Esercizi sui limiti di funzioni

Da ricordare:
Nel calcolo dei limiti si può
- sostituire una funzione con una sua asintotica (vedere le osservazioni fatte nello studio delle successioni)
- in una somma di "infiniti" si possono trascurare gli "infiniti" di ordine inferiore
- in una somma di "infinitesimi" si possono trascurare gli "infinitesimi" di ordine superiore.

Funzioni asintotiche per $x \to 0$

$$\sin x \sim x$$
$$\tan x \sim x$$
$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$
$$e^x - 1 \sim x$$
$$\log(1+x) \sim x$$ è invece: $\log(1+x) \sim \log(x)$ per $x \to +\infty$
$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$ctgx \sim \frac{1}{x}$$
$$arctgx \sim x$$
$$\arcsin x \sim x$$

Le espressioni possono essere generalizzate. Se $\varepsilon(x) \to 0$ ed è definitivamente diversa da zero (cioè è un infinitesimo per $x \to c$) si può sostituire x con $\varepsilon(x)$.

$$\sin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$
$$\tan \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$
$$1-\cos \varepsilon(x) \sim \frac{1}{2}(\varepsilon(x))^2$$
$$e^{\varepsilon(x)} - 1 \sim \varepsilon(x)$$
$$\log(1+\varepsilon(x)) \sim \varepsilon(x)$$
$$(1+\varepsilon(x))^\alpha - 1 \sim \alpha(\varepsilon(x)), \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\cot g\varepsilon(x) \sim \frac{1}{\varepsilon(x)}$$
$$\arctan \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$
$$\arcsin \varepsilon(x) \sim \varepsilon(x)$$

Gerarchia degli infiniti (in ordine crescente). Consideriamo e tre famiglie di funzioni:

$(\log_a x)^\alpha \quad x^\beta \quad b^x$ con $\alpha, \beta > 0$ e $a, b > 1$

Allora, per $x \to +\infty$, ognuna è un infinito di ordine inferiore rispetto a quella che le sta a destra:

Quindi: $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0$

Esercizio 1. Limiti *"fondamentali"* e riconducibili.

a. Da $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ deduci i seguenti limiti:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{x}=\alpha$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}=1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

b. Da $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ dove il simbolo $x\to\pm\infty$ significa $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, deduci:

- $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=1$
- $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

Esercizi0 2. Calcola i seguenti limiti che si presentano sotto forma di indecisione (alcuni sono stati assegnati all'esame):

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\sin(3x)}$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1}$
3. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x\right)$
4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}$
5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}$
6. $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x)$
7. $\lim_{x\to 0^+}x^x$.
8. $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

9. $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right)\right]$

10. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x$

11. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\log\left(1+2x^2\right)}$.

12. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-|x|\right)$, suggerimento: calcola separatamente $\lim_{x\to+\infty}$ e $\lim_{x\to-\infty}$

13. $\lim_{x\to 1}\frac{(\log x)^2}{(2x-2)^2}$

14. $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2^{x+\frac{1}{2}}+\log|x|}{x^2+1}$, suggerimento: calcola separatamente $\lim_{x\to+\infty}$ e $\lim_{x\to-\infty}$

15. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\sin 2x)^2}{\sin\left(x^3\right)}$

16. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x)}{1+\log x}$

17. $\lim_{x\to 0} xe^{\sin\frac{1}{x}}$

18. $\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{\sin x}$

Esercizi assegnati agli esami:

Esercizio 3. Determina $a\geq 0$ e $b\geq 0$ in modo che la successione $a_n=\left(\frac{2a+b-1}{a}\right)^n$ sia convergente. Disegna nel piano cartesiano aOb l'insieme delle coppie (a,b) del punto precedente.

Esercizio 4. Al variare del parametro $a\in\mathbb{R}$ stabilisci quando esiste il $\lim_{n\to\infty}\left((2a)^n-a^n\right)$

Esercizio 5. Esiste un numero $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ tale che $\lim_{n\to\infty}\left(3^n-2^n-a^n\right)=0$?

Esercizio 6. Sia $\{a_n\}$ una successione limitata con $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Stabilisci se le tre successioni di termine generale $\frac{1}{a_n}$, $\frac{1}{1+a_n}$, $\frac{1}{\log a_n}$ sono necessariamente limitate.