Esercizio 1 *In una vasca della capacità di* 200 dm^3 *e che inizialmente contiene* 100 lt. *di acqua, una pompa immette k lt. ($k > 0$) di acqua al minuto. Da un foro sul fondo l'acqua esce con portata proporzionale all'acqua contenuta nella vasca e con fattore di proporzionalità $\frac{1}{10}$ (esprimendo la portata in lt./min.). Determinare i valori di k tali che la vasca si riempie e, per tali valori di k il tempo necessario affinché la vasca si riempia.*

Soluzione. Detta $y(t)$ la quantità d'acqua presente nella vasca all'istante t, la variazione di $y(t)$ nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$ può essere espressa da

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx k\Delta t - \frac{1}{10}y(t)\Delta t$$

Dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$ otteniamo l'equazione differenziale $y' + \frac{1}{10}y = k$. La soluzione generale di questa equazione differenziale (ottenuta moltiplicando per il fattore integrante $e^{\frac{1}{10}t}$, e poi integrando) è $y(t) = 10k + c\,e^{-\frac{1}{10}t}$. Dalla condizione iniziale $y(0) = 200$ ricaviamo $c = 100 - 10k$ e la quantità d'acqua presente nella vasca in funzione di t (e di k) è data da $y(t) = 10k + (100 - 10k)\,e^{-\frac{1}{10}t}$.

Affinché la vasca si riempia, l'equazione $y(t) = 200$ deve avere soluzioni positive:

$$y(t) = 200 \quad \Rightarrow \quad 200 = 10k + (100 - 10k)\,e^{-\frac{1}{10}t} \quad \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{1}{10}t} = \tfrac{200-10k}{100-10k} \quad \Rightarrow \quad t = -10\log\left(\tfrac{200-10k}{100-10k}\right) = 10\log\left(\tfrac{100-10k}{200-10k}\right)$$

Il valore di t in questa equazione risulta positivo se $\frac{100-10k}{200-10k} > 1$, cioè se $k > 20$. Per tali valori di k dunque la vasca si riempie e il tempo necessario al riempimento è $10\log\left(\frac{100-10k}{200-10k}\right)$.

■

Esercizio 2 *Una vasca contiene inizialmente* 1000 l. *d'acqua. Dal fondo l'acqua esce con velocità (in litri al minuto) proporzionale $\sqrt[3]{y(t)}$, con coefficiente di proporzionalità $k > 0$, dove $y(t)$ indica la quantità d'acqua presente nella vasca all'istante t.*

Determinare la funzione $y(t)$ ed i valori di k tali che la vasca si svuoti in meno di 10 *minuti.*

Soluzione. La variazione di $y(t)$ nell'intervallo $[t, t+\Delta t]$ può essere espressa da $y(t+\Delta t) - y(t) \approx -k\sqrt[3]{y(t)}\Delta t$. Dividendo per Δt e facendo tendere questo valore a 0, otteniamo l'equazione differenziale $y' = -k\sqrt[3]{y}$. Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili. La soluzione particolare $y(t) \equiv 0$ non verifica la condizione iniziale $y(0) = 1000$. Abbiamo quindi:

$$\frac{dy}{dt}\frac{1}{\sqrt[3]{y}} = -k \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy = \int -k\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = -kt + c$$

Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 150$, per cui, in forma implicita, la soluzione dell'equazione differenziale è $\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2} = -kt + 150$. La soluzione in forma esplicita si ottiene ricavando y tenendo presente che i dati del problema richiedono $y(t) \geq 0$.

$$y(t) = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}kt + 100\right)^3}$$

Il tempo necessario perché la vasca si svuoti è la soluzione dell'equazione

$$y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(-\frac{2}{3}kt + 100\right)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3}kt + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{150}{k}$$

Affinché la vasca si svuoti in meno di 10 minuti deve essere $\frac{150}{k} < 10$, cioè $k > 15$. ■

Esercizio 3 *Determinare la soluzione dell'equazione differenziale* $y' = y + xe^{3x}$ *che verifica la condizione iniziale* $y(0) = 1$.

