-\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{1/4}\right]\\ &\sim x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{4x^3}\right)\right]=1-\frac{1}{4x^2}\to 1\,;\end{aligned}$$

(b) *analogamente:*

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3-2x^2}-\sqrt[3]{x^3+x} &= x\left[\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}\right]\\ &\sim x\left[\left(1-\frac{2}{3x}\right)-\left(1+\frac{1}{3x^2}\right)\right]=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3x}\to-\frac{2}{3}\,.\end{aligned}$$

4.4.6 Provare che le funzioni definite qui sotto non hanno limite per $x\to+\infty$:

(a) $\dfrac{1}{2+\sin x}$

(b) $\log x\cdot\sin x$

(c) $x^2\sin x$

(d) $\cos^2 x$.

Risposta.

(a) *Si consideri la successione* $x_n=(2n+1)\pi/2$;

(b) *si consideri la successione* $x_n=n\pi/2$;

(c) *si consideri la successione* $x_n=(2n+1)\pi/2$;

(d) *si consideri la successione* $x_n=n\pi/2$.

4.4.7 Calcolare i seguenti limiti destro e sinistro:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm}\frac{\sin x}{\log(1+x^2)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm} xe^{1/x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm}\frac{\operatorname{arctg}(1/x)}{x^2}$.

Risposta.

(a) *Per* $x\to 0\pm$ *è* $\sin x\sim x$, $\log(1+x^2)\sim x^2$, *perciò si ha* $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm}\frac{\sin x}{\log(1+x^2)}=\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{x}=\pm\infty$;

(b) Con il cambiamento di variabile $x - \frac{\pi}{2} = y$ *si ha*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos^2 x} = \lim_{y\to 0\pm} \frac{y}{\cos^2(y+\pi/2)} = \lim_{y\to 0\pm} \frac{y}{\sin^2 y} = \lim_{y\to 0\pm} \frac{1}{y} = \pm\infty;$$

(c) Posto $\frac{1}{x} = y$*, si ottiene* $\lim_{y\to\pm\infty} \frac{e^y}{y}$*. È* $\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$*,* $\lim_{y\to-\infty} \frac{e^y}{y} = 0$*;*

(d) Per $x \to 0\pm$*,* $\operatorname{arctg}(1/x) \to \pm\pi/2$*, mentre* $\frac{1}{x^2} \to +\infty$*, perciò* $\lim_{x\to 0\pm} \operatorname{arctg}(1/x)\cdot\frac{1}{x^2} = \pm\infty$*.*

4.4.8 Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{1-e^{3x}}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{|1-e^{3x}|}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(1+x^2)}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - \sin x}{x^2 - x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x}$

(g) $\lim_{x\to 0^+} x e^{1/x}$

(h) $\lim_{x\to 0\pm} \operatorname{arctg}(e^{\frac{1}{x}})$.

Risposta.

(a) Si ha $\frac{\sin(2x)}{1-e^{3x}} \sim -\frac{2}{3}$*, perciò il limite vale* $-2/3$*;*

(b) poiché

$$|1-e^{3x}| = \begin{cases} 1-e^{3x} & \textit{se } x \le 0 \\ e^{3x}-1 & \textit{se } x > 0 \end{cases}$$

il limite destro vale $-2/3$*, quello sinistro* $2/3$*; dunque il limite non esiste;*

(c) per $x \to 0$ *è* $\frac{e^x(1-e^x)}{x} \sim -e^x$*, perciò il limite vale* -1*;*

(d) si ha $\frac{x}{\log(1+x^2)} \sim \frac{1}{x}$*, perciò il limite non esiste;*

(e) $\frac{\sin x^2 - \sin x}{x^2 - x} = \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot\frac{x}{x-1} - \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}$*, dunque il limite vale 1;*

(f) i limiti destro e sinistro valgono rispettivamente ± 1*, quindi il limite non esiste;*

(g) posto $y = 1/x$ *si ottiene*

$$\lim_{x\to 0^+} x e^{1/x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty\,;$$

(h) con i cambiamenti di variabili $y = 1/x$ *e quindi* $z = e^y$ *si ha*

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg}(e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg}(e^y) = \lim_{z\to+\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2}\,;$$

analogamente, posto $y = 1/x$*, per la continuità delle funzioni esponenziale ed arcotangente si ha*

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg}(e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arctg}(e^y) = 0\,.$$

4.4.9 Trovare un asintotico per $x \to 0+$ della funzione $\frac{\sqrt{x}}{x + \operatorname{tg}\sqrt[3]{x}}$.

Risposta. Per $x \to 0$ *è* $x + \operatorname{tg}\sqrt[3]{x} \sim x + \sqrt[3]{x} \sim \sqrt[3]{x}$*, dunque un asintotico è* $\sqrt{x}/\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x}$*.*

4.4.10 Calcolare il $\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{x}}$; dedurre il $\lim_{x\to 0+} x^{-\frac{1}{x}}$.

Risposta. Poiché $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log x}{x}}$ *e* $\lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{x} = -\infty$ *si ha* $\lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{x}} = 0$*. Infine* $x^{-\frac{1}{x}} = 1/x^{\frac{1}{x}}$*; dal limite precedente e dal fatto che la funzione* $x^{\frac{1}{x}}$ *è positiva se* $x > 0$ *si ha* $\lim_{x\to 0+} x^{-\frac{1}{x}} = +\infty$*.*

4.4.11 Calcolare $\lim_{x\to 0+} (2x)^{3\sqrt{x}}$.

Risposta. Si ha $(2x)^{3\sqrt{x}} = e^{3\sqrt{x}\log(2x)}$*; poiché* $\lim_{x\to 0+} 3\sqrt{x}\log(2x) = 0$*, si ha* $\lim_{x\to 0+}(2x)^{3\sqrt{x}} = 1$ *per la continuità della funzione esponenziale.*

4.4.12 Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)^{3x^2}$.

Risposta. Si può scrivere $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x^2}\right)^{2x^2}\right]^{3/2}$*, e ponendo* $2x^2 = y$ *si ricava*

$$\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{3/2} = e^{3/2} = e\sqrt{e}.$$

4.4.13 Calcolare i due limiti $\lim_{x\to 0\pm}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

Risposta. Posto $y = 1/x$ *si ha*

$$\lim_{x\to 0\pm}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{y\to\pm\infty}\frac{y}{e^y} = \begin{cases}\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} = 0\\ \lim_{y\to-\infty}\frac{y}{e^y} = -\infty\end{cases}$$

e in conclusione

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -\infty\,.$$

4.5 Asintoti

4.5.1 Calcolare, se esistono, le equazioni degli asintoti a $\pm\infty$ delle funzioni

(a) $\dfrac{3x^2+1}{1-x}$

(b) $\dfrac{x^2+e^{-x}}{2x+3}$

(c) $\dfrac{x^2-1}{\log|x|-2x}$

(d) $\dfrac{x-x^{1/3}}{1+e^x}$.

Risposta.

(a) La funzione non ammette asintoti orizzontali, ma ammette un asintoto obliquo a $\pm\infty$ *di equazione* $y = -3x-3$*;*

(b) la funzione non ammette asintoti orizzontali, ma ammette (solo a $+\infty$*) un asintoto obliquo di equazione* $y = 1/2x - 3/4$*;*

(c) non esistono asintoti orizzontali né obliqui;

(d) la funzione ammette un asintoto orizzontale $y = 0$ *per* $x \to +\infty$*, mentre non esistono asintoti orizzontali né asintoti obliqui per* $x \to -\infty$*.*

4.5.2 Scrivere il dominio della funzione $f(x) = x - 2 - \sqrt{x^2-2x}$; dire poi se f ha asintoti e, in caso affermativo, calcolarli.

Risposta. Posto $x^2 - 2x \geq 0$ *si trova che il dominio di* f *è* $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$*.*

Non vi sono asintoti verticali. Asintoti orizzontali:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{4-2x}{x-2+\sqrt{x^2-2x}} = -1\\ \lim_{x\to-\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty\,;\end{aligned}$$

pertanto la retta $y = -1$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$ mentre non vi sono asintoti orizzontali a $-\infty$. Per quanto riguarda gli asintoti obliqui

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2-\sqrt{x^2-2x}}{x} &= 2 \\
\lim_{x\to-\infty} \left(x-2-\sqrt{x^2-2x}-2x\right) &= -\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2-2x}\right) \\
&= -\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2-2x}\right)\cdot\frac{x+2-\sqrt{x^2-2x}}{x+2-\sqrt{x^2-2x}} \\
&= -\lim_{x\to-\infty}\frac{6x+4}{2x} = -3\,;
\end{aligned}$$

perciò la retta $y = 2x-3$ è un asintoto obliquo a $-\infty$. Si noti che il limite $\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\sqrt{x^2-2x}\right)$ poteva essere calcolato sfruttando l'asintotico $(1+y)^\alpha \sim 1+\alpha y$ per $y \to 0$. Infatti allora

$$x+2+\sqrt{x^2-2x} \sim x+2-x\left(1-\frac{1}{2}\frac{2}{x}\right) = 3.$$

4.5.3 Dire se la funzione $f(x) = x(1+e^{-x}) + \log x$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Risposta. Si ha $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$, ma $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} + \lim_{x\to+\infty}\log x = +\infty$. Dunque l'asintoto obliquo non esiste.

4.6 Altri esercizi

4.6.1 Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false:

(a) ogni funzione continua è monotona;

(b) ogni funzione continua è limitata;

(c) i limiti di ogni funzione continua esistono finiti.

Risposta.

(a) Falso: si consideri $f(x) = \sin x$;

(b) falso: si consideri $f(x) = e^x$;

(c) falso: $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

4.6.2 Vero o falso?

(a) Ogni funzione periodica è limitata;

(b) ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari ha limite in 0.

Risposta.

(a) Falso: si consideri la funzione $\operatorname{tg} x$;

(b) falso: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è pari ma non ha limite per $x \to 0$.

4.6.3 Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Risposta. Dalla formula $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, per $x \to 0$, segue che

$$1-\cos\frac{1}{n} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2} \text{ per } n \to \infty;$$

la serie data converge perché equivale asintoticamente a $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Capitolo 5

Calcolo differenziale

5.1 Derivate

5.1.1 Calcolare le derivate delle funzioni

(a) $\log^3(1+x^2)$

(b) $\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$

(c) $\sin^2(3-2x)$

(d) $\dfrac{e^x}{\log x}$

(e) $\cos^3(1-x^2)$

(f) $\dfrac{\log x}{1-x^2}$

(g) e^{x-x^2}

(h) $\dfrac{x}{1+\sin x}$.

Risposta.

(a) $\left(\log^3(1+x^2)\right)' = \dfrac{6x\log^2(1+x^2)}{1+x^2};$

(b) $\left(\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}\right)' = \dfrac{\operatorname{tg} x - x(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x};$

(c) $\left(\sin^2(3-2x)\right)' = -4\sin(3-2x)\cos(3-2x);$

(d) $\left(\dfrac{e^x}{\log x}\right)' = e^x \cdot \dfrac{x\log x - 1}{x\log^2 x};$

(e) $\left(\cos^3(1-x^2)\right)' = 6x\cos^2(1-x^2)\sin(1-x^2);$

(f) $\left(\dfrac{\log x}{1-x^2}\right)' = \dfrac{1-x^2+2x^2\log x}{x(1-x^2)^2};$

(g) $\left(e^{x-x^2}\right)' = e^{x-x^2}(1-2x);$

(h) $\left(\dfrac{x}{1+\sin x}\right)' = \dfrac{1+\sin x - x\cos x}{(1+\sin x)^2}.$

5.1.2 Calcolare

(a) $D\left(x\operatorname{tg}(1+x^2)\right)$

(b) $D\Big(\arcsin(1+3x^3)\Big)$

(c) $D\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\cos^2 x}\right)$

(d) $D\Big(\log\big(\log(x+1)\big)\Big)$

Risposta.

(a) $D\left(x\,\mathrm{tg}(1+x^2)\right) = \mathrm{tg}(1+x^2) + 2x^2(1+\mathrm{tg}^2(1+x^2))$;

(b) $D\Big(\arcsin(1+3x^3)\Big) = \dfrac{9x^2}{\sqrt{1-(1+3x^3)^2}}$;

(c) $D\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\cos^2 x}\right) = -\dfrac{\cos x(2+\sin x)}{\sin^3 x}$;

(d) $D\Big(\log\Big(\log(x+1)\Big)\Big) = \dfrac{1}{(x+1)\log(x+1)}$.

5.1.3 Calcolare

(a) $D\left(2^{x^2}\right)$

(b) $D\dfrac{x}{\log^2 x}$

(c) $D\left(x^{2\sin x}\right)$

(d) Dx^{2^x}

(e) $D\left[2^{3^x}\right]$

(f) $D\left[(\log x)^{\log x}\right]$

(g) $D\sin\left(e^{-x}\right)$.

Risposta.

(a) $D\left(2^{x^2}\right) = 2^{x^2}\log 2\cdot 2x$;

(b) $D\dfrac{x}{\log^2 x} = \dfrac{\log x - 2}{\log^3 x}$;

(c) $D\left(x^{2\sin x}\right) = x^{2\sin x}\left(2\cos x\log x + 2\dfrac{\sin x}{x}\right)$;

(d) $Dx^{2^x} = x^{2^x}\left(2^x\log 2\log x + \dfrac{2^x}{x}\right)$;

(e) $D\left[2^{3^x}\right] = 2^{3^x}3^x\log 2\log 3$;

(f) $D\left[(\log x)^{\log x}\right] = (\log x)^{\log x}\dfrac{\log(\log x)+1}{x}$;

(g) $D\sin\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}\cos e^{-x}$.

5.1.4 Provare che per $x\in(0,1)$ vale $D\left[\dfrac{\mathrm{tg}(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\right] = -\dfrac{1}{x^2}$.

Risposta. Per $x\in(0,1)$ *si ha*

$$\mathrm{tg}(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

dunque $f(x) = \frac{1}{x}$, *da cui il risultato.*

5.2 Rette tangenti

5.2.1 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa specificato:

(a) $f(x) = e^{-x^2}$, $x=-1$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x=0$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,x}$, $x=\pi/4$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\log x}$, $x=e$.

Risposta. Ricordando che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione $f(x)$ nel punto di ascissa x_0 è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, si ricava:

(a) $y = 2x/e + 3/e$;

(b) $y = x + 1$;

(c) $y = -2x + \pi/2 + 1$;

(d) $y = 2 - x/e$.

5.2.2 Dire se le seguenti funzioni f sono derivabili nei punti di cui è indicata sotto l'ascissa; scrivere, se esiste, l'equazione della retta tangente in tali punti:

(a) $f(x) = \sqrt{3x-1}$, nei punti $1, \dfrac{1}{3}$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$, nei punti $-1, 1$.

Risposta.

(a) In 1 la funzione f è derivabile e in 1 la sua derivata $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ vale $3\sqrt{2}/4$; l'equazione della retta tangente è dunque $y - \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}(x-1)$. Nel punto $\frac{1}{3}$ la funzione non è derivabile: si tratta di un punto a tangente verticale.

(b) In 1 la funzione f è derivabile e in 1 la sua derivata $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ vale $\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$; l'equazione della retta tangente è dunque $y - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}(x-1)$. Nel punto -1 la funzione non è derivabile: si tratta di un punto di flesso a tangente verticale.

