Esercizi tratti dal testo: Marco Bramanti, Esercitazioni di Analisi Matematica I.

- Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine e con resto di Peano, di

$f(x)=e^{\sin x}$, centrato nel punto $x_0=\frac{\pi}{6}$.

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+o\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$f(x)=e^{\sin x}\to f\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Calcoliamo le derivate successive:

$$f'(x)=e^{\sin x}\cdot\cos x\to f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3e}}{2}$$

$$f''(x)=e^{\sin x}\cdot\left(\cos^2 x-\sin x\right)\to f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{e}}{4}$$

$$f(x)=\sqrt{e}+\frac{\sqrt{3e}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{e}}{8}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+o\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2$$

- Scrivere lo sviluppo di MacLaurin, al terzo ordine, di $f(x)=Sh(2x)-2e^x$ e dedurre la natura del punto $x_0=0$.

$$Sh(x)=x+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\to Sh(2x)=2x+\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$

$$f(x)=2x+\frac{4}{3}x^3-2-2x-x^2-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)=-2-x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

Indicando con c_n i coefficienti dello sviluppo [$c_0=-2$; $c_1=0$; $c_2=-1$ e $c_3=1$] è:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=c_n\to f^{(n)}(0)=n!c_n$$

$f(0)=c_0=-2$

$f'(0)=c_1=0$, quindi $x_0=0$ è un punto stazionario

$f''(0)=2\cdot c_2=-2<0$, quindi $x_0=0$ è un punto di massimo relativo.

- Determinare

il coefficiente del termine di terzo grado del polinomio di MacLaurin che approssima la funzione:

$$f(x)=\log\left(1+2x+x^2\right)$$

e la derivata terza calcolata in $x_0=0$.

Dallo sviluppo di $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$

$$f(x)=\log\left(1+2x+x^2\right)=2x+x^2-\frac{1}{2}\left(2x+x^2\right)^2+\frac{1}{3}\left(2x+x^2\right)^3+o\left(x^3\right)=$$

$$2x+x^2-\frac{1}{2}\left(4x^2+4x^3\right)+\frac{1}{3}\left(8x^3\right)+o\left(x^3\right)=2x-x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

Nello sviluppo si sono tenute solo le potenze ≤ 3.

Quindi il coefficiente dello sviluppo al terzo ordine è $c_3=\frac{2}{3}$, la derivata terza calcolata nel punto $x_0=0$ è:

$f^{(3)}(0)=3!c_2=-4$.

- Si consideri la funzione $f(x)=x^5\left(e^{x^3}-\sin\left(x^2\right)\right)$, calcolare $f^{(11)}(0)$.

Calcoliamo lo sviluppo di MacLaurin ordine 6 di $g(x)=e^{x^3}-\sin(2x)$... perché di ordine 6?

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right),\qquad e^{x^3}=1+x^3+\frac{x^6}{2}+o\left(x^6\right)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right),\qquad \sin\left(x^2\right)=x^2-\frac{x^6}{6}+o\left(x^6\right)$$

$$f(x)=x^5\left(e^{x^3}-\sin\left(x^2\right)\right)=x^5\left(1+x^3+\frac{x^6}{2}+o\left(x^6\right)-x^2+\frac{x^6}{6}-o\left(x^6\right)\right)=x^5\left(1-x^2+x^3+\frac{2}{3}x^6+o\left(x^6\right)\right)=$$

$$=x^5-x^7+x^8+\frac{2}{3}x^{11}+o\left(x^{11}\right)$$

Da $\frac{f^{(11)}(0)}{11!}=\frac{2}{3}\rightarrow f^{(11)}(0)=\frac{2}{3}\cdot 11!$

- Stabilire l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x\rightarrow 0$ della funzione

$$f(x)=\left(2+\cos(3x)-3Chx\right)^4\cdot\log\left(1+x^3\right).$$

Osserviamo che è $\lim_{x\rightarrow 0}f(x)=0$, quindi $f(x)$ è un infinitesimo per $x\rightarrow 0$.

La richiesta di determinare la parte principale dell'infinitesimo consiste nel determinare il primo termine significativo (cioè non nullo) del suo sviluppo.

Se ci fermiamo al primo ordine:

$\cos(3x)=1+o(x)$; $Chx=1+o(x)$

$*\, 2+\cos(3x)-3Chx = 2+1+o(x)-3-o(x) = o(x)$ ... troppo poche informazioni!