Soluzione. L'equazione differenziale può essere scritta nella forma $y' - y = xe^{3x}$ e, moltiplicando per il fattore integrante e^{-x}, nella forma $e^{-x}y' - e^{-x}y = xe^{2x}$, cioè $\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = xe^{2x}$. Integrando per parti abbiamo $\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$. La soluzione generale dell'equazione differenziale è quindi

$$e^{-x}y = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2}xe^{3x} - \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{x}$$

Dalla condizione iniziale $y(0) = 1$ ricaviamo $1 = -\frac{1}{4} + c$. La soluzione particolare è dunque $y(x) = \frac{1}{2}xe^{3x} - \frac{1}{4}e^{3x} + \frac{5}{4}e^{x}$. ■

Esercizio 4 *Data l'equazione differenziale* $(*)$ $y'' + 3y' - 4y = 15e^{x}$, *determinarne la soluzione generale e la soluzione particolare che verifica le condizioni iniziali* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Soluzione. L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -4$. La soluzione generale dell'omogenea associata è dunque $y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-4x}$. La soluzione generale dell'equazione $(*)$ si ottiene aggiungendo una sua soluzione particolare alla soluzione generale dell'omogenea associata. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $\overline{y}(x) = Axe^{x}$ perché la funzione $15e^{x}$ è una soluzione dell'omogenea associata.

Abbiamo $\overline{y}\,'(x) = Ae^{x} + Axe^{x}$ e $\overline{y}\,''(x) = 2Ae^{x} + Axe^{x}$. Sostituendo $\overline{y}(x)$, $\overline{y}\,'(x)$ e $\overline{y}\,''(x)$ in $(*)$ otteniamo $2Ae^{x} + Axe^{x} + 3Ae^{x} + 3Axe^{x} - 4Axe^{x} = 15e^{x}$, da cui segue $A = 3$. La soluzione generale di $(*)$ è dunque $y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-4x} + 3xe^{x}$.

La derivata prima di $y(x)$ è $y'(x) = c_1e^{x} - 4c_2e^{-4x} + 3e^{x} + 3xe^{x}$. Dalle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$ segue $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - 4c_2 + 3 = 0 \end{cases}$ che ha come soluzione $c_1 = \frac{1}{5}$, $c_2 = \frac{4}{5}$.

La soluzione di $(*)$ che verifica le condizioni iniziali è dunque $y(x) = \frac{1}{5}e^{x} + \frac{4}{5}e^{-4x} + 3xe^{x}$. ■

Esercizio 5 *Un serbatoio della capacità di* 100 lt *è inizialmente vuoto. Una pompa versa nel serbatoio dell'acqua con portata di* 5 lt/min. *L'acqua esce dal fondo con portata proporzionale alla quandità contenuta nel serbatoio e coefficiente di proporzionalità (in litri al minuto) uguale a* k (> 0).

(a) *Determinare la quantità d'acqua presente nel serbatoio in funzione del tempo (in minuti) e di k.*

(b) *Determinare l'insieme dei valori di k per cui il serbatoio si riempie e, per tali valori, determinare il tempo necessario affinché il serbatoio si riempia.*

Soluzione. (a) Indichiamo con $y(t)$ la quantità d'acqua presente nel serbatoio all'istante t. La variazione di $y(t)$ nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$ può essere approssimata da: $y(t + \Delta t) - y(t) \approx 5\Delta t - ky(t)\Delta t$. Dividendo per Δt e facendo tendere Δt a 0, otteniamo l'equazione differenziale $y'(t) + ky(t) = 5$. Moltiplicando per il fattore integrante è e^{kt} otteniamo

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{kt}\right) = 5e^{kt} \;\Rightarrow\; y(t)e^{kt} = \frac{5}{k}e^{kt} + c \;\Rightarrow\; y(t) = \frac{5}{k} + ce^{-kt}$$