5.2.3 Nell'intervallo $(0, +\infty)$ si considerino le funzioni $f(x) = \log x$ e $g(x) = \operatorname{arctg} x$. Dire se vi è un punto x_0 in cui le rette tangenti ai grafici di f e g in $\big(x_0, f(x_0)\big)$, rispettivamente $\big(x_0, g(x_0)\big)$, sono parallele.

Risposta. La tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha coefficiente angolare $f'(x_0) = 1/x_0$, quella al grafico di g in $(x_0, f(x_0))$ ha coefficiente angolare $g'(x_0) = 1/(1 + x_0^2)$. Le due rette sono parallele quando $\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{1+x_0^2}$, cioè $x_0^2 - x_0 + 1 = 0$. Tale equazione non ammette soluzioni reali perché il suo discriminante Δ è negativo; dunque non esiste il punto x_0 cercato.

5.2.4 Si considerino le funzioni $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = x^3$. Dire per quale $x_0 \in \mathbb{R}$ le rette tangenti ai grafici di f, g nei punti $(x_0, f(x_0))$, rispettivamente $(x_0, g(x_0))$, sono perpendicolari tra loro.

Risposta. La tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha coefficiente angolare $f'(x_0) = 4x_0$, quella al grafico di g in $(x_0, g(x_0))$ ha coefficiente angolare $g'(x_0) = 3x_0^2$. Le due rette sono perpendicolari quando $4x_0 \cdot 3x_0^2 = -1$, cioè $x_0 = -1/\sqrt[3]{12}$.

5.2.5 Si consideri la funzione $f(x) = x^3$. Dire in che punto x_0 dell'intervallo $[0, 1]$ la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha pendenza 1. Scrivere l'equazione di tale retta tangente.

Risposta. Il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $(x, f(x))$ è $f'(x) = 3x^2$. Si ha $f'(x) = 1$ se $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; pertanto $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Nel punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ la retta tangente ha equazione $y = x - \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

5.2.6 Si consideri la funzione $f(x) = x^2$ in $[0, +\infty)$; scrivere l'equazione della retta tangente al grafico nel generico punto $(x_0, f(x_0))$; scrivere l'equazione della perpendicolare a tale retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$; determinare il punto x_0 in modo che i punti di intersezione di tali rette con l'asse x siano simmetrici rispetto a x_0.

Risposta. L'equazione della retta $\mathcal{T}$ tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è $y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0)$. L'equazione della perpendicolare $\mathcal{N}$ è $y = x_0^2 - \frac{1}{2x_0}(x - x_0)$. La retta $\mathcal{T}$ interseca l'asse x in $x_0 - \frac{x_0}{2}$, mentre $\mathcal{N}$ interseca l'asse x in $x_0 + 2x_0^3$. Tali punti sono simmetrici rispetto al punto x_0 se $\frac{x_0}{2} = 2x_0^3$, cioè se $x_0 = \frac{1}{2}$.

5.3 Derivate formali

5.3.1 Calcolare formalmente

(a) $D\dfrac{1}{f\big(g(x)\big)}$

(b) $D\left(f(x)^{g(x)}\right)$

(c) $D\dfrac{1}{f(x)g^2(x)}$

(d) $D\left(f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)\right)$.

Risposta.

(a) $D\dfrac{1}{f\Big(g(x)\Big)} = -\dfrac{f'(g(x))\cdot g'(x)}{f^2(g(x))}$;

(b) $D\left(f(x)^{g(x)}\right) = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right)$;

(c) $D\dfrac{1}{f(x)g^2(x)} = -\dfrac{f'(x)g(x)+2f(x)g'(x)}{f^2(x)g^3(x)}$;

(d) $D\left(f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)\right) = -f'\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)\cdot\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$.

5.3.2 Calcolare

(a) $D\Big(f(1+x+g(x))\Big)$

(b) $D\Big(f(1+x)\cdot g(1-x)\Big)$

(c) $D\Big(f\big(g(x)-g(x+1)\big)\Big)$

(d) $D\Big(f\left(xg(x)\right)\Big)$.

Risposta.

(a) $D\Big(f(1+x+g(x))\Big) = f'(1+x+g(x))\cdot(1+g'(x))$;

(b) $D\Big(f(1+x)\cdot g(1-x)\Big) = f'(1+x)\cdot g(1-x) - f(1+x)g'(1-x)$;

(c) $D\Big(f\big(g(x)-g(x+1)\big)\Big) = f'\left(g(x)-g(x+1)\right)\cdot(g'(x)-g'(x+1))$;

(d) $D\Big(f\left(xg(x)\right)\Big) = f'(xg(x))\cdot(g(x)+xg'(x))$.

5.3.3 Calcolare $D\left(f(x)^{g(x)h(x)}\right)$.

Risposta. $D\left(f(x)^{g(x)h(x)}\right) = f(x)^{g(x)h(x)}\left\{\Big(g'(x)h(x)+g(x)h'(x)\Big)\log f(x) + g(x)h(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right\}$.

5.4 Derivazione delle funzioni inverse

5.4.1 Dire se la funzione $f(x) = x^3e^x$ è invertibile in $\mathbb{R}$. In caso negativo specificare in quali intervalli la sua restrizione lo è.

Risposta. Sia ha $f'(x) = x^2e^x(x+3)$. La funzione f non è monotona in $\mathbb{R}$ e pertanto non è invertibile in $\mathbb{R}$. E' invece invertibile la sua restrizione all'intervallo $(-\infty,-3]$, in quanto f è ivi strettamente decrescente, e la restrizione all'intervallo $[-3,+\infty)$, in cui f è strettamente crescente.

5.4.2 Si consideri la funzione $f(x) = xe^{-x}$.

(a) Disegnare il grafico di f.

(b) In quali intervalli è invertibile?

(c) Provare in particolare che f è invertibile in 0 e calcolare la derivata della funzione inversa $f^{-1}(y)$ nel punto $y = f(0)$.

Risposta. Vedi Figura 5.2. La funzione è invertibile negli intervalli $(-\infty,1]$, e $[1,+\infty)$ perché in essi è rispettivamente monotona crescente, decrescente; in particolare, siccome $f^{-1}(0) = 0$, si ha $\left(f^{-1}\right)'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.

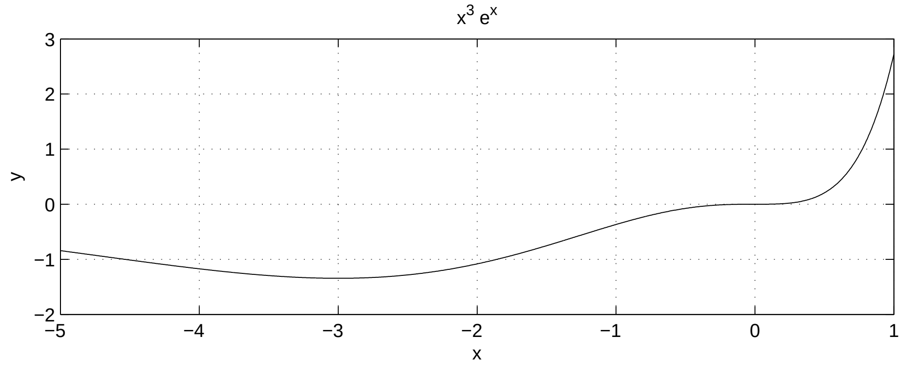

Figura 5.1: Vedi Esercizio 5.4.1.

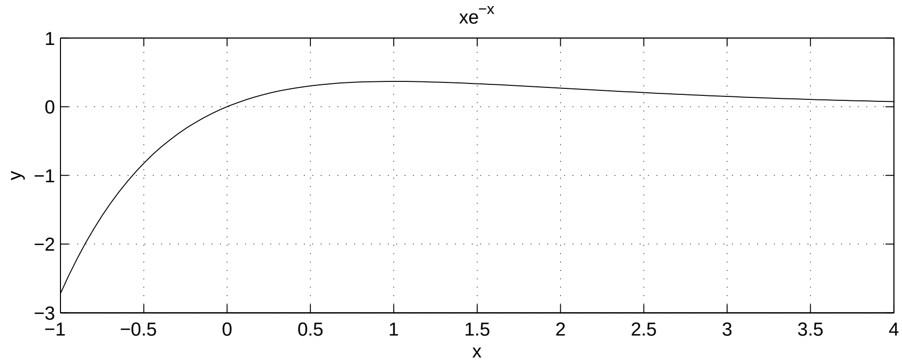

Figura 5.2: Vedi Esercizio 5.4.2.

5.4.3 Si consideri la funzione $f(x) = x^3 + x$. Provare che è invertibile. Indicata con $f^{-1}(y)$ la funzione inversa, dire dove essa è derivabile e calcolare poi $f^{-1}(2)$, $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

Risposta. Siccome $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, la funzione $f(x)$ è monotona crescente su tutto $\mathbb{R}$, dunque è invertibile. La funzione $f^{-1}(y)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, poiché $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, $x = f^{-1}(y)$ ed $f'(x)$ non possiede zeri. Per calcolare $f^{-1}(2)$ si dovrà risolvere l'equazione $x^3 + x - 2 = 0$, la quale ha come unica soluzione $x = 1$. Dunque è $f^{-1}(2) = 1$, ed $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$.

5.4.4 Si considerino le seguenti funzioni f; determinare il loro dominio, motivare la loro invertibilità, calcolare $(f^{-1})'(y_0)$ nei punti y_0 indicati:

(a) $f(x) = \log x + e^{x^2}$, $y_0 = f(1)$

(b) $f(x) = e^x + \sqrt{x+1}$, $y_0 = f(1)$.

Risposta.

(a) Il dominio di f è $(0, +\infty)$; $f'(x) = \frac{1}{x} + 2xe^{x^2} > 0$, dunque f è strettamente monotona e perciò invertibile. Infine

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1+2e}\,.$$

(b) Il dominio di f è $[-1, +\infty)$; $f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$, dunque f è strettamente monotona e perciò invertibile. Infine

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e + \frac{1}{2\sqrt{2}}}\,.$$

5.4.5 Provare che la funzione $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ è invertibile e calcolare $(f^{-1})'(0)$.

Risposta. Si ha $f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0$; dunque f è strettamente crescente, dunque invertibile. Inoltre $f(x) = 0$ se e soltanto se $x = 0$. Perciò

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}\,.$$

5.5 Funzioni derivabili e non derivabili

5.5.1 Dire in che punti le funzioni definite qui sotto non sono derivabili, motivando la risposta:

(a) $\sin|x|$

(b) $\sqrt[3]{x-1}$

(c) $x|x-1|$

(d) $|\sin x|$.

Risposta.

(a) Non è derivabile in $x=0$ perché $D(\sin|x|)=\cos|x|\cdot D(|x|)$, e $|x|$ ha in zero un punto angoloso;

(b) non è derivabile in $x=1$, perché la funzione $\sqrt[3]{y}$ ha in $y=0$ un flesso a tangente verticale;

(c) non è derivabile in $x=1$ perché $|y|$ ha in zero un punto angoloso;

(d) non è derivabile nei punti $x=k\pi$, $k\in Z$, cioé negli zeri della funzione $y=\sin x$, dove si hanno infiniti punti angolosi.

5.5.2 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni; dire in quali punti sono continue e in quali sono derivabili:

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x<-1\\ x^2 & \text{se } -1\le x<1\\ 1 & \text{se } x\ge 1\ ,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}x+1 & \text{se } x\le -1\\ 0 & \text{se } -1\le x<1\\ x & \text{se } x\ge 1\ .\end{cases}$$

Risposta. Vedi Figura 5.3. La funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$ e derivabile per ogni $x\neq\pm1$; i punti $x=\pm1$ sono punti angolosi. La funzione g è continua per ogni $x\neq 1$ e derivabile per ogni $x\neq\pm1$; il punto $x=-1$ è un punto angoloso.

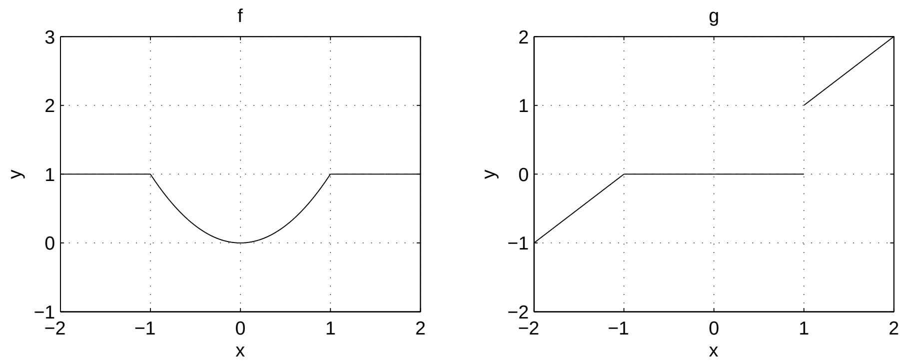

Figura 5.3: Vedi Esercizio 5.5.2.

5.5.3 Studiare continuità e derivabilità delle funzioni

(a) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } x\ge 0\\ x^3 & \text{se } x<0\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{se } x\ge 0\\ x+1 & \text{se } x<0\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{se } x\ge 0\\ 1 & \text{se } x<0\,.\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x\le 0\,.\end{cases}$

Risposta. Tutte le funzioni sono continue e derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ perché le loro restrizioni a $(0,+\infty)$ e $(-\infty,0)$ lo sono; Rimane da considerare il solo punto 0.

(a) La funzione f è continua in 0 poiché $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=0$. Considerando poi i limiti dei rapporti incrementali $\lim_{h\to0\pm}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ si trova che $f'_+(0)=f'_-(0)=0$, dunque f è derivabile in 0 con $f'(0)=0$.

(b) *La funzione f è continua in 0 poiché $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 1$. Procedendo come sopra si trova che $f'_+(0) = 0 \neq 1 = f'_-(0)$; dunque f non è derivabile in 0, e 0 è un punto angoloso.*

(c) *La funzione f è continua in 0 poiché $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 1$. Inoltre $f'_+(0) = 1 \neq 0 = f'_-(0)$; dunque f non è derivabile in 0, essendo 0 un punto angoloso.*

(d) *La funzione f è continua in 0: $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = 0$. Inoltre $f'_+(0) = 0 = f'_-(0)$; dunque f è derivabile in 0, con $f'(0) = 0$.*

5.5.4 Si consideri la funzione $f(x) = \operatorname{cotg}(\arcsin x)$. Stabilire il dominio, discutere la derivabilità, calcolare la derivata.

Risposta. La funzione è definita per gli $x \in [-1, 1]$ tali che $\arcsin x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; il dominio è dunque $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$. In D si ha

$$\operatorname{cotg}(\arcsin x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{se } x \in (0, 1] \\ -\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{se } x \in [-1, 0)\,. \end{cases}$$

Pertanto, per $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x \in (0, 1) \\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} & \text{se } x \in (-1, 0)\,. \end{cases}$$

5.5.5 Dare un esempio di una:

(a) funzione continua con un punto angoloso in $x = 1$;

(b) funzione convessa se $x < 0$ e concava se $x > 0$;

(c) funzione continua in $(0, 1)$ non limitata;

(d) funzione definita in $\mathbb{R}$ concava e negativa.

Risposta.

(a) *Si prenda ad esempio $f(x) = |x - 1|$;*

(b) *si prenda ad esempio $f(x) = \operatorname{arctg} x$;*

(c) *si prenda ad esempio $f(x) = 1/x$;*

(d) *si prenda ad esempio $f(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.*

5.5.6 Dare un esempio di una funzione continua in $(-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$, discontinua in 0, non derivabile nei punti ± 1.