Arrestiamoci al secondo ordine:

$$\cos(3x) = 1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2), \quad Chx = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$2+\cos(3x)-3Chx = 2+1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)-3-\frac{3}{2}x^2+o(x^2) = -6x^2+o(x^2)$$

$$\log(1+x^3) = x^3+o(x^3)$$

$$f(x) = (2+\cos(3x)-3Chx)^4\cdot\log(1+x^3) = (-6x^2+o(x^2))^4\cdot(x^3+o(x^3))$$
$$=(1296x^8+o(x^8))\cdot(x^3+o(x^3)) = 1296x^{11}+o(x^{11})$$

Quindi: parte principale dell'infinitesimo è $1296x^{11}$, ordine di infinitesimo è 11.

Alcune considerazioni sugli sviluppi:
nelle somme: ogni termine deve essere sviluppato allo stesso ordine
nel prodotto: non c'è alcuna relazione a priori tra i gradi cui occorre sviluppare i diversi fattori. Il criterio è che di ogni fattore dobbiamo determinare la parte principale, cioè il primo termine non nullo dello sviluppo. Per esempio nell'esercizio precedente lo sviluppo * non è sufficiente.

Calcolo di limiti:

- $$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-x^2}-\sin x+\frac{5}{6}x^3}{(x+2x^2)^2\log^3\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Approssimiamo al primo ordine:

$$e^x = 1+o(1) \to e^{-x^2} = 1+o(1) \to xe^{-x^2} = x+o(x)$$

$$\sin x = x+o(x)$$

Numeratore:

$$xe^{-x^2}-\sin x+\frac{5}{6}x^3 = x+o(x)-x-o(x)+\frac{5}{6}x^3 = \frac{5}{6}x^3+o(x) = o(x)$$ Troppe poche informazioni!

Approssimiamo al terzo ordine:

$$e^x = 1+x+o(x) \to e^{-x^2} = 1-x^2+o(x^2) \to xe^{-x^2} = x-x^3+o(x^3)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Numeratore:

$$xe^{-x^2}-\sin x+\frac{5}{6}x^3 = x-x^3+o(x^3)-x+\frac{x^3}{6}-o(x^3)+\frac{5}{6}x^3 = o(x^3)$$ Ancora troppe poche informazioni!

Approssimiamo al quinto ordine:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \to e^{-x^2} = 1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4) \to xe^{-x^2} = x-x^3+\frac{x^5}{2}+o(x^5)$$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$

Numeratore:

$xe^{-x^2} - \sin x + \frac{5}{6}x^3 = x - x^3 + \frac{x^5}{2} + o\left(x^5\right) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - o\left(x^5\right) + \frac{5}{6}x^3 = \frac{59}{120}x^5 + o\left(x^5\right)$

per il denominatore:

$\left(x + 2x^2\right)^2 = x^2 + o\left(x^2\right)$

$\log^3\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^3 = \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)$

Denominatore:

$\left(x + 2x^2\right)^2 \log^3\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \left(x^2 + o\left(x^2\right)\right) \cdot \left(\frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right) = \frac{x^5}{8} + o\left(x^5\right)$

Quindi il limite richiesto è $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{59}{120}x^5}{\frac{1}{8}x^5} = \frac{59}{15}$.

- $\lim_{x \to 1} \frac{1 + \log x - e^{x-1}}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$, cambiamento di variabile: $t = x - 1$

$\lim_{t \to 0} \frac{1 + \log(1+t) - e^t}{t^2} =$

Primo ordine:

$1 + \log(1+t) - e^t = 1 + t + o(t) - 1 - t - o(t) = o(t)$, troppe poche informazioni.

secondo ordine:

$1 + \log(1+t) - e^t = 1 + t - \frac{t^2}{2} - 1 - t - -\frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right) = -t^2 + o\left(t^2\right)$

pertanto è: $\lim_{t \to 0} \frac{1 + \log(1+t) - e^t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{-t^2}{t^2} = -1$

Si poteva pervenire allo stesso risultato applicando il teorema di De L'Hospital due volte.