Dalla condizione iniziale $y(0) = 0$ otteniamo $c = -\frac{5}{k}$ e dunque la quantità d'acqua presente nel serbatoio è data da $y(t) = \frac{5}{k} - \frac{5}{k}e^{-kt}$

(b) Affinché il serbatoio si riempia dovrà avere soluzioni positive l'equazione

$$(*)\; \frac{5}{k} - \frac{5}{k}e^{-kt} = 100 \;\Rightarrow\; e^{-kt} = \frac{k}{5}\left(\frac{5}{k} - 100\right) = 1 - 20k \;\Rightarrow\; t = -\frac{1}{k}\log(1 - 20k)$$

Il logaritmo esiste, e quindi l'equazione ha soluzione, per $1 - 20k > 0$, cioè per $k < \frac{1}{20}$. Osserviamo poi che, essendo $k > 0$, $\log(1 - 20k) < 0$ e quindi la soluzione è positiva. ■

Esercizio 6 *Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y' = 3x^2(y - 1)^3$ che verifica la condizione $y(1) = 2$.*

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. La soluzione costante $y(x) = 1$, ottenuta annullando il termine a destra dell'uguaglianza, non verifica la condizione iniziale data dal problema.

Possiamo dunque scrivere l'equazione differenziale come $\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{1}{(y-1)^3} = 3x^2$. Integrando otteniamo

$$\int \frac{1}{(y-1)^3}\,dy = \int 3x^2\,dx \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{2(y-1)^2} = x^3 + c$$

Dalla condizione iniziale $y(1) = 2$ ricaviamo $c = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$, da cui segue

$$(y-1)^2 = \frac{1}{-2x^3 + 3} \quad\Rightarrow\quad y(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{-2x^3 + 3}}$$

dove il segno della radice è stato scelto tenendo presente la condizione iniziale. La soluzione è definita quando $-2x^3 + 3 > 0$, cioè $x < \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

■

Esercizio 7 *Un serbatoio avente la capacità di 100 l. contiene inizialmente 12 kg di sale sciolti in acqua. Nel serbatoio viene immersa acqua pura alla velocità di 5 l./s. e, alla stessa velocità, esce la miscela da una valvola posta sul fondo.*

(a) Dire in quanto tempo la quantità di sale si dimezza.

(b) Dire quale dovrebbe essere la velocità di entrata dell'acqua pura e di uscita della miscela affinché la quantità di sale si dimezzi in 1 minuto.

Soluzione. Indichiamo con $y(t)$ la quantità di sale all'istante t. Nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$, la quantità di sale che esce dal serbatoio è data da $\frac{y(t)}{100} \cdot 5 \cdot \Delta t$, poiché $\frac{y(t)}{100}$ è la quantità di sale per litro all'istante t. Abbiamo quindi

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx -\frac{y(t)}{20}\Delta t \quad \Rightarrow \quad y'(t) = -\frac{y(t)}{20}$$

Questa equazione differenziale è a variabili separabili. Integrando (tenendo presente che y può assumere solo valori positivi) otteniamo

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{1}{20}\,dt \quad \Rightarrow \quad \log y = -\frac{1}{20}t + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = e^{-\frac{1}{20}t}e^c$$

Dalla condizione iniziale $y(0) = 12$ ricaviamo $e^c = 12$ e quindi la quantità di sale presente nella miscela è data da $y(t) = 12\,e^{-\frac{1}{20}t}$. Il tempo necessario affinché la quantità di sale si dimezzi, è la soluzione dell'equazione $y(t) = 6$:

$$12\,e^{-\frac{1}{20}t} = 6 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{20}t = \log\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t = 20\log 2$$

(b) Indichiamo con k la velocità di uscita e di entrata dell'acqua. L'esercizio si può impostare esattamente come prima, mantenendo la costante k al posto della velocità 5:

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx -\frac{y(t)}{100}k\Delta t \quad \Rightarrow \quad y'(t) = -\frac{y(t)}{100}k \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = e^{-\frac{1}{100}kt}e^c \quad \Rightarrow \quad y(t) = 12e^{-\frac{1}{100}kt}$$

La condizione che la quantità di sale si dimezzi in un minuto equivale a

$$y(60) = 12e^{-\frac{3}{5}k} = 6 \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{5}k = \log\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{5}{3}\log 2$$

■

Esercizio 8 *Data l'equazione differenziale*

$$y' = e^y + 2xe^y$$

a) determinarne la soluzione generale precidando, per ogni soluzone, il campo di esistenza;

b) determinare la soluzione particolare corrispondente alle condizioni iniziali $y(0) = -2$.