Risposta. Vedi Figura 5.4. Si prenda ad esempio $f(x) = |x - 1| \cdot |x + 1| + \operatorname{sgn} x$.

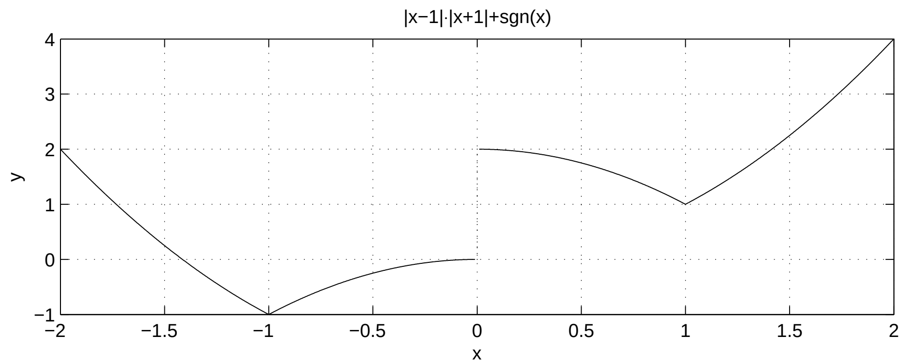

Figura 5.4: Vedi Esercizio 5.5.6.

5.5.7 Disegnare il grafico di una funzione f con $f > 0$, $f'(0) < 0$, $f'(1) > 0$. Scrivere una espressione analitica di una tale funzione.

Risposta. Si prenda ad esempio $f(x) = x^2 - x + 1$.

5.5.8 Disegnare il grafico di una funzione f concava, negativa, crescente. Scrivere una espressione analitica di una tale funzione.

Risposta. Basta prendere $f(x) = -e^{-x}$.

5.5.9 Si considerino le funzioni f, g definite da:

(a) $f(x) = \begin{cases} ae^{-bx} & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

(b) $g(x) = \begin{cases} a + \sin bx & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases}$

dove $a,\ b \in \mathbb{R}$. Dire per quali a, b le funzioni f, g sono

- continue
- derivabili
- derivabili 2 volte.

Risposta. Entrambe le funzioni sono infinitamente derivabili in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. *Dobbiamo pertanto studiare soltanto il loro comportamento in* $x = 0$.

(a) Poiché $f_+(0) = a$, $f_-(0) = 1$, *la funzione* f *è continua solo se* $a = 1$ *e per ogni valore di* b *; poiché* $f'_+(0) = -b$, $f'_-(0) = 0$, *è derivabile se inoltre* $b = 0$ *; pioché* $f''_+(0) = 0$, $f''_-(0) = 2$, *non è derivabile 2 volte per nessun* a, b *;*

(b) $f_+(0) = a$, $f_-(0) = 1$, *quindi* g *è continua solo se* $a = 1$ *e per ogni valore di* b*;* $f'_+(0) = b$, $f'_-(0) = 0$, *quindi* g *è derivabile se inoltre* $b = 0$*;* $f''_+(0) = 0$, $f''_-(0) = 2$, *quindi* g *non è derivabile 2 volte per nessun* a, b.

5.6 Calcolo di limiti con la regola di de l'Hospital

5.6.1 Calcolare

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x - 3^x}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + e^{2x}) - \log 2}{3x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \cdot (\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2})$.

Risposta.

(a) Il limite si presenta nella forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$*; applichiamo la regola di de l'Hospital e troviamo*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^x \log 2 - 3^x \log 3}{1} = \log 2 - \log 3.$$

(b) Il limite è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$*; applichiamo la regola di de l'Hospital e troviamo*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + e^{2x}) - \log 2}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

(c) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$*; portando il fattore* x *a denominatore e applicando la regola di de l'Hospital si ha:*

$$\lim_{x\to +\infty} x \cdot (\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{1 + x^2} = -1\,.$$

5.6.2 Calcolare

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x - \log(x + 1)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - (1 + x)^2}{x^2}$.

Risposta. Entrambi i limiti sono nella forma indeterminata $0/0$*, le formule asintotiche al primo ordine non sono direttamente applicabili in quanto siamo in presenza di differenze (e non di prodotti o quozienti). Applicando due volte la regola di de l'Hospital si ottiene* *(a)* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x - \log(x+1)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\cos x - \frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2}{-\sin x + \frac{1}{(x+1)^2}} = 2$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - (1+x)^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - (1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2e^{2x} - 1 = 1.$

5.6.3 Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0+} \dfrac{x^x - 1}{x}$.

Risposta. Applicando la regola di de l'Hospital e ricordando che $x^x = e^{x\log x}$ si ottiene

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^x (\log x + 1) = -\infty.$$

5.7 Studi di funzione

5.7.1 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

(a) $\dfrac{1}{x^2 e^x}$

(b) $\dfrac{x-1}{e^{2x}}$

(c) $x^2 e^x$

(d) $(x-1)e^{2x}$.

Risposta. Vedi Figura 5.5.

(a) La funzione è definita per ogni $x \neq 0$; la retta $x = 0$ è asintoto verticale; per $x \to +\infty$, l'asintoto orizzontale è $y = 0$, per $x \to -\infty$ non ci sono asintoti; in $x = -2$ c'è un minimo, il minimo vale $e^2/4$; la funzione è convessa, non ci sono punti di flesso;

(b) la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$; per $x \to +\infty$, l'asintoto orizzontale è $y = 0$, per $x \to -\infty$ non ci sono asintoti; in $x = 3/2$ c'è un massimo, il massimo vale $\dfrac{1}{2e^3}$; in $x = 2$ c'è un flesso;

(c) la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$; per $x \to -\infty$, l'asintoto orizzontale è $y = 0$, per $x \to +\infty$ non ci sono asintoti; in $x = -2$ c'è un massimo, il massimo vale $4/e^2$; il punto $x = 0$ è di minimo; i punti $x = -2 \pm \sqrt{2}$ sono di flesso;

(d) la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$; per $x \to -\infty$, l'asintoto orizzontale è $y = 0$, per $x \to +\infty$ non ci sono asintoti; in $x = 1/2$ c'è un minimo, il minimo vale $-1/2e$; il punto $x = 0$ è di flesso.

5.7.2 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

(a) $e^{2x} - e^x$

(b) $x^2 - \log x$

(c) $\log(x+1) - x$

(d) $\operatorname{arctg}(1-x)$.

Risposta. Vedi Figura 5.6.

(a) Dominio: $\mathbb{R}$; asintoti: $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$; estremi: $x = -\log 2$ punto di minimo; flessi: $x = -\log 4$; la funzione è convessa per $x > -\log 4$, concava per $x < -\log 4$;

(b) dominio: $]0, +\infty[$; asintoti: $x = 0$ asintoto verticale, non ci sono asintoti orizzontali o obliqui; estremi: $x = \sqrt{2}/2$ punto di minimo; la funzione è sempre convessa;

(c) dominio: $]-1, +\infty[$; asintoti: $x = -1$ asintoto verticale, non ci sono asintoti orizzontali o obliqui; estremi: $x = 0$ punto di massimo; la funzione è sempre concava;

(d) dominio: $\mathbb{R}$; asintoti: $y = \mp\pi/2$ asintoti orizzontali rispettivamente per $x \to \pm\infty$; la funzione è monotona decrescente, concava per $x < 1$, convessa per $x > 1$; flessi: $x = 1$.

5.7.3 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

(a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1}$

(b) $\dfrac{x}{1+|x|}$

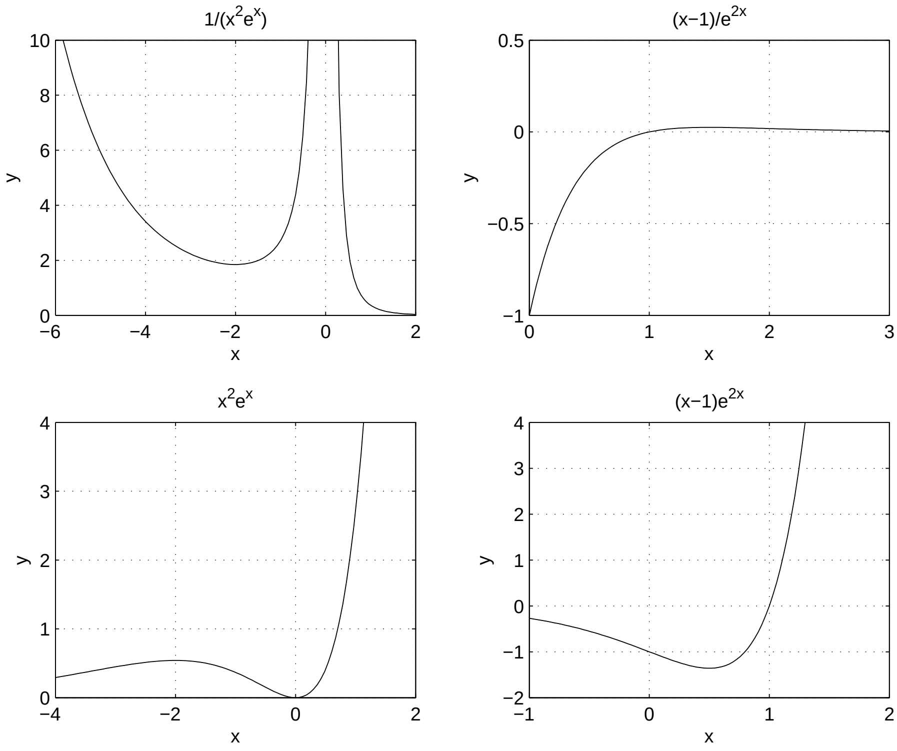

Figura 5.5: Vedi Esercizio 5.7.1

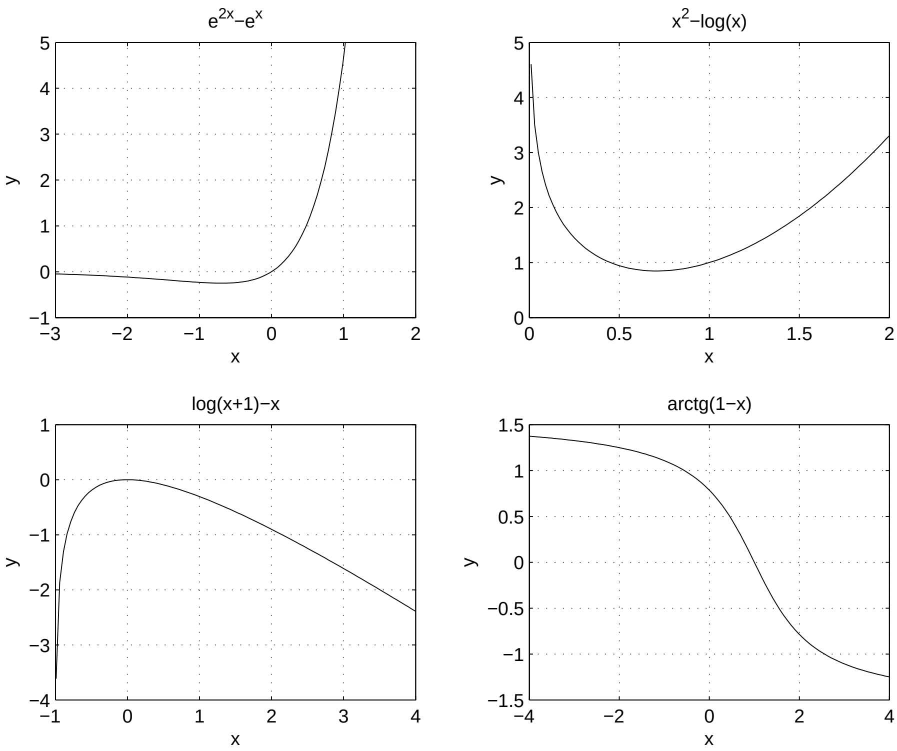

Figura 5.6: Vedi Esercizio 5.7.2.

(c) $\log(1+x^2)$

(d) $\dfrac{1}{x} + \log x$.

Risposta. Vedi Figura 5.7.

(a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{x(1-x)}$*; dominio: la funzione è definita per ogni* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$*; asintoti:* $x = 0$, $x = 1$ *asintoti verticali,* $y = 0$ *asintoto orizzontale a* $\pm\infty$*; estremi:* $x = 1/2$ *punto di minimo; la funzione è convessa in* $(0,1)$*, concava altrove;*

(b) si tratta di una funzione dispari; dominio: $\mathbb{R}$*; asintoti:* $y = 1$ *asintoto orizzontale a* $+\infty$, $y = -1$ *asintoto orizzontale a* $-\infty$*; la funzione è monotona crescente, concava per* $x > 0$*, convessa per* $x < 0$*;*

(c) si tratta di una funzione pari; dominio: $\mathbb{R}$*; la funzione non possiede asintoti; estremi:* $x = 0$ *punto di minimo; flessi:* $x = \pm 1$*; la funzione è convessa in* $(-1,1)$*, concava altrove;*

(d) dominio: $(0, +\infty)$*; asintoti:* $x = 0$ *asintoto verticale, non ci sono asintoti orizzontali o obliqui; estremi:* $x = 1$ *punto di minimo; flessi:* $x = 2$*; la funzione è convessa per* $x < 2$*, concava per* $x > 2$.

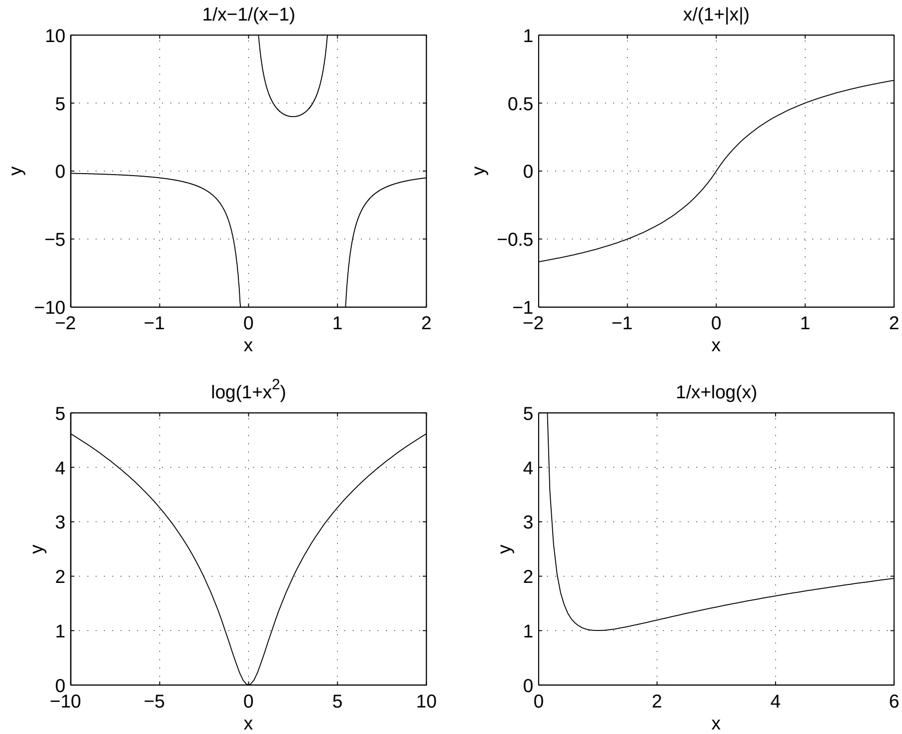

Figura 5.7: Vedi Esercizio 5.7.3.