In generale, calcolare il limite di un quoziente $\frac{f}{g}$ che si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ sviluppando fino all'ordine n numeratore e denominatore, equivale ad applicare n volte il teorema di De L'Hospital. Concettualmente quindi i due strumenti sono equivalenti. Il vantaggio del primo si ha quando le funzioni elementari coinvolte hanno sviluppi noti, per cui in realtà non calcoliamo niente ma sostituiamo opportune espressioni ad altre; il vantaggio del secondo si ha nei casi in cui qualche sviluppo sarebbe scomodo da calcolare (se non ricorrendo alla definizione, e quindi calcolando le derivate) e/o quando il punto x_0 cui tende la variabile non è zero.

- Sia $f(x)=\dfrac{\log(1+x)}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di $f(x)$ fino al primo termine non nullo.

Utilizzare tale risultato per calcolare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|f(x)|}}{x}$

$$\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x}=1-\frac{x}{2}+o(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}+o(x)$$

$f(x)=\dfrac{\log(1+x)}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\dfrac{x}{2}+o(x)-1+\dfrac{x}{2}-o(x)=o(x)$, non va bene, devo cercare un'approssimazione migliore.

$$\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+o\left(x^2\right)$$

$$f(x)=\frac{\log(1+x)}{x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o\left(x^2\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o\left(x^2\right)\right)=-\frac{1}{24}x^2+o\left(x^2\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|f(x)|}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{24}x^2}}{x}=\sqrt{\frac{1}{24}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

- Calcolare il $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\sin x-\log(1+x)\right)\cdot x^{\alpha}\right]$, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\sin x-\log(1+x)=\left(x+o(x)\right)-\left(x+o(x)\right)=o(x)$, non riusciamo a determinare la parte principale dell'infinitesimo.

Sviluppiamo al secondo ordine:

$$\sin x-\log(1+x)=\left(x+o\left(x^2\right)\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)=\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\sim\frac{x^2}{2}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\sin x-\log(1+x)\right)\cdot x^{\alpha}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}\right)x^{\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2+\alpha}}{2}=\begin{cases}0,\alpha>-2\\ \frac{1}{2},\alpha=-2\\ +\infty,\alpha<-2\end{cases}$$

- Sviluppo di MacLaurin di una funzione composta.

Scrivere lo sviluppo di MacLaurin al terzo ordine della funzione $f(x)=e^{\sin x}$.

$$e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+o\left(\sin^3 x\right)=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3 x}{6}+o\left(x^3\right)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$

$$e^{\sin x}=1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^3+o\left(x^3\right)=$$

$$1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x^2+o\left(x^3\right)\right)+\frac{1}{6}\left(x^3+o\left(x^3\right)\right)+o\left(x^3\right)=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)$$

Osserviamo che non si sono sviluppati algebricamente il quadrati e il cubo dello sviluppo di $\sin x$, ma si sono scritte solo le potenze di grado ≤ 3.

Osserviamo inoltre che il risultato è lo sviluppo del terzo ordine di n $e^{\sin x}$ anche se manca il termine in x^3, lo sviluppo ci dice che tale termine è nullo, e quindi che la derivata terza calcolata in zero è nulla.

E' corretto anche scrivere:

* $e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$, ma ho meno informazioni dello sviluppo precedente.

- Sfruttando lo sviluppo precedente, calcolare il $\lim_{x\to 0}\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left[1^{+\infty}\right]$

Innanzitutto scriviamo: $\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\log\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\frac{\log\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)}{x^2}}$

$$\frac{\log\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)}{x^2}=\frac{1}{x^2}\log\left(1+\left(e^{\sin x}-\log(1+x)-1\right)\right)\sim\frac{1}{x^2}\left(e^{\sin x}-\log(1+x)-1\right):=\frac{h(x)}{x^2}$$

Determiniamo ora la parte principale della funzione infinitesima $h(x)=e^{\sin x}-\log(1+x)-1$

$h(x)=e^{\sin x}-\log(1+x)-1=e^{\sin x}-1-\log(1+x)\sim\sin x-x\sim x-x$, dobbiamo ricorrere allo sviluppo del secondo ordine.

dallo sviluppo precedente * possiamo scrivere: $e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$

$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$, quindi:

$$h(x)=e^{\sin x}-\log(1+x)-1=1+x+\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}x^2-1+o\left(x^2\right)=x^2+o\left(x^2\right)\sim x^2$$

$\frac{\log\left(e^{\sin x}-\log(1+x)\right)}{x^2}\to 1$, pertanto il limite è: $e^1=e$.