Soluzione. L'equazione differenziale può essere scritta come $e^{-y}y' = 1 + 2x$; si tratta quindi di una equazione differenziale a variabili separabili. Integrando, otteniamo $-e^{-y} =$

$x + x^2 + c$, cioè $y = -\log(-x - x^2 - c)$. La funzione $\log(-x - x^2 - c)$ è definita quando $-x - x^2 + c > 0$, cioè per $\dfrac{-1-\sqrt{1-4c}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{1-4c}}{2}$; questo intervallo contiene punti reali per $c < \frac{1}{4}$. L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale è quindi dato da

$$y = -\log(-x - x^2 - c), \qquad c < \frac{1}{4}$$

Posto $y(0) = -2$, otteniamo $2 = \log(-c)$ e $c = -e^2$, per cui la soluzione particolare è $y = -\log(-x - x^2 + e^2)$. ■

Esercizio 9 *In una zona di montagna gli abeti si riproducono con tasso annuo del* 10%. *(a) Supposto che inizialmente la zona sia completamente disboscata e che vengano piantati 700 nuovi abeti all'anno, dire quanti anni anni sono necessari per avere un bosco di* 10000 *abeti. (b) Supposto che inizialmente la zona contenga* 10000 *abeti, e che ogni ne anno vengano tagliati* $k > 0$*, dire se esistono valori di* k *tali che il numero di abeti resta sempre compreso tra* 9000 *e* 11000.

Soluzione. (a) Detto $y(t)$ il numero di abeti all'anno t, abbiamo $y(0) = 0$ e

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx 700\Delta t + \frac{1}{10}y(t)\Delta t \qquad \stackrel{\Delta t \to 0}{\Longrightarrow} \qquad y' - \frac{1}{10}y = 700$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale è $y(t) = -7000 + c\, e^{\frac{t}{10}}$. Posto $y(0) = 0$, otteniamo $c = 7000$ e quindi il numero di abeti in funzione del tempo (espresso in anni) è $y(t) = -7000 + 7000\, e^{\frac{t}{10}}$. Il tempo necessario per avere 10000 abeti è quindi la soluzione dell'equazione $10000 = -7000 + 7000\, e^{\frac{t}{10}}$, cioè $t = 10 \log \frac{17}{7}$ anni.

(b) In questo caso, l'equazione differenziale diventa $y' - \frac{1}{10}y = -k$, che ha come soluzione generale $y(t) = 10k + c\, e^{\frac{t}{10}}$. Poiché $y(0) = 10000$, abbiamo $c = 10000 - 10k$. Il numero di alberi in funzione di t è quindi

$$y(t) = 10k + (10000 - 10k)e^{\frac{t}{10}}$$

L'andamento della funzione $y(t)$ dipende dal coefficiente di $e^{\frac{t}{10}}$. Possiamo distinguere tre casi:

Caso a: $10000 - 10k > 0$, cioè $k < 1000$. In tal caso, abbiamo $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$ e quindi il numero di alberi esce dall'intervallo $[9000, 11000]$.

Caso b: $10000 - 10k = 0$, cioè $k = 1000$. In questo caso il numero di alberi è costantemente uguale a 10000 ed in particolare è sempre compreso tra 9000 e 11000.