5.7.4 Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:

(a) $\sqrt{1 - x - 2x^2}$

(b) $e^{x - \sqrt{x}}$

(c) $\dfrac{x}{\log x}$

(d) $x(2-x)e^{-x}$.

Risposta. Vedi Figura 5.8.

(a) La funzione è definita in $[-1, 1/2]$*, derivabile in* $(-1/2, 1/2)$*, ed è a valori positivi; il punto* $x = -1/4$ *è punto di massimo; la funzione è concava; infine i punti* $x = -1,\ 1/2$ *sono punti a tangente verticale.*

(b) La funzione è definita per ogni $x \geq 0$*, derivabile per* $x > 0$*; non ci sono asintoti; il punto* $x = 1/4$ *è punto di minimo; la funzione è convessa; infine il punto* $x = 0$ *è a tangente verticale.*

(c) La funzione è definita in $(0, +\infty) \setminus \{1\}$; $x = 1$ è asintoto verticale, non ci sono asintoti orizzontali, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$; il punto $x = e$ è punto di minimo; la funzione è convessa in $(1, e^2)$, concava altrove; il punto $x = e^2$ è di flesso.

(d) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$; $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$; $x = 2 - \sqrt{2}$ è punto di massimo, $x = 2 + \sqrt{2}$ è punto di minimo; la funzione è convessa in $(3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$, concava altrove; i punti $x = 3 \pm \sqrt{3}$ sono di flesso.

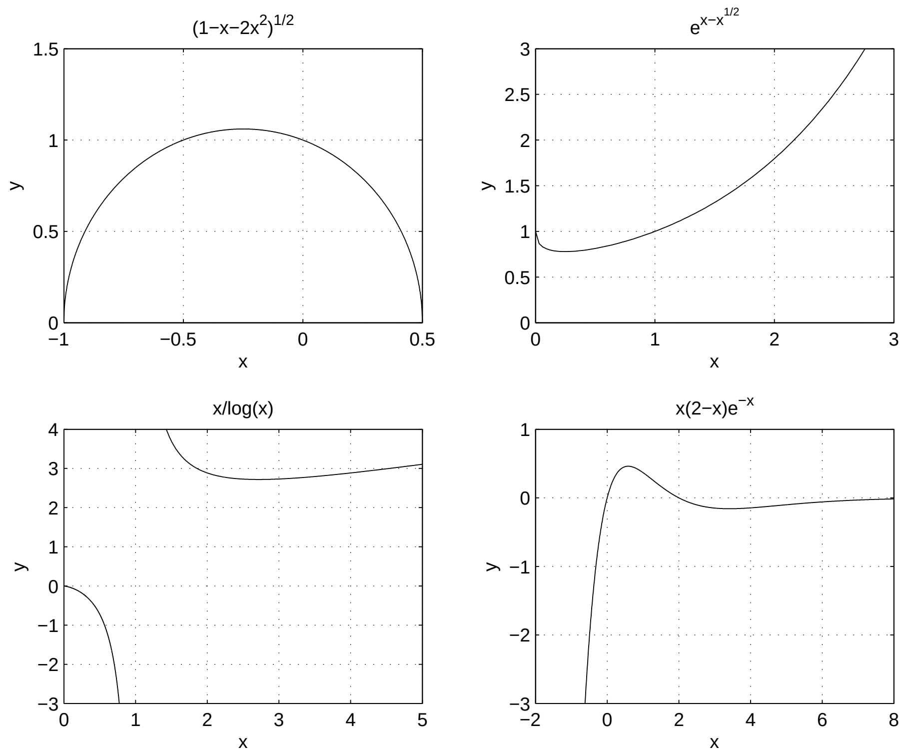

Figura 5.8: Vedi Esercizio 5.7.4.

5.7.5 Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico approssimativo:

(a) $\dfrac{1}{x - 1 - x^2}$

(b) $\dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$.

Risposta. Vedi Figura 5.9.

(a) La funzione è definita in $\mathbb{R}$; $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$; il punto $x = 1/2$ è di minimo; la funzione è convessa in $(0, 1)$, concava altrove; i punti $x = 0,\ 1$ sono di flesso.

(b) La funzione è definita in $\mathbb{R}$; $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\pm\infty$; il punto $x = 1$ è di massimo; la funzione è concava in $(0, 2)$, convessa altrove; i punti $x = 0,\ 2$ sono di flesso.

5.7.6 Studiare, senza esaminare la derivata seconda, la funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 2}}$, classificandone i punti di non derivabilità.

Risposta.

(a) Si veda la Figura 5.10. Il dominio è $D = (-2, -1] \cup [1, +\infty)$; si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, non vi sono asintoti obliqui. La retta $x = -2$ è un asintoto verticale da destra. La funzione f non è derivabile nei punti ± 1, entrambi punti a tangente verticale; più precisamente

$$
\begin{aligned}
f'_+(1) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0+} \sqrt{\frac{h+2}{h(h+3)}} = +\infty \\
f'_-(-1) &= \lim_{h\to 0-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -\lim_{h\to 0-} \sqrt{\frac{h-2}{h(h+1)}} = -\infty\,.
\end{aligned}
$$

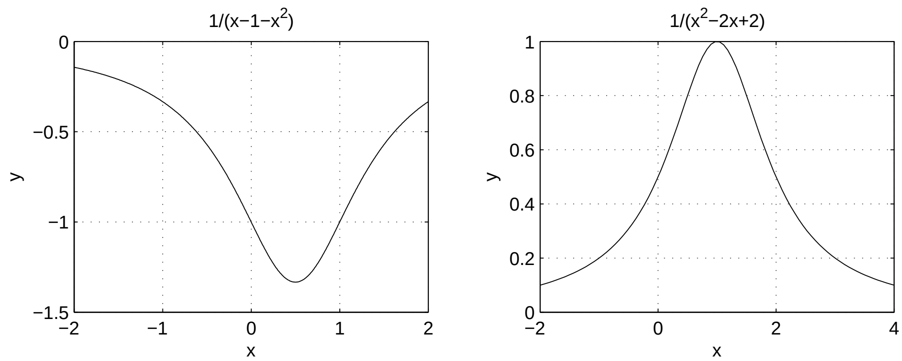

Figura 5.9: Vedi Esercizio 5.7.5.

Si ha, per ogni $x \in (-2,-1) \cup (1,+\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x^2-1}} \cdot \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}\,.$$

Pertanto f *è decrescente in* $(-2,-1)$ *e crescente in* $(1,+\infty)$.

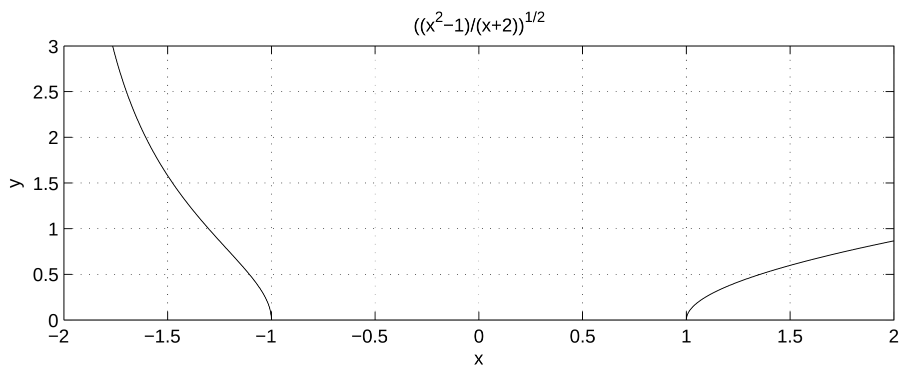

Figura 5.10: Vedi Esercizio 5.7.6.

5.7.7 Studiare le seguenti funzioni f e disegnarne il grafico. Dire se le funzioni f sono continue o derivabili:

(a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x}$.

Risposta. Vedi Figura 5.11.

(a) La funzione è definita in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $x=1$ *è asintoto verticale,* $y=1$ *è asintoto orizzontale a* $+\infty$, $y=-1$ *è asintoto orizzontale a* $-\infty$ *; il punto* $x=0$ *è punto di massimo; la funzione è concava in* $(0,1)$, *convessa altrove; la funzione* f *è continua in tutto il dominio, derivabile per* $x \neq 0$*: in* $x=0$ *si ha un punto angoloso.*

(b) La funzione è definita per ogni $x \neq 0$, *ed è una funzione dispari;* $x=0$ *è asintoto verticale,* $y=1$ *è asintoto orizzontale a* $+\infty$, $y=-1$ *è asintoto orizzontale a* $-\infty$ *; la funzione è crescente, ed è convessa per* $x<0$ *, concava altrove; la funzione* f *è continua e derivabile in tutto il dominio.*

5.7.8 Studiare la funzione $f(x) = e^{x|x-1|}$. Dedurne il grafico della funzione $g(x) = e^{(1-x)|x|}$.

Risposta. Vedi Figura 5.12. La funzione f *è definita in* $\mathbb{R}$, *positiva, continua in* $\mathbb{R}$ *perché composta di funzioni continue, sicuramente derivabile se* $x \neq 1$, *e*

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2-x} & se\ x \geq 1 \\ e^{x-x^2} & se\ x < 1\,. \end{cases}$$

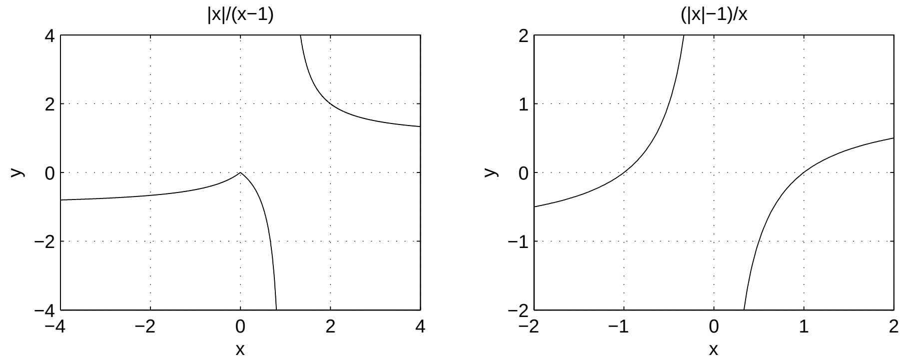

Figura 5.11: Vedi Esercizio 5.7.7.

Da questa scrittura si deduce subito che $lim_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$, $lim_{x\to-\infty}f(x) = 0$*; non vi è asintoto obliquo a* $+\infty$*, la retta* $y = 0$ *è asintoto orizzontale a* $-\infty$*. Inoltre, se* $x \neq 1$

$$f'(x) = \begin{cases} (2x-1)e^{x^2-x} & se\ x > 1 \\ (1-2x)e^{x-x^2} & se\ x < 1\,. \end{cases}$$

Ne segue che $x = 1/2$ *è un punto di massimo relativo (con massimo* $\sqrt[4]{e}$*) e* $x = 1$ *è punto di minimo relativo (con minimo* 1*). Per quanto riguarda la derivabilità nel punto* 1 *si ha, ad esempio usando la regola di de L'Hospital,*

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h\to0+}\frac{e^{(1+h)^2-(1+h)}-1}{h} = \lim_{h\to0+}\frac{e^{h^2+h}-1}{h} = 1 \\ f'_-(1) &= \lim_{h\to0-}\frac{e^{(1+h)-(1+h)^2}-1}{h} = \lim_{h\to0-}\frac{e^{-h^2-h}-1}{h} = -1\,; \end{aligned}$$

pertanto la funzione non è derivabile nel punto angoloso 1*. Infine*

$$f''(x) = \begin{cases} (4x^2-4x+3)e^{x^2-x} & se\ x > 1 \\ (4x^2-4x-1)e^{x-x^2} & se\ x < 1\,. \end{cases}$$

Dunque f *è convessa in* $(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}) \cup (1, +\infty)$ *e concava in* $(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, 1)$*; il punto* $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ *è un punto di flesso in cui* f *vale* $e^{-1/4}$*.*

Si noti ora che $g(x) = f(1-x)$*; pertanto il grafico di* g *si ottiene da quello di* f *eseguendo dapprima una simmetria rispetto all'asse* y $(x \to -x)$ *e poi traslando il grafico ottenuto verso destra di* 1*.*

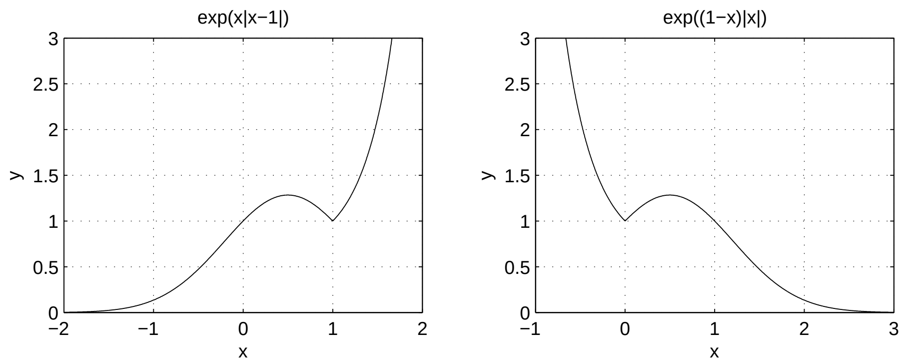

Figura 5.12: Vedi Esercizio 5.7.8.

5.7.9 Studiare la concavità e la convessità delle seguenti funzioni; calcolarne poi i limiti a $\pm\infty$ e con questi dati tracciarne un grafico approssimativo.

(a) $x^3 - 2x^2 + x + 1$

(b) $1 - x + x^2 - x^3$

(c) $x(4 - x + x^2/2)$

(d) $1 - 3x + x^2 - x^3$.

Risposta. Vedi Figura 5.13.

(a) La funzione è concava per $x < 2/3$, convessa per $x > 2/3$; si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;

(b) la funzione è concava per $x > 1/3$, convessa per $x < 1/3$; si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$;

(c) la funzione è concava per $x < 2/3$, convessa per $x > 2/3$; si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;

(d) la funzione è concava per $x > 1/3$, convessa per $x < 1/3$; si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$.

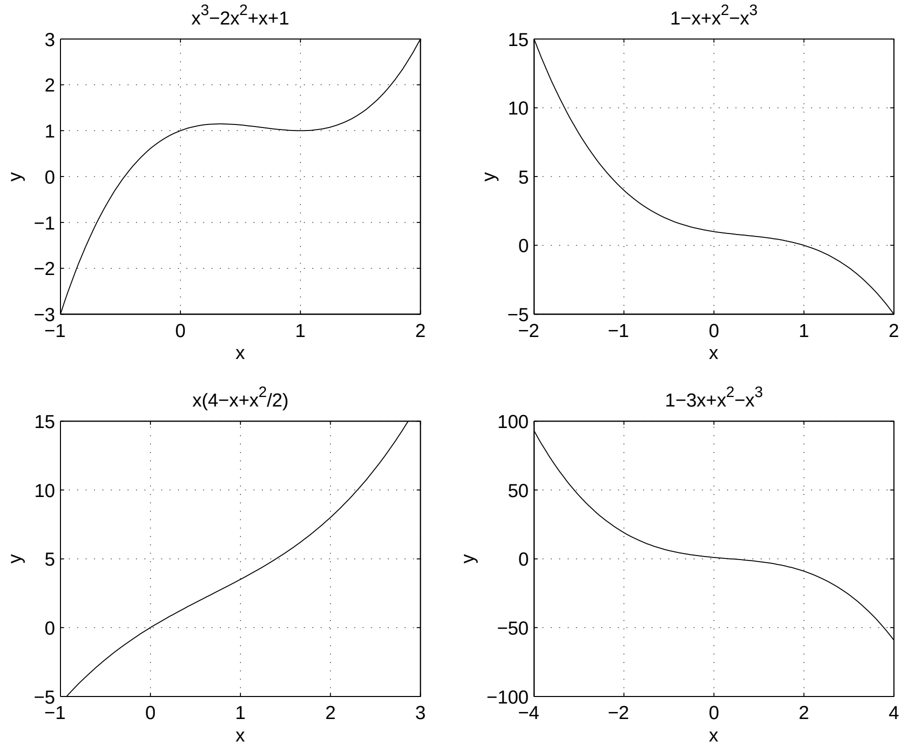

Figura 5.13: Vedi Esercizio 5.7.9.

5.7.10 Si consideri la funzione $f(x) = \log x - \log(x-1)$. Scrivere il dominio di f, studiarne gli asintoti e la convessità.

Risposta. Dominio: $(1, +\infty)$; $x = 1$ asintoto verticale, $y = 0$ asintoto orizzontale; la funzione è sempre convessa.

5.7.11 Studiare la funzione (limiti, asintoti, massimi, minimi, flessi, convessità) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Risposta. Vedi Figura 5.14. Dominio. $\mathbb{R}$; asintoti: $y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$, $y = 1$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$; la funzione è monotona decrescente, $x = 0$ è un punto di flesso in cui la funzione da concava diviene convessa.

5.8 Altri esercizi

5.8.1 Studiare il grafico della funzione polinomiale $f_a(x) = x^3 - x + a$, con $a \in \mathbb{R}$. Per quali valori di a la funzione f_a ha un unico zero? Per quali valori di a la funzione f_a ha tre zeri?

Risposta. Vedi Figura 5.15. Il dominio di f_a è $\mathbb{R}$; al variare di a i grafici sono traslati verticalmente. Se $a = 0$ la funzione è dispari. Inoltre $f_a'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ se $x = \pm\sqrt{3}/3$; dal segno di f_a' si deduce che $-\sqrt{3}/3$ è un punto di massimo (con massimo relativo $2\sqrt{3}/9 \sim 0.38$), $\sqrt{3}/3$ un punto di minimo (con minimo relativo $-2\sqrt{3}/9$). Si ha poi che $f_a''(x) = 6x$, dunque f è concava se $x < 0$ e convessa se $x > 0$; il punto 0 è di flesso. Infine $\lim_{\pm\infty} f_a(x) = \pm\infty$ e non vi sono asintoti obliqui.

Posto $f(x) = f_0(x) = x^3 - x$, la funzione f_a ha uno o tre zeri a seconda che l'equazione $f(x) = -a$ abbia una o tre soluzioni. Ricordando i valori del massimo e del minimo relativo trovati sopra si

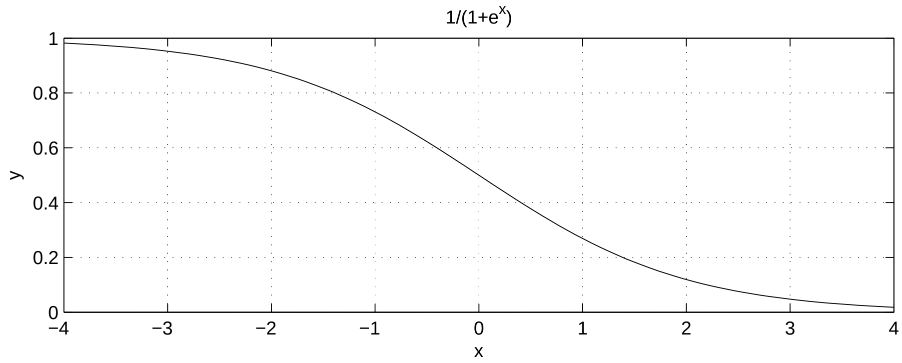

Figura 5.14: Vedi Esercizio 5.7.11.

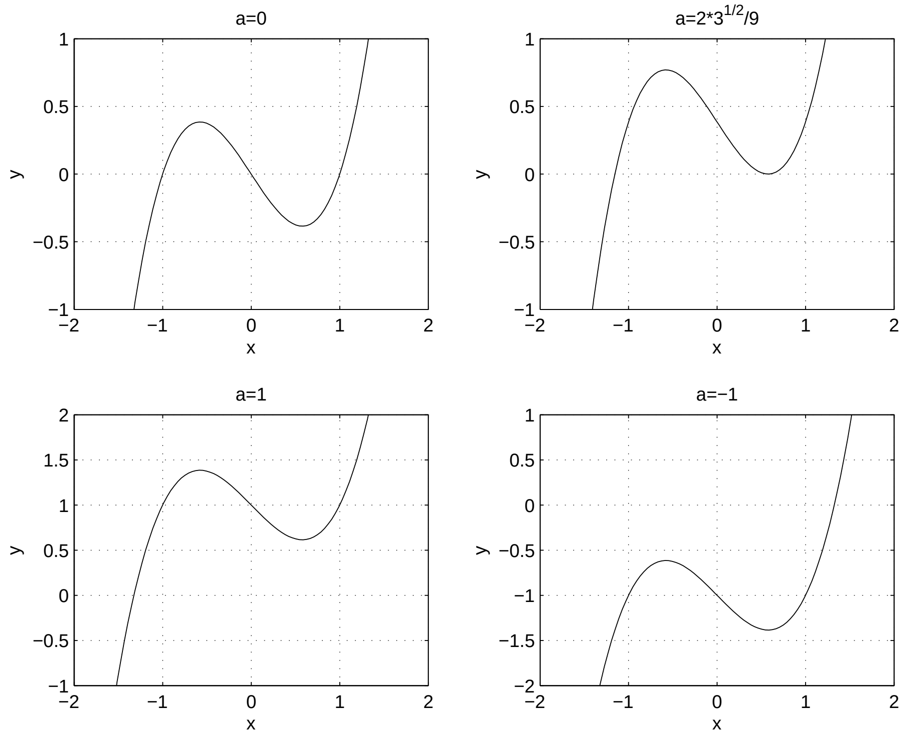

Figura 5.15: Vedi Esercizio 5.8.1.

deduce che se $a \in (-2\sqrt{3}/9, 2\sqrt{3}/9)$ allora l'equazione $f(x) = -a$ ha tre soluzioni, se $a < -2\sqrt{3}/9$ o $a > 2\sqrt{3}/9)$ l'equazione $f(x) = -a$ ha una sola soluzione.

5.8.2 Si consideri la funzione $f_a(x) = ax^3 - \frac{a+1}{2}x - 6a$, con $a \neq 0$. Per quali a la funzione f_a ammette sia massimo che minimo? Studiare la funzione f_1.

Risposta. Si veda Figura 5.16. Condizione necessaria affinché f_a ammetta sia massimo che minimo è che l'equazione $f'_a(x) = 0$ abbia due radici distinte. Si ha

$$f'_a(x) = 3ax^2 - \frac{a+1}{2}.$$

Se $a > 0$ troviamo le due radici distinte $x = \pm\sqrt{\frac{a+1}{6a}}$, se $a < 0$ abbiamo due radici distinte $x = \pm\sqrt{\frac{a+1}{6a}}$ a condizione che $a < -1$. Dal segno della derivata prima si vede subito che a tali valori corrispondono un punto di minimo e un punto di massimo. Perciò f_a ammette sia massimo che minimo se $a < -1$ o $a > 0$.

Poniamo poi $f_1(x) = f(x) = x^3 - x - 6$. Si noti che dalla regola di Ruffini $x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$. La funzione ha un punto di massimo relativo in $-\sqrt{3}/3$ e un punto di minimo relativo in $\sqrt{3}/3$; è convessa in $(0, +\infty)$ e concava in $(-\infty, 0)$.

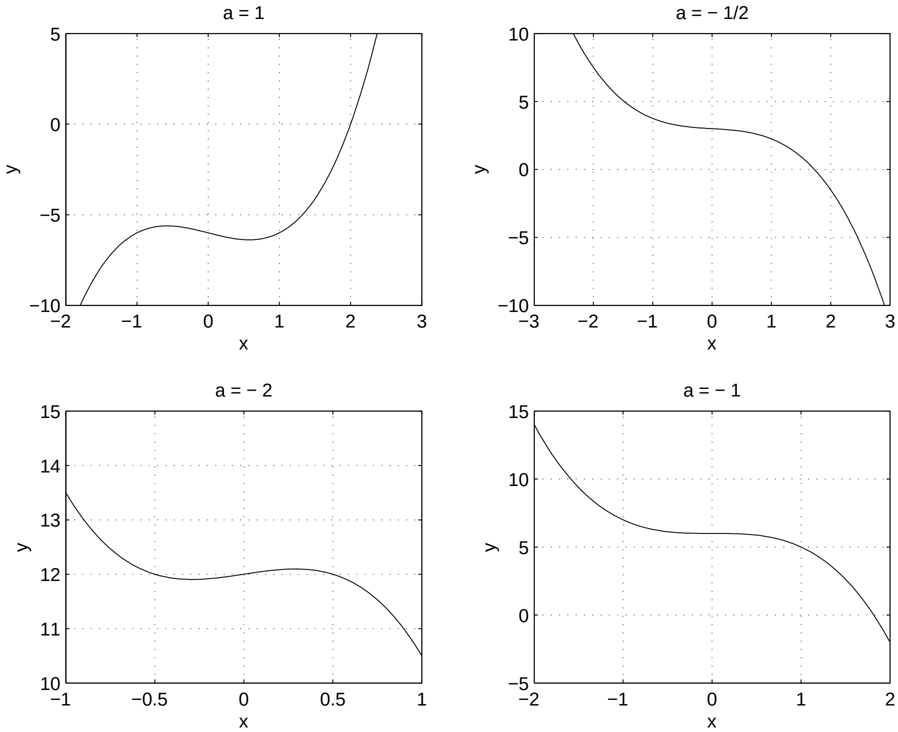

Figura 5.16: Vedi Esercizio 5.8.2.

5.8.3 Si consideri la funzione $f(x) = x^2\sqrt{a^2 - x^2}$, dove a è un numero reale positivo.

(a) Studiare la funzione f (senza studiarne la convessità) e disegnarne il grafico.

(b) È derivabile (eventualmente solo da destra o da sinistra) la funzione f nei punti $\pm a$?

(c) Far vedere graficamente come cambia il grafico di f al crescere del parametro a.

Risposta. Vedi Figura 5.17. La funzione è definita in $[-a, a]$, è pari ed ha valori in $[0, +\infty)$; i suoi zeri sono $x = 0$, $x = \pm a$; i punti $x = \pm\sqrt{2/3}a$ sono di massimo; la funzione non è derivabile in $\pm a$, dove si hanno flessi a tangente verticale.

5.8.4 Ricordando la formula del valor medio di Lagrange, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$, dove $c \in (a, b)$, trovare c nel caso:

(a) $f(x) = 1 - x^3$, $a = 0$, $b = 1$

(b) $f(x) = x^2 - x$, $a = 1$, $b = 2$

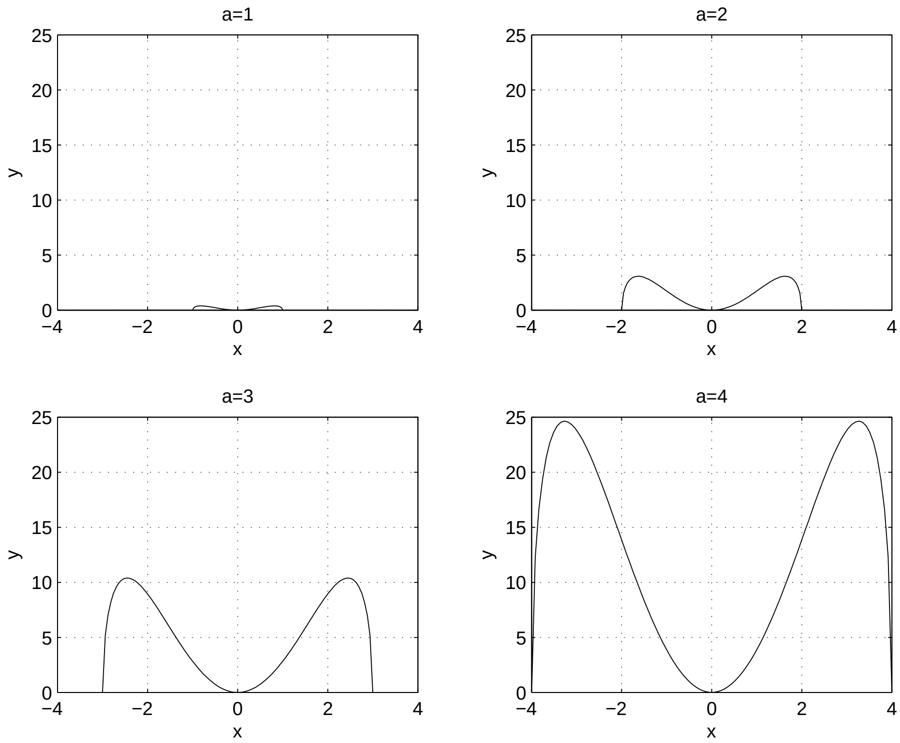

Figura 5.17: Vedi Esercizio 5.8.3.

(c) $f(x) = 1/x^3$, $a = 1$, $b = 2$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$, $b = 2$.

Risposta. Si ha:

(a) $f'(c) = -1$, *quindi* $-3x^2 = -1$ *cioè* $x = \pm 1/\sqrt{3}$, $c = 1/\sqrt{3} \in (0, 1)$;

(b) $f'(c) = 2$, $2x - 1 = 2$, $c = 3/2$;

(c) $f'(c) = -7/8$, $-3/x^4 = -7/8$, $x = \pm\sqrt[4]{24/7}$, $c = \sqrt[4]{24/7} \in (1, 2)$;

(d) $f'(c) = -1/3$, $-(1 + x)^{-2} = -1/3$, $c = \sqrt{3} - 1$.

5.8.5 Dare un esempio esplicito di una funzione definita in $\mathbb{R}$:

(a) crescente e concava

(b) decrescente e convessa

(c) negativa e concava

(d) positiva e crescente

e disegnarne approssimativamente il grafico.

Risposta. Vedi Figura 5.18. Si prendano ad esempio:

(a) $-e^{-x}$;

(b) e^{-x};

(c) $-e^{x}$;

(d) e^{x}.

5.8.6 Dare un esempio esplicito di una funzione f derivabile ovunque tranne che nei punti 1 e -1.

Risposta. Si prenda ad esempio $f(x) = |1 - x^2|$.