Caso c: $10000 - 10k < 0$, cioè $k > 1000$. Consideriamo l'equazione $10k + (10000 - 10k)e^{\frac{t}{10}} = 0$; poiché $\dfrac{-10k}{10000 - 10k} > 0$, questa equazione ha la soluzione reale $t_0 = 10 \log\left(\dfrac{-10k}{10000 - 10k}\right)$. Osserviamo inoltre che $\dfrac{-10k}{10000 - 10k} = \dfrac{10k}{10k - 10000} > 1$ e quindi $t_0 > 0$. Possiamo quindi concludere che per questi valori di k la piantagione si estingue; in particolare il numero di abeti esce dall'intervallo $[9000, 11000]$. ■

Esercizio 10 *Un serbatoio contiene inizialmente 100 litri di acqua pura. Viene versata nel serbatoio, alla velocità di 10 litri al minuto, una miscela contenente 30 grammi di sale per litro. Una pompa preleva dal serbatoio la miscela contenuta (che si suppone sempre omogenea) alla stessa velocità di 10 litri al minuto.*

(a) Dire se la quantità $S(t)$ di sale contenuta nel serbatoio raggiunge i 4 Kg e, in caso di risposta affermativa, determinare il tempo necessario affinché questa quantità venga raggiunta.

(b) Come (a), con 2 Kg di sale anzichè 4 Kg di sale.

Soluzione. Determiniamo innanzitutto la funzione $S(t)$ corrispondente alla quantità di sale presente nel serbatoio all'instante t. La quantità di sale che entra nel serbatoio nell'intervallo di tempo Δt è grammi $30 \cdot 10 \cdot \Delta t$. La quantità di sale per ogni litro di miscela del serbatoio è $\dfrac{S(t)}{100}$ e quindi la quantità di sale che esce nell'intervallo di tempo Δt può essere approssimata (per valori piccoli di Δt) con $\dfrac{S(t)}{100} \cdot 10 \cdot \Delta t$. Possiamo quindi scrivere

$$S(t+\Delta t) - S(t) \approx 300\Delta t - \frac{S(t)}{10}\Delta t \qquad \overset{\Delta t \to 0}{\Longrightarrow} \qquad S' + \frac{1}{10}S = 300$$

La soluzione generale di questa equazione differenziale è $S(t) = 3000 + c\,e^{-\frac{t}{10}}$. Posto $S(0) = 0$, poiché inizialmente il serbatoio contiene acqua pura, otteniamo $c = -3000$ e quindi la quantità di sale (espressa in grammi) in funzione del tempo (espresso in minuti) è $S(t) = 3000 - 3000\,e^{-\frac{t}{10}}$.

(a) La quantità di sale raggiunge i 4 Kg se l'equazione $S(t) = 4000$ ha soluzioni positive. Tale equazione è equivalente a $1 = -3e^{-\frac{t}{10}}$ e non ha soluzioni reali.

(b) In questo caso invece la risposta è positiva perchè l'equazione $S(t) = 2000$ ha soluzioni reali positive. Infatti, tale equazione è equivalente a $1 = 3e^{-\frac{t}{10}}$ che dà $t = 10 \log 3$ che è il tempo necessario affinché la quantità di sale raggiunga i 2 Kg. ∎

Esercizio 11 *Determinare la soluzione passante per l'origine dell'equazione differenziale $y' = xy^2 + x$. Si precisi l'intorno dell'origine in cui tale soluzione è definita.*

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili che può essere scritta come $y'\dfrac{1}{1+y^2} = x$. Integrando, otteniamo $\arctan y = \dfrac{x^2}{2} + c$ e $y = \tan(\dfrac{x^2}{2} + c)$. La condizione di passaggio per l'origine dà $c = 0$, per cui la curva integrale è $y = \tan(\dfrac{x^2}{2})$ definita per $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x^2}{2} < \dfrac{\pi}{2}$, cioè nell'intervallo $-\sqrt{\pi} < x < \sqrt{\pi}$. ∎