5.8.7 Calcolare la retta tangente al grafico delle seguenti funzioni f nel punto $(1, f(1))$ e disegnare un grafico approssimativo di tale retta. Calcolare poi la derivata seconda della funzione f nel punto 1 e dedurne un grafico approssimato nell'intorno del punto 1:

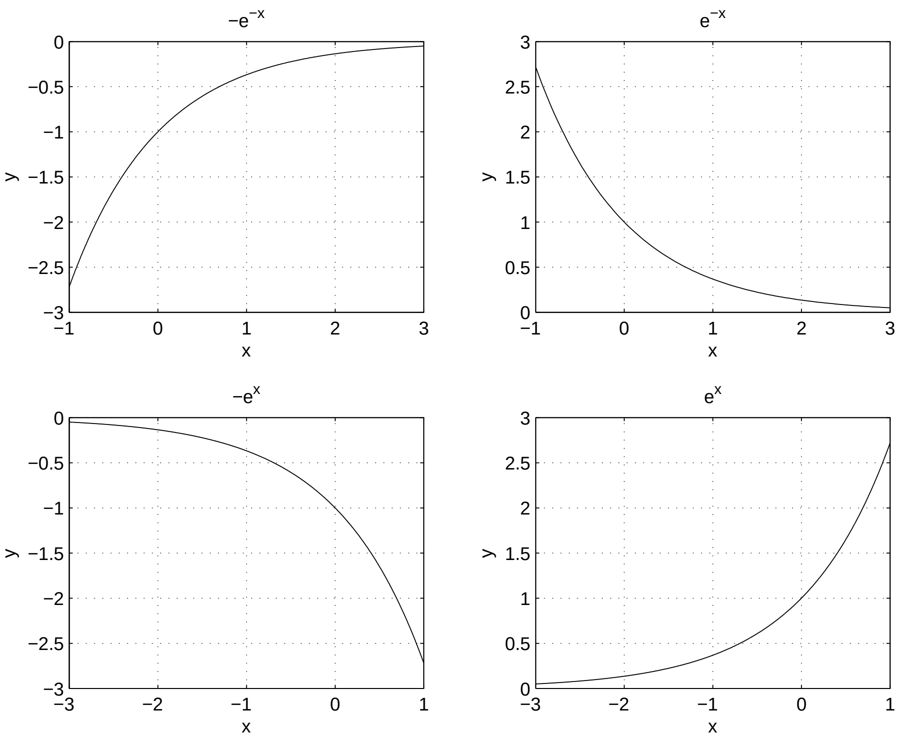

Figura 5.18: Vedi Esercizio 5.8.5.

(a) $f(x) = e^{x^2-3x+2}$

(b) $f(x) = \log(2 + x^2)$

(c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$

(d) $f(x) = e^{3-x^2}$.

Risposta. Vedi Figura 5.19. Si ha:

(a) tangente: $y = -x + 2$, $f''(1) = 3$, *dunque* f *nel punto* 1 *è convessa e il grafico sta sopra alla retta tangente;*

(b) $y = \dfrac{2}{3}(x-1) + \log 3$, $f''(1) = 2/9$, f *nel punto* 1 *è convessa e il grafico sta sopra alla retta tangente;*

(c) $y = \pi(x-1)$, $f''(1) = -\pi$, *dunque* f *nel punto* 1 *è concava e il grafico sta sotto alla retta tangente;*

(d) $y = -2e^2x + 3e^2$, $f''(1) = 2e^2$, *dunque* f *nel punto* 1 *è convessa e il grafico sta sopra alla retta tangente.*

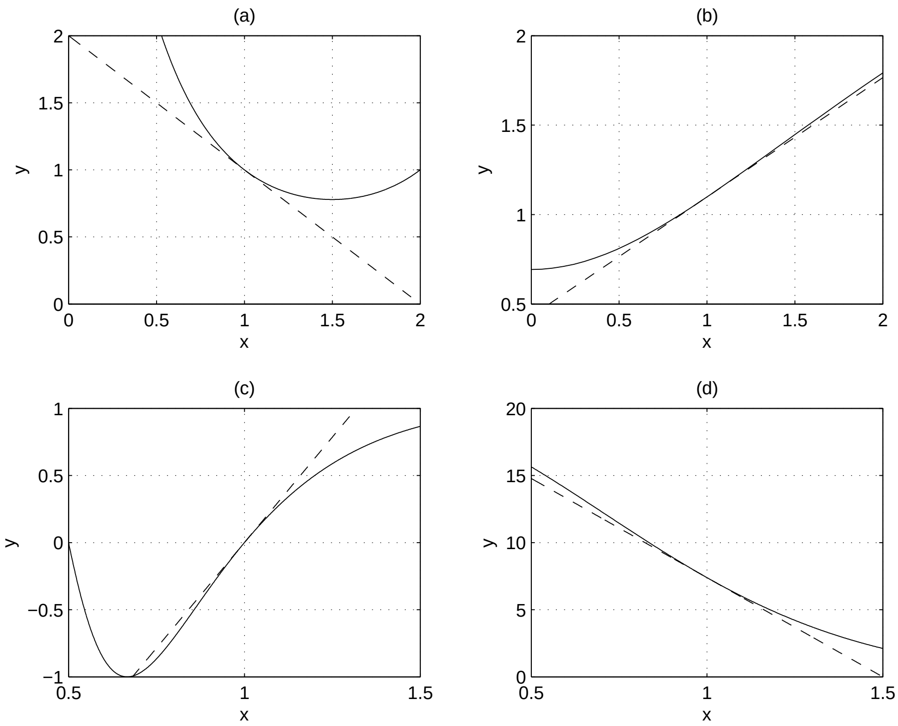

Figura 5.19: Vedi Esercizio 5.8.7.

Capitolo 6

Calcolo integrale

6.1 Primitive

Negli esercizi seguenti si sottintende che la costante di integrazione c (o C) è reale ed arbitraria.

6.1.1 Siano f e G due funzioni definite in un intervallo. Se G è una primitiva di f', di chi è primitiva la funzione $\dfrac{1}{G}$?

Risposta. Poiché $G' = f'$ ne segue che $G(x) = f(x) + C$, per $C \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$\left(\frac{1}{G}\right)' = \frac{-G'}{G^2} = \frac{-f'}{(f+C)^2}\,.$$

Dunque $\frac{1}{G}$ è primitiva di $\frac{-f'}{(f+C)^2}$.

6.1.2 Determinare tutte le primitive della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \sin x & x > 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ \cos x & x > 0. \end{cases}$

Risposta.

(a) Una primitiva della funzione 0 in $(-\infty, 0]$ è la funzione costante c, per $c \in \mathbb{R}$; una primitiva di $\sin x$ in $(0, +\infty)$ è $-\cos x + d$, per $d \in \mathbb{R}$; poiché una primitiva F di f deve essere derivabile, dunque continua, occorre che $\lim_{x\to 0-} c = \lim_{x\to 0+}(-\cos x + d) = F(0)$, da cui $d = c + 1$, e in conclusione

$$F(x) = \begin{cases} c & x \le 0 \\ -\cos x + c + 1 & x > 0; \end{cases}$$

si verifica subito che F è derivabile;

(b) Analogamente, una primitiva della funzione 1 in $(-\infty, 0]$ è la funzione $x + c$, per $c \in \mathbb{R}$; una primitiva di $\cos x$ in $(0, +\infty)$ è $\sin x + d$, per $d \in \mathbb{R}$; occorre che $\lim_{x\to 0-}(x+c) = \lim_{x\to 0+}(\sin x + d)$, da cui $c = d$, e in conclusione

$$F(x) = \begin{cases} x + c & x \le 0 \\ \sin x + c & x > 0; \end{cases}$$

anche in questo caso si verifica subito che F è derivabile.

6.1.3 Calcolare

(a) $\displaystyle\int \sin^2(x-1)\cos(x-1)\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-6)^4}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\log(1+x)}{2(1+x)}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx.$

Risposta. *Gli integrali precedenti si risolvono con la formula*

$$\int f(x)^\alpha f'(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{se } \alpha \neq -1, \\ \log|f(x)| & \text{se } \alpha = -1. \end{cases}$$

(a) $(\sin(x-1))' = \cos(x-1)$, *dunque*

$$\int \sin^2(x-1)\cos(x-1)\,dx = \frac{\sin^3(x-1)}{3} + c,\ c \in \mathbb{R};$$

(b) $(e^x - 6)' = e^x$, *dunque*

$$\int (e^x-6)^{-4} e^x\,dx = -\frac{1}{3(e^x-6)^3} + c,\ c \in \mathbb{R};$$

(c) $(\log(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$, *dunque*

$$\int \frac{\log(1+x)}{2(1+x)}\,dx = \frac{(\log(1+x))^2}{4} + c,\ c \in \mathbb{R};$$

(d) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, *dunque*

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

6.1.4 Calcolare

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^4}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos(1/x)}{x^2}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}dx$.

Risposta.

(a) Poiché $(\log\log x)' = \dfrac{1}{\log x}\cdot\dfrac{1}{x}$, *l'integrale vale* $\log\log x + c$, $c \in \mathbb{R}$;

(b) poiché $(\operatorname{arctg} x^2)' = \dfrac{2x}{1+x^4}$, *l'integrale vale* $\operatorname{arctg} x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$;

(c) poiché $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)' = \cos(1/x)\cdot\dfrac{-1}{x^2}$, *l'integrale vale* $-\sin\dfrac{1}{x} + c$, $c \in \mathbb{R}$;

(d) poiché $(\arcsin\sqrt{3}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-3x^2}}\cdot\sqrt{3}$, *l'integrale vale* $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\sqrt{3}x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

6.1.5 Calcolare una primitiva delle funzioni

(a) $\dfrac{x}{x^2+4x+3}$

(b) $\dfrac{1}{x^2+6x+10}$

(c) $\dfrac{\log x}{x}$

(d) $x\sin x$

(e) $(\arcsin x)^2$

(f) $\dfrac{x^3}{1+x^2}$

(g) $\dfrac{1}{\cos x}$.

Risposta.

(a) *Si ha* $\dfrac{x}{x^2+4x+3} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+3}$ *per* $A = -1/2$, $B = 3/2$, *dunque una primitiva è*

$$-\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x+3| + c = \log\sqrt{\frac{(x+3)^3}{x+1}} + c,\ \ c \in \mathbb{R};$$

(b) *il discriminante del denominatore è negativo: si cerca una soluzione "completando il quadrato":*

$$\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x+3) + c;$$

(c) *integrando per parti si ottiene*

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \log^2 x - \int \frac{\log x}{x}dx,$$

perciò

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \frac{\log^2 x}{2} + c,\ \ c \in \mathbb{R};$$

(d) *integrando per parti si ha*

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c,\ \ c \in \mathbb{R};$$

(e) *posto* $x = \sin y$, *si ottiene*

$$\int (\arcsin x)^2 dx = \int y^2 \cos y dy,$$

e integrando per parti si ricava $\int y^2\cos y dy = y^2\sin y + 2y\cos y - 2\sin y + c$, $c \in \mathbb{R}$; *segue che*

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + c;$$

oppure, senza cambiare le variabili ma integrando due volte per parti,

$$\begin{aligned}\int (\arcsin x)^2 dx &= \int 1\cdot(\arcsin x)^2 dx = x\,(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\arcsin x\sqrt{1-x^2} - 2x + c\,,\end{aligned}$$

in quanto una primitiva di $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *è* $-\sqrt{1-x^2}$;

(f) *poiché* $\dfrac{x^3}{1+x^2} = \dfrac{x(x^2+1)-x}{1+x^2}$, *segue*

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int x\cdot dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2} - \log\sqrt{1+x^2} + c,\ \ c \in \mathbb{R};$$

(g) *posto* $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, *si ottiene* $\displaystyle\int \frac{2}{1-t^2}dt$; *ma* $\dfrac{2}{1-t^2} = \dfrac{1}{1-t} + \dfrac{1}{1+t}$, *perciò*

$$\int \frac{2}{1-t^2}dt = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c$$

e quindi

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

6.1.6 Calcolare

(a) $\displaystyle\int 3x^2\log x dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx$

(d) $\displaystyle\int e^x \sin x dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{4^x}{2^x-1}\,dx.$

Risposta.

(a) Integrando per parti si ottiene

$$\int 3x^2\log x dx = x^3\log x - \int x^2 dx = x^3\log x - \frac{x^3}{3} + c,\ \ c\in\mathbb{R};$$

(b) posto $x = t^2$, *si ha* $dx = 2t\cdot dt$ *e*

$$2\int \frac{t}{t+1}dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t+1}dt = 2t - 2\log(t+1) + c,\ \ c\in\mathbb{R},$$

da cui

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1) + c;$$

(c) posto $e^x = t$, *si ha* $dx = 1/t\cdot dt$ *e*

$$\int \frac{1}{t(1+t)}dt = \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \log\left|\frac{t}{t+1}\right| + c,\ \ c\in\mathbb{R},$$

dunque

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \log\frac{e^x}{e^x+1} + c;$$

(d) integrando due volte per parti si ottiene

$$2\int e^x\sin x dx = e^x(\sin x - \cos x) + c,\ \ c\in\mathbb{R},$$

da cui

$$\int e^x\sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

(e) Posto $2^x = y$ *si ha* $2^x\log 2\,dx = dy$ *e dunque*

$$\begin{aligned}\int \frac{4^x}{2^x-1}\,dx &= \frac{1}{\log 2}\int \frac{y}{y-1}\,dy = \frac{1}{\log 2}\int\left(1+\frac{1}{y-1}\right)dy\\ &= \frac{1}{\log 2}\,(y+\log|y-1|) + c = \frac{1}{\log 2}\,(2^x + \log|2^x-1|) + c;\end{aligned}$$

6.1.7 Calcolare

(a) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}\,dx.$

Risposta.

(a) Poiché $\sin x\cos x = (\sin 2x)/2$ *si ha, ponendo* $2x = y$

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 y\,dy,$$

dunque

$$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{1}{8}\left(\frac{y}{2} - \frac{\sin y\cos y}{2}\right) + c = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x\right) + c,\ \ c\in\mathbb{R};$$

(b) si ha $x^2 = (x+1)(x-1)+1$, *perciò*

$$\int \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int (x-1)\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \log|x+1| + c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

(c) si ha

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{2x-2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx = 2\log(x-1) - \frac{3}{x-1} + c\,.$$

6.1.8 Calcolare

(a) $\displaystyle\int \sin(\log x)\ dx$

(b) $\displaystyle\int \log^2(3x)\, dx$

(c) $\displaystyle\int x \arcsin(x^2)\, dx$

Risposta.

(a) Possiamo integrare due volte per parti:

$$\begin{aligned}\int \sin(\log x)\ dx &= x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)\, dx\\ &= x\sin(\log x) - x\cos(\log x) - \int \sin(\log x)\, dx\end{aligned}$$

da cui

$$\int \sin(\log x)\ dx = \frac{x(\sin(\log x) - \cos(\log x))}{2} + c\,.$$

Si poteva anche fare prima la sostituzione $t = \log x$ e poi procedere nello stesso modo.