Esercizio 12 *Un corpo avente la temperatura di 20 gradi centigradi viene messo, all'istante $t = 0$, in un forno a temperatura costante di 180 gradi. La temperatura $y(t)$ del* *corpo all'istante t varia proporzionalmente alla differenza $180 - y(t)$, con coefficiente di proporzionalità $k > 0$. Determinare il valore di k affinché il corpo raggiunga la temperatura di 40 gradi in 10 unità di tempo.*

Soluzione. La variazione di temperatura del corpo corrispondente all'intervallo temporale Δt può essere espressa da

$$\Delta y(t) \approx k(180 - y(t))\Delta t$$

per cui, dividendo per Δt e considerando il limite per $\Delta t \to 0$, l'equazione differenziale corrispondente all'andamento della temperatura diventa $y'(t)+ky(t) = 180k$. La soluzione generale di questa equazione differenziale è $y(t) = 180+c\,e^{-kt}$. Posto $y(0) = 20$, otteniamo $c = -160$ e quindi la soluzione particolare dell'equazione differenziale è $y(t) = 180 - 160\,e^{-kt}$. Se in 10 unità di tempo viene raggiunta la temperatura di 40 gradi, allora abbiamo $40 = 180 - 160\,e^{-10k}$ da cui ricaviamo $e^{-10k} = \frac{7}{8}$, $-10k = \ln 7 - \ln 8$, e $k = \dfrac{\ln 8 - \ln 7}{10}$. ■

Esercizio 13 *Un serbatoio ha una capacità totale di 14 m^3 ed inizialmente contiene 7 m^3 d'acqua. Nel serbatoio viene versata dell'acqua con velocità costante di $k > 0$ m^3/h, mentre da un foro posto sul fondo esce dell'acqua con velocità, espressa in m^3/h, proporzionale alla quantità d'acqua contenuta e con coefficiente di proporzionalità 0.05.*

Dire se esistono valori di k tali che la quantità di acqua nel serbatoio sia crescente, ma il serbatoio non si riempia mai.

Soluzione. Detta $y(t)$ la quantità d'acqua, in m^3, contenuta nel serbatoio all'istante t (in ore), la variazione di tale quantità corrispondente all'intervallo Δt può essere espressa da

$$\Delta y(t) \approx k\Delta t - \frac{1}{20}\,y(t)\Delta t$$

L'equazione differenziale in $y(t)$ è quindi $y'(t) + \dfrac{1}{20}y(t) = k$ la cui soluzione generale è

$$y(t) = 20k + c\,e^{-\frac{t}{20}}$$

Posto $y(0) = 7$, otteniamo $c = 7-20k$, per cui la quantità d'acqua contenuta nel serbatoio in funzione del tempo è data da

$$y(t) = 20k + (7 - 20k)e^{-\frac{t}{20}}$$

La funzione $y(t)$ è crescente quando la sua derivata prima $-\dfrac{1}{20}(7 - 20k)e^{-\frac{t}{20}}$ è positiva, cioè per $k > \dfrac{7}{20}$. Per questi valori di k, affinchè il serbatoio non si riempia deve essere $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 20k \leq 14$, cioè $k \leq \dfrac{7}{10}$. Le condizioni richieste dal problema sono quindi verificate per $\dfrac{7}{20} < k \leq \dfrac{7}{10}$. ■

Esercizio 14 *Un serbatoio cilindrico avente la sezione di base di* $20\,\mathrm{dm}^2$ *e altezza di* $8\,\mathrm{dm}$ *contiene dell'acqua che defluisce attraverso un foro praticato sul fondo con portata proporzionale alla radice cubica del suo livello nel serbatoio, secondo la costante di proporzionalità* 5*, essendo la portata espressa in litri al minuto e il livello in decimetri.*

Sapendo che in un certo istante $t = 0$ *il serbatoio contiene una quantità d'acqua pari a* $\frac{1}{8}$ *del suo volume, dire quanto tempo prima il serbatoio era pieno e in quanto tempo si svuota.*

Soluzione. Indichiamo con $q(t)$ e con $h(t)$ rispettivamente la quantità ed il livello dell'acqua nel serbatoio, per cui abbiamo $q(t) = 20h(t)$.