(b) Integrando due volte per parti si ottiene

$$\int \log^2(3x)\, dx = x\log^2(3x) - 2\int \log(3x)\, dx = x\log^2(3x) - 2x\log(3x) + 2x + c\,.$$

(c) Integrando per parti

$$\begin{aligned}\int x\arcsin(x^2)\, dx &= \frac{x^2}{2}\arcsin(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx\\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin(x^2) + \frac{1}{4}\int \frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{x^2}{2}\arcsin(x^2) + \frac{\sqrt{1-x^4}}{2} + c\,.\end{aligned}$$

6.1.9 Calcolare

(a) $\displaystyle\int (x-2)^2 \log x\, dx$

(b) $\displaystyle\int x^2 \sin x\, dx$

(c) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\, dx$

(d) $\displaystyle\int \log(1+x^2)\, dx.$

Risposta. Questi esercizi si risolvono integrando per parti:

(a)

$$\begin{aligned}\int (x-2)^2\log x\, dx &= \frac{(x-2)^3}{3}\log x - \int \frac{(x-2)^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\, dx\\ &= \frac{(x-2)^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int\left(x^2 - 6x + 12 - \frac{8}{x}\right) dx\\ &= \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + x^2 - 4x + \frac{8}{3}\log x + c,\ \ c\in\mathbb{R};\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\, dx &= -x^2\cos x + \int 2x\cos x\, dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\, dx\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c,\ \ c\in\mathbb{R};\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x\, dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{arctg} x\right) + c,\ \ c\in\mathbb{R};\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\int \log(1+x^2)\, dx &= x\log(1+x^2) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx \\ &= x\log(1+x^2) - 2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= x\log(1+x^2) - 2\left(x-\operatorname{arctg} x\right) + c,\ \ c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

6.1.10 Calcolare

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^2})} dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{2-x^2} dx$

(d) $\displaystyle\int x^2 2^x\, dx$

(e) $\displaystyle\int \log_3^2(3x)\, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\, dx.$

Risposta. Qui sotto c è una arbitraria costante reale.

(a) Posto $x^{-1}=t$ si ottiene

$$\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = -\int \sin t\, dt = \cos t + c = \cos\frac{1}{x} + c;$$

(b) posto $x=t^3$ si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^2})} dx = \int \frac{3t}{1+t^2} dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{1+t^2} dt = \frac{3}{2}\log(1+t^2)+c = \frac{3}{2}\log(1+\sqrt[3]{x^2})+c;$$

(c) poiché

$$\frac{1}{2-x^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-x}+\frac{1}{\sqrt{2}+x}\right),$$

si ha

$$\int \frac{1}{2-x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + c;$$

(d) si integra per parti:

$$\begin{aligned}\int x^2 2^x\, dx &= \frac{2^x}{\log 2}x^2 - \int \frac{2^x}{\log 2} 2x\, dx \\ &= \frac{2^x}{\log 2}x^2 - \frac{2}{\log 2}\left(\frac{2^x}{\log 2}x - \int \frac{2^x}{\log 2} dx\right) \\ &= \frac{2^x}{\log 2}x^2 - \frac{2^{x+1}}{\log^2 2}x + \frac{2^{x+1}}{\log^3 2} + c;\end{aligned}$$

(e) integrando due volte per parti si ha

$$\begin{aligned}\int \log_3^2(3x)\, dx &= x\log_3^2(3x) - \frac{2}{\log 3}\int \log_3(3x)\, dx \\ &= x\log_3^2(3x) - \frac{2x}{\log 3}\left(\log_3(3x) - \frac{1}{\log 3}\right) + c\,.\end{aligned}$$

(f) moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{1+x}$ *si ottiene*

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + c\,.\end{aligned}$$

6.1.11 Calcolare

(a) $\displaystyle\int \sqrt{2-x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

(c) $\displaystyle\int \sin\left(\sqrt{x}\right)dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{2-\cos x}dx.$

Risposta.

(a) Posto $x=\sqrt{2}\sin t$, *si ha* $dx=\sqrt{2}\cos t\ dt$, $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t$, *quindi*

$$\int \sqrt{2-x^2}dx = 2\int \cos^2 t\ dt = t + \sin t\cos t + c = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + c,\ \ c\in\mathbb{R};$$

(b) posto $x=t^2$ *si ha*

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2\operatorname{arctg} t + c = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c,\ \ c\in\mathbb{R};$$

(c) posto ancora $x=t^2$ *si ha*

$$\begin{aligned}\int \sin\sqrt{x}\,dx &= 2\int t\sin t\ dt = 2\left(-t\cos t + \int \cos t\ dt\right) \\ &= -2t\cos t + 2\sin t + c = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c,\ \ c\in\mathbb{R};\end{aligned}$$

(d) posto $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, *cioè* $x=2\operatorname{arctg} t$, *si ha* $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, *perciò*

$$\int \frac{1}{2-\cos x}dx = 2\int \frac{1}{3t^2+1}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}t + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

6.1.12 Calcolare

(a) $\displaystyle\int \sqrt{4-3x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Risposta.

(a) Posto $x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t$ *si trova*

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-3x^2}\,dx &= \frac{4}{\sqrt{3}}\int \cos^2 t\,dt = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{t+\sin t\cos t}{2} + c \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}\right) + c\,.\end{aligned}$$

(b) Si pone $x=2\sin t$ *da cui*

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int (1-2\sin t)\,dt = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2} + c\,.$$

6.1.13 Calcolare $\displaystyle\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx.$

Risposta. È

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = \log(\cosh x) + c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

6.2 Integrali definiti

6.2.1 Calcolare

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x+3}{x^2+1+x}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}dx$.

Risposta.

(a) Posto $x = t^2$, $dx = 2t \cdot dt$, si ottiene

$$2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+t}dt = \Big[\log(1+t)^2\Big]_1^{\sqrt{2}} = \log\frac{3+2\sqrt{2}}{4};$$

(b) si ha

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^1 = \sqrt{2}-1;$$

(c) si ha

$$3\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1+x}dx = \Big[\log(x^2+x+1)^3\Big]_0^1 = \log 27;$$

(d) si ha

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^4}dx = \Big[\log\sqrt[4]{1+x^4}\Big]_0^1 = \log\sqrt[4]{2}.$$

6.2.2 Calcolare

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{4x}}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\Big(\sin^2 x - x\sin x^2\Big)dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Risposta.

(a) Posto $4x = t^2$ si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{4x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\Big[t - \log|t+1|\Big]_0^2 = 1 - \log\sqrt{3};$$

(b) integrando per parti si ottiene

$$\left[\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\Big[x - \operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2};$$

(c) si ha

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2x\sin x^2 dx = \left[\frac{x - \sin x\cos x}{2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\Big[\cos x^2\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}\right);$$

(d) si ha

$$-\frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\Big[2\sqrt{1-x^2}\Big]_0^{1/2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6.2.3 Calcolare

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}}dx$.

Risposta.

(a) Posto $e^x = t$*, si ha*

$$\int_1^e \frac{1}{1+t}dt = \Big[\log|t+1|\Big]_1^e = \log\frac{e+1}{2};$$

(b) posto $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$*, si ha*

$$\int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)(t+1)^2}dt;$$

ma la funzione integranda si può scrivere come

$$\frac{4t}{(1+t^2)(t+1)^2} = \frac{A}{t^2+1} + \frac{B}{(t+1)^2}$$

per $A = 2$*,* $B = -2$*, dunque l'integrale vale*

$$2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt - 2\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2}dt = 2\Big[\operatorname{arctg} t\Big]_0^1 + 2\Big[\frac{1}{t+1}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1;$$

(c) $\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$*, perciò*

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}dx = \Big[\log x\Big]_1^2 - \Big[\log(x+1)\Big]_1^2 = \log\frac{4}{3};$$

(d) osservando che $\dfrac{x}{e^{x^2}} = xe^{-x^2} = -\dfrac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]'$*, si ottiene*

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \left[e^{-x^2}\right]' dx = \frac{1-e^{-1}}{2}\ ;$$

allo stesso risultato si giunge con la sostituzione $x^2 = t$*.*

6.2.4 Calcolare

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{3+x}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 3x\sqrt{4-x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{1/3} x\sqrt{1-4x^2}\,dx.$

Risposta.

(a) Posto $3+x = t$ *si ha*

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{3+x}}\,dx = \int_4^5 \frac{t-3}{\sqrt{t}}\,dt = \int_4^5 (t^{1/2} - 3t^{-1/2})\,dt = \left[\frac{2}{3}t\sqrt{t} - 6\sqrt{t}\right]_4^5 = \frac{4}{3}(5-2\sqrt{5});$$

(b) posto $x = 2\sin t$ *si ha* $dx = 2\cos t\ dt$*,* $\sqrt{4-x^2} = 2\cos t$*, dunque*

$$\int_0^1 3x\sqrt{4-x^2}\,dx = 24\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\sin t\,dt = -24\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/6} = 8 - 3\sqrt{3};$$

(c) si pone $x = t^2$ *e si ha*

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int_1^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\,dt\\ &= 2\left[t-\operatorname{arctg} t\right]_1^{\sqrt{2}} = 2(\sqrt{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{2}-1+\pi/4);\end{aligned}$$

(d) poiché $(1-4x^2)' = -8x$ *si ha*

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3} x\sqrt{1-4x^2}\,dx &= -\frac{1}{8}\int_0^{1/3} -8x\sqrt{1-4x^2}\,dx\\ &= -\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(1-4x^2)^{3/2}\right]_0^{1/3} = \frac{1}{12}\left(1-\frac{5\sqrt{5}}{27}\right).\end{aligned}$$

6.2.5 Calcolare:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2-3}{1+x^2}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}dx$

(c) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{1-x}dx.$

Risposta.

(a) Poiché $\dfrac{2x^2-3}{1+x^2} = 2-\dfrac{5}{1+x^2}$*, si ha*

$$\int_0^1 \frac{2x^2-3}{1+x^2}dx = \int_0^1\left(2-\frac{5}{1+x^2}\right)dx = \left[2x-5\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = 2-\frac{5}{4}\pi;$$

(b) si ha:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{\cos^3 x}dx &= \int_0^{\pi/4}\cos^{-3} x\sin x\;dx + \int_0^{\pi/4}\cos^{-2} x\;dx\\ &= \left[\frac{1}{2}\cos^{-2} x+\operatorname{tg} x\right]_0^{\pi/4} = \frac{3}{2};\end{aligned}$$

(c) posto $x = t^2$*, si ha*

$$\begin{aligned}\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{1-x}\,dx &= -2\int_2^3 \frac{t^2}{t^2-1}\,dt = -2\int_2^3\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\,dt\\ &= -2\int_2^3\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}\right)\,dt = \int_2^3\left(-2-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)\,dt\\ &= \Big[-2t-\log|t-1|+\log|t+1|\Big]_2^3 = -2+\log\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

6.3 Calcolo di aree

6.3.1 Calcolare l'area della regione di piano compresa tra le funzioni f e g qui sotto. Disegnare inoltre approssimativamente la regione in questione.

(a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2-\sin x$, $x \in [0,\pi/2]$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = 2+x$, $x \in [0,1]$

(c) $f(x) = \log x$, $g(x) = x+1$, $x \in [1,e]$

(d) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3^{-x}$, $x \in [0,1]$.

Risposta. Vedi Figura 6.1.

(a) $A = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2(1-\sin x)dx = 2\Big[x+\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \pi-2;$

(b) $A = \displaystyle\int_0^1\left(2+x-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left[2x+\frac{x^2}{2}-\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{5}{2}-\frac{\pi}{4};$

(c) $A = \int_1^e (1 + x - \log x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \log x dx$; *quest'ultimo integrale si risolve per parti, ottenendo* $\int \log x dx = x \log x - x$, *dunque si ha* $A = \left[2x + \frac{x^2}{2} - x \log x\right]_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{5}{2}$;

(d) $A = \int_0^1 \left(2^x - 3^{-x}\right) dx = \left[\frac{2^x}{\log 2} - \frac{3^{-x}}{\log 1/3}\right]_0^1 = \frac{1}{\log 2} - \frac{2}{\log 27}$.

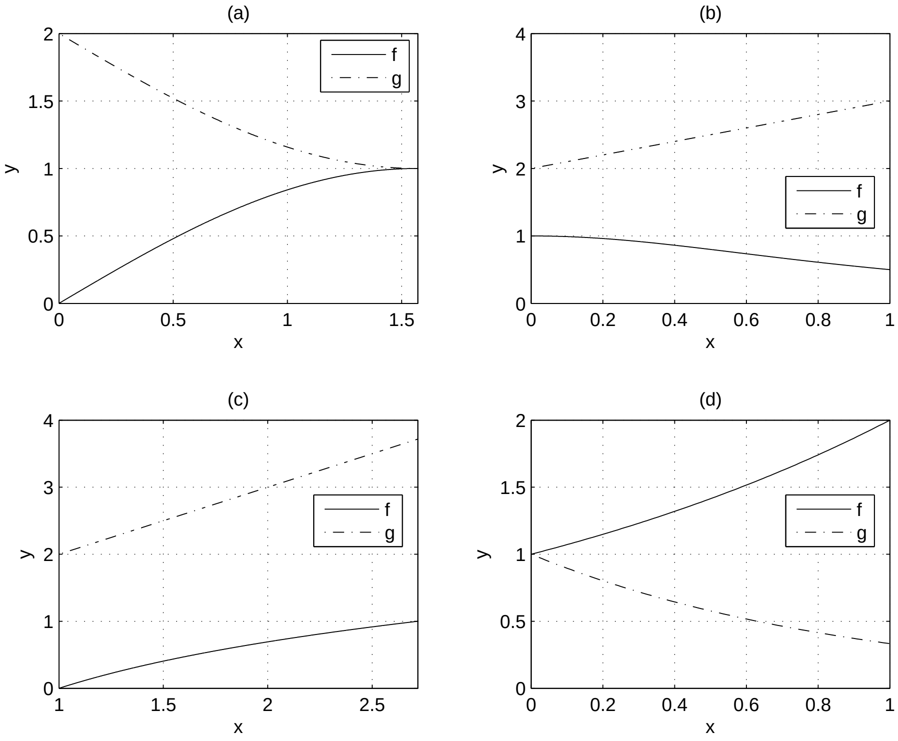

Figura 6.1: Vedi Esercizio 6.3.1.

6.3.2 Calcolare l'area dell'insieme $D = \{(x, y);\ x \geq 0,\ x^2 \leq y \leq 2x^2,\ y \leq 2\}$.

Risposta. L'insieme D giace nel primo quadrante; consiste della porzione di piano compresa tra le due parabole e la retta orizzontale $y = 2$. *Pertanto*

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^1 \left(2x^2 - x^2\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2 - x^2\right) dx \\ &= \int_0^1 x^2\, dx + 2\left(\sqrt{2} - 1\right) - \int_1^{\sqrt{2}} x^2\, dx \\ &= \frac{4}{3}(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Si noti che l'area di D poteva essere calcolata anche in altri modi. Ad esempio, sottraendo dall'area del quadrato $[0, \sqrt{2}] \times [0, 2]$ *le aree delle regioni a sinistra di D (cioè* $2 - \int_0^1 2x^2\, dx$*) e a destra di D (cioè* $\int_0^{\sqrt{2}} x^2\, dx$*).*

6.3.3 Determinare $\alpha > 0$ in modo che sia $\frac{5}{4}$ l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = x^\alpha$, per $x \in [0, 1]$.

Risposta. Vedi Figura 6.2. Poiché in $[0, 1]$ *si ha* $f(x) \geq g(x)$, *l'area richiesta è*

$$\int_0^1 (2 - x - x^\alpha)\, dx = \frac{3}{2} - \frac{1}{\alpha + 1}$$

che vale $\frac{5}{4}$ *se e soltanto se* $\alpha = 3$.

6.3.4 Si consideri la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, e la retta passante per i punti $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$. Calcolare l'area delle due regioni di piano in cui la retta divide il cerchio delimitato dalla circonferenza.