La variazione tra le quantità di acqua nel serbatoio corrispondenti agli istanti t e $t + \Delta t$ è dovuta esclusivamente all'acqua che esce dal foro sul fondo. Abbiamo quindi

$$q(t + \Delta t) - q(t) \approx -5\sqrt[3]{h(t)}\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad 20h'(t) = -5\sqrt[3]{h(t)}$$

Questa equazione differenziale è a variabili separabili. Integrando otteniamo

$$4\int \frac{1}{\sqrt[3]{h}}\,dh = \int -\,dt \quad \Rightarrow \quad 6\sqrt[3]{h^2} = -t + c$$

La condizione iniziale può essere espressa da $h(0) = 1$ e da questa ricaviamo $6\sqrt[3]{1^2} = c$, per cui la soluzione (in forma implicita) dell'equazione differenziale è

$$6\sqrt[3]{h^2} = 6 - t$$

Posto $h = 8$, otteniamo $t = -18$ e quindi il serbatoio era pieno 18 minuti prima dell'istante iniziale. Posto $h = 0$, otteniamo $t = 6$ e quindi il serbatoio è vuoto 6 minuti dopo l'istante iniziale. ■

Esercizio 15 *In un serbatoio del volume di* $100\,\mathrm{dm}^3$ *viene immessa dell'acqua con portata* $5k$ $(k > 0)$ *litri al minuto. Dal fondo esce dell'acqua con velocità (in litri al minuto) proporzionale alla quantità d'acqua presente e coefficiente di proporzionalità* k*. Sapendo che per* $t = 0$ *il serbatoio è pieno e che dopo* 10 *minuti contiene* 10 *litri d'acqua, esprimere la quantità d'acqua presente nel serbatoio in funzione del tempo.*

Soluzione. Detta $y(t)$ la quantità d'acqua (in litri) presente nel serbatoio, la sua variazione corrispondente all'intervallo $[t, t + \Delta t]$ può essere espressa da

$$y(t + \Delta t) - y(t) \;\approx\; 5k\Delta t - ky(t)\Delta t$$

Dividendo per Δt e facendo tendere Δt a 0, otteniamo l'equazione differenziale $y' + ky = 5k$, la cui soluzione generale è $y(t) = 5 + c\,e^{-kt}$.

La condizione iniziale $y(0) = 100$ dà $c = 95$ e quindi abbiamo $y(t) = 5 + 95e^{-kt}$. La condizione $y(10) = 10$ permette di ricavare k: $10 = 5 + 95e^{-10k} \Rightarrow e^{-10k} = \frac{1}{19} \Rightarrow 10k = \log 19 \Rightarrow k = \frac{\log 19}{10}$. ■

Esercizio 16 *Determinare la soluzione passante per l'origine dell'equazione differenziale*

$$y' = -y\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 4x\,.$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Scelta una qualunque primitiva di $\dfrac{2x}{1+x^2}$, per esempio $\log(1+x^2)$, otteniamo il fattore integrante $e^{\log(1+x^2)} = 1+x^2$. L'equazione differenziale può quindi essere scritta come

$$(1+x^2)\,y' + 2x\,y = 4x(1+x^2) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}((1+x^2)\,y) = 4x + 4x^3 \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{2x^2+x^4+c}{1+x^2}$$

La condizione $y(0) = 0$ di passaggio per l'origine implica $c = 0$. ■

Esercizio 17 *Un serbatoio della capacità di* 1000 *litri contiene inizialmente acqua pura. Nel serbatoio viene versata, alla velocità di* 10 *litri al minuto, una soluzione contenente* 30 *grammi di sale per litro. Alla stessa velocità viene prelevata la soluzione ottenuta che si suppone sempre omogenea.*

Dire, giustificando la risposta, se la quantità di sale nel serbatoio raggiunge i 20 kg *ed i* 40 kg *e, in caso affermativo, determinare il tempo necessario affinché queste quantità vengano raggiunte.*