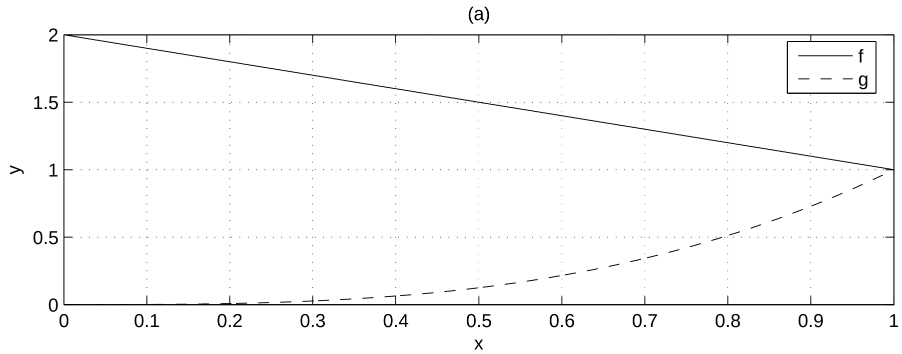

Figura 6.2: Vedi Esercizio 6.3.3.

Risposta. La distanza della corda che unisce i due punti $(\frac{1}{2},0)$, $(0,\frac{1}{2})$ *dall'origine è metà della diagonale del quadrato di lato* $1/2$*, dunque* $\sqrt{2}/4$*. Tramite una rotazione antioraria di* $\pi/4$ *il problema è pertanto ricondotto a quello di determinare l'area della porzione del cerchio di centro l'origine e raggio 1 che sta al di sopra alla retta di equazione* $y=\sqrt{2}/4$*.*

L'intersezione di tale retta con la circonferenza avviene nei punti di ascissa $\pm\sqrt{7/8}$*; per simmetria l'area cercata è dunque,col cambiamento di variabile* $x=\sin t$*,*

$$2\int_0^{\sqrt{7/8}}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\arcsin(\sqrt{7/8})}\cos^2 t\,dt = \arcsin\left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)+\frac{\sqrt{7}}{8}\,.$$

6.3.5 Per $0<a<b$ e $0<c<d$ si considerino le funzioni a/x e b/x nell'intervallo $[c,d]$. Dire come deve essere scelto d in modo che l'area della regione compresa tra i due grafici (nell'intervallo $[c,d]$) sia uguale a 1.

Risposta. L'area da calcolare è

$$\int_c^d\left(\frac{b}{x}-\frac{a}{x}\right)dx = (b-a)\int_c^d\frac{1}{x}\,dx = (b-a)\log\frac{d}{c}\,.$$

Si trova dunque $d=ce^{\frac{1}{b-a}}$*.*

6.3.6 Si consideri l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. Si calcoli l'area della regione interna all'ellisse e compresa tra le rette $x=0$ e $x=1$.

Risposta. Per simmetria l'area A richiesta è due volte l'area della regione interna all'ellisse, compresa tra $x=0$ *e* $x=1$ *e contenuta in* $y>0$*. Perciò, facendo il cambiamento di variabile* $x=2\sin\theta$*,*

$$A=2\int_0^1\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/6}(2\cos\theta)^2\,d\theta=4\left[\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

6.4 Integrali generalizzati

Per brevità in questa sezione non scriviamo esplicitamente l'operazione di limite che definisce un integrale generalizzato; ad esempio, se F è una primitiva di f scriveremo brevemente

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=[F(x)]_a^{+\infty}$$

al posto di

$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{r\to+\infty}\int_a^r f(x)\,dx=\lim_{r\to+\infty}(F(r)-F(a))\,.$$

6.4.1 Dire se i seguenti integrali sono convergenti o divergenti; nel primo caso, calcolarne il valore.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{1/5}^{+\infty} e^{-5x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{1-x}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^x}\, dx.$

Risposta.

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2};$

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = \left[\log\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^{+\infty} = \log 2;$

(c) posto $t = -5x$, *si ha* $\displaystyle\frac{1}{5}\int_{-\infty}^{-1} e^t dt = \frac{1}{5}\left[e^t\right]_{-\infty}^{-1} = \frac{1}{5e};$

(d) posto $1 - x = t$, *si ottiene* $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^t dt = +\infty;$

(e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^x}\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = -\frac{1}{\log 2}\left[\frac{1}{2^x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\log 2}.$

6.4.2 Provare che per $n \geq 3$ esiste finito $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^n}\, dx$ e dire quanto vale. Cosa si può dire per $n = 1$, $n = 2$?

Risposta. Si ha

$$\int_0^r x(x+1)^{-n}\, dx \quad = \quad \left[x\frac{(x+1)^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^r - \int_0^r \frac{(x+1)^{-n+1}}{-n+1}\, dx \to \frac{1}{(n-2)(n-1)}$$

per $r \to +\infty$. *Se* $n = 1$ *si ha che* $\frac{x}{(x+1)^n} \sim 1$ *e per* $n = 2$ *invece* $\frac{x}{(x+1)^n} \sim \frac{1}{x}$; *per il criterio di confronto asintotico per gli integrali generalizzati nessuno dei due relativi integrali può convergere.*

6.4.3 Dire se i seguenti integrali sono convergenti o divergenti; nel primo caso, calcolarne il valore.

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-3} dx$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

(e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

(f) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\log^2 x}\, dx.$

Risposta.

(a) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)^{-1/2} dx = 2\left[\sqrt{x-1}\right]_1^2 = 2.$

(b) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-3} dx = \left[\log|x-3|\right]_0^3 = -\infty.$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx = \left[-\frac{1}{x-2}\right]_0^2 = +\infty.$

(d) *posto* $\frac{1}{x} = t$, *si ottiene*

$$\int_1^{+\infty} e^t dt = \Big[e^t\Big]_1^{+\infty} = +\infty\,.$$

(e) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \frac{3}{2}\Big[(x-1)^{2/3}\Big]_1^2 = \frac{3}{2}.$

(f) *posto* $\log x = t$, *si ottiene*

$$\int_1^e \frac{1}{x\log^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2}\,dt = +\infty\,.$$

6.4.4 Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx.$

Risposta. L'insieme di integrazione $(0,+\infty)$ *non è limitato; la funzione integranda (positiva) non è limitata in tale intervallo. Per* $x \to +\infty$ *si ha* $\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2} \sim \frac{1}{x^{5/3}}$, *e la funzione* $\frac{1}{x^{5/3}}$ *è integrabile in senso generalizzato in ogni intervallo* $(a,+\infty)$, $a > 0$. *Tuttavia per* $x \to 0+$ *si ha* $\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$, *che non è integrabile in un intorno di* 0. *Pertanto l'integrale richiesto diverge a* $+\infty$.

6.5 Altri esercizi

6.5.1 Calcolare una somma di Riemann di indice 4 delle funzioni date qui sotto nei relativi intervalli. Calcolare poi gli integrali definiti di tali funzioni e valutare il valore assoluto della differenza tra i due risultati trovati.

(a) $f(x) = x^2 - 1$ in $[0,2]$

(b) $f(x) = 1 - x^3$ in $[0,1]$

Risposta. Sia f *una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato* $[a,b]$; *sia* $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ *una partizione dell'intervallo* $[a,b]$, $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *per* $i = 1,\ldots,n$. *Una somma di Riemann di* f *di indice* n *è allora*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,.$$

(a) *I punti della partizione sono* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 2$; *scegliamo (la scelta dei* c_i *è arbitraria)* $c_1 = \frac{1}{3}$, $c_2 = \frac{2}{3}$, $c_3 = \frac{4}{3}$, $c_4 = \frac{5}{3}$. *Pertanto calcoliamo*

$$\frac{2}{4}\Big(f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + f(c_4)\Big) = \frac{5}{9}\,.$$

Poiché

$$\int_0^2 (x^2 - 1)\,dx = \frac{2}{3}$$

il valore assoluto della differenza è $\frac{1}{9} \sim 0.11$.

(b) *Procediamo come sopra:* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$; *scegliamo come* c_i *i punti medi degli intervalli a cui appartengono, cioè* $c_1 = \frac{1}{8}$, $c_2 = \frac{3}{8}$, $c_3 = \frac{5}{8}$, $c_4 = \frac{7}{8}$. *Pertanto*

$$\frac{1}{4}\Big(f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + f(c_4)\Big) = \frac{388}{512}\,.$$

Infine

$$\int_0^1 (1 - x^3)\,dx = \frac{3}{4}$$

e il valore assoluto della differenza è $\frac{1}{128} \sim 0.008$.

6.5.2 Dati due numeri reali a, $b \neq 0$, calcolare $\displaystyle\int t\sqrt{a + bt^2}\,dt.$

Risposta. Si ha, per $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\int t\sqrt{a+bt^2}\,dt &= \frac{1}{2b}\int 2bt\sqrt{a+bt^2}\,dt = \frac{1}{2b}\frac{2}{3}(a+bt^2)^{3/2} + c\\ &= \frac{1}{3b}(a+bt^2)^{3/2} + c\,.\end{aligned}$$

6.5.3 Calcolare $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x (t + t^2 + t^3 + t^4)\, dt$.

Risposta. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (t + t^2 + t^3 + t^4)\, dt = x + x^2 + x^3 + x^4\,.$$

6.5.4 Calcolare $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt\right)$.

Risposta. La funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

è la funzione integrale di $f(x) = e^{x^2}$*, dunque* $F'(x) = f(x) = e^{x^2}$.

6.5.5 Calcolare la media integrale di

(a) $f(x) = x^4 - 1$ in $[0, 1]$

(b) $f(x) = \sqrt{x} - 1$ in $[0, 2]$

Risposta. La media integrale di una funzione f *in un intervallo* $[a, b]$ *è*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

(a) Poiché $b - a = 1$ *la media integrale è*

$$\int_0^1 (x^4 - 1)\, dx = -\frac{4}{5}\,.$$

(b) Qui $b - a = 2$*, dunque la media integrale è*

$$\frac{1}{2}\int_0^2 (\sqrt{x} - 1)\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\,.$$

6.5.6 Disegnare un grafico approssimativo della funzione $f(x) = x(1 - x)$ in $[0, 1]$. Sia $a \in [0, 1]$; calcolare la media integrale $M(a)$ di f nell'intervallo $[0, a]$. Per quali valori di a tale media integrale è massima?

Risposta. La media integrale di f *nell'intervallo* $[0, a]$ *è* $M(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \left(x - x^2\right) dx = \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3}$*. Per trovare il massimo della funzione* $M(a)$ *nell'intervallo* $[0, 1]$*, notiamo che* $M(0) = 0$*,* $M(1) = \frac{1}{6}$*. Inoltre* $M'(a) = 0$ *se e solo se* $a = \frac{3}{4}$*, e* $\frac{3}{4}$ *è un punto di massimo con valore massimo* $\frac{3}{16} > \frac{1}{6}$*. Pertanto il valore di* a *che rende massima la media integrale è* $a = \frac{3}{4}$.

6.5.7 Dire perché si può applicare il teorema della media integrale alla funzione $f(x) = \log x$ nell'intervallo $[1, 2]$, e calcolare esplicitamente il punto fornito da tale teorema.

Risposta. La funzione $f(x) = \log x$ *è continua in* $[1, 2]$*. Questo è sufficiente per poter applicare il teorema della media integrale, cioè*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx = f(c)$$

con $c \in (a, b)$*. Si trova* $\log c = \displaystyle\int_1^2 \log x\, dx = 2\log 2 - 1$*, da cui* $c = 4/e$.

6.5.8 Dare un esempio esplicito di:

(a) una funzione f non identicamente nulla, non dispari, tale che $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = 0$;

(b) una funzione f non identicamente nulla tale che

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_2^3 f(x)\, dx = \ldots = 0\,;$$

(c) una funzione f pari tale che $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = 0$.

Risposta. Si prenda, ad esempio:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ -1 & 1/2 < |x| < 1 \\ 0 & \text{altrove;} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0,\ x - [x] < 1/2 \\ -1 & x \geq 0,\ x - [x] \geq 1/2 \\ 0 & x < 0; \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ -1 & 1/2 < |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

6.5.9 Trovare un numero reale $a > 0$ in modo tale che:

(a) $\displaystyle\int_0^a e^{2x} dx = 1;$

(b) $\displaystyle\int_0^a \sin(3x) dx = \frac{1}{2}.$

Risposta.

(a) Si ha

$$\int_0^a e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^a = \frac{e^{2a} - 1}{2},$$

ed $\dfrac{e^{2a} - 1}{2} = 1$ *se e solo se* $e^{2a} = 3$, *cioè* $a = \log \sqrt{3}$*;*

(b) si ha

$$\int_0^a \sin(3x) dx = \left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^a = \frac{1 - \cos 3a}{3},$$

e $\dfrac{1 - \cos 3a}{3} = \dfrac{1}{2}$ *se e solo se* $\cos 3a = -\dfrac{1}{2}$, *cioè* $a = \dfrac{2\pi}{9}$.

6.5.10 Disegnare un grafico approssimativo delle funzioni $f(x) = x(1-x)$ e $g(x) = x(1-x^2)$ in $[0, 1]$, stabilendo in particolare la loro posizione reciproca. Calcolare il punto $x_* \in [0, 1]$ in cui la distanza verticale $|f(x) - g(x)|$ tra i due grafici è massima, specificando a quanto ammonta. Calcolare l'area della regione compresa tra i due grafici, per $x \in [0, x_*]$.

Risposta. Si veda la Figura 6.3. Nell'intervallo $[0, 1]$ *si ha* $|f(x) - g(x)| = g(x) - f(x) = x^2 - x^3$. *Nell'intervallo* $[0, 1]$ *la funzione* $x^2 - x^3$ *assume valore massimo per* $x_* = \frac{2}{3}$*; il suo valore massimo vale* $\frac{4}{27}$. *Infine*

$$\int_0^{2/3} \left(x^2 - x^3\right) dx = \frac{4}{81}.$$

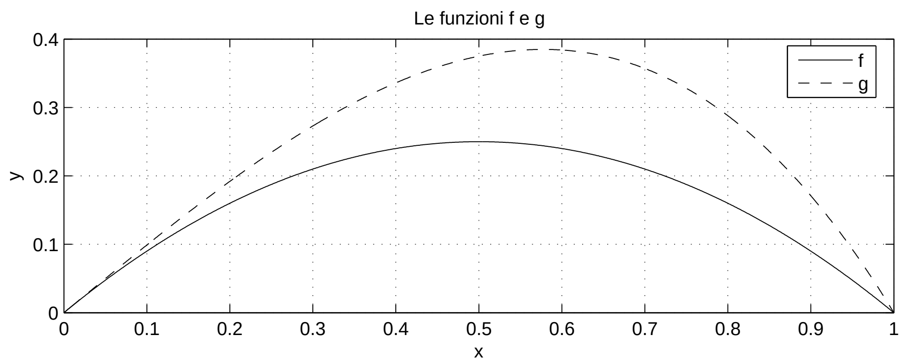

Figura 6.3: Vedi Esercizio 6.5.10.

Alcuni libri di esercizi

- M. Amar e A.M. Bersani. *Esercizi di analisi matematica.* Seconda edizione. Progetto Leonardo, 2004.
- B.P. Demidovich. *Esercizi e problemi di analisi matematica.* Editori Riuniti, 2003.
- E. Giusti. *Esercizi e complementi di analisi matematica.* Volume primo. Bollati Boringhieri, 1991.
- P. Marcellini e C. Sbordone. *Esercitazioni di matematica.* Volume I, parte prima e seconda. Liguori, 1995.
- S. Salsa e A. Squellati. *Esercizi di Analisi matematica 1.* Zanichelli, 2011.