Soluzione. Detta $S(t)$ la quantità di sale presente nel serbatoio all'istante t, e considerato l'intervallo Δt, la quantità di sale che entra nel serbatoio in tale intervallo è $10\cdot 30\cdot \Delta t$ g, mentre quella che esce può essere approssimata con $\dfrac{S(t)}{1000}\cdot 10\cdot \Delta t$ g. Possiamo quindi scrivere

$$S(t+\Delta t) - S(t) \approx 300\Delta t - \frac{S(t)}{100}\Delta t$$

Dividendo per Δt e facendo tendere questo valore a 0, otteniamo l'equazione differenziale del primo ordine $S'(t) - \dfrac{1}{100}S(t) = 300$ la cui soluzione generale è $S(t) = 30000 + c\,e^{-\frac{t}{100}}$. Dalla condizione iniziale $S(0) = 0$ otteniamo $c = -30000$ e quindi $S(t)$ è data da

$$S(t) = 30000 - 30000\,e^{-\frac{t}{100}}$$

La quantità di sale presente nel serbatoio non raggiunge i 40 *kg*. Infatti, per $S(t) = 40000$ abbiamo $40000 = 30000 - 30000\,e^{-\frac{t}{100}}$ che non ha soluzioni reali. Posto invece $S(t) = 20000$, otteniamo $e^{-\frac{t}{100}} = \frac{1}{3}$ cioè $-\frac{t}{100} = \log\frac{1}{3}$ e $t = 100\log 3$ che è il tempo, in minuti, necessario affinché la quantità di sale raggiunga i 20 kg. ■

Esercizio 18 *Trovare la soluzione particolare passante per il punto* $(1, e)$ *dell'equazione differenziale*

$$y' + \frac{1}{x^2}\,y = x\,e^{\frac{1}{x}}$$

Soluzione. Una primitiva di $\dfrac{1}{x^2}$ è $-\dfrac{1}{x}$; moltiplichiamo quindi l'equazione differenziale per $e^{-\frac{1}{x}}$ ottenendo

$$y'\,e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\,y\,e^{-\frac{1}{x}} = x\,e^{\frac{1}{x}}\,e^{-\frac{1}{x}} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}(y\,e^{-\frac{1}{x}}) = x$$

che dà la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y\,e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2}{2} + c \quad\Rightarrow\quad y(x) = \frac{x^2}{2}\,e^{\frac{1}{x}} + c\,e^{\frac{1}{x}}$$

Dalla condizione iniziale $y(1) = e$ otteniamo $e = \frac{1}{2}\,e + c\,e$, cioè $c = \frac{1}{2}$ e quindi la soluzione particolare cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2}\,e^{\frac{1}{x}}(x^2+1)$$

■

Esercizio 19 *Una pompa versa del liquido in un serbatoio con portata di k litri al minuto ($k > 0$), mentre da un foro sul fondo esce il liquido con portata proporzionale alla quantità di liquido contenuto e con coefficiente di proporzionalità 0.05. La capacità del serbatoio è di 200 litri. Supposto che all'istante $t = 0$ il serbatoio sia vuoto,*

(a) *determinare la quantità di liquido presente nel serbatoio al variare di t;*

(b) *determinare i valori di k tali che il serbatoio non si riempia, ma la quantità di liquido presente raggiunga i 100 litri in un tempo finito.*

Soluzione. (a) Detta $y(t)$ la quantità di liquido presente nel serbatoio all'istante t abbiamo

$$y(t+\Delta t) - y(t) \;\approx\; k\,\Delta t - \frac{1}{20}\,y(t)\,\Delta t$$

da cui possiamo ricavare l'equazione differenziale del primo ordine $y' + \dfrac{1}{20}\,y = k$ che ha come soluzione generale $y(t) = 20k + c\,e^{\frac{-t}{20}}$. Dalla condizione iniziale $y(0) = 0$ otteniamo $c = -20k$ e quindi

$$y(t) = 20k\,(1 - e^{\frac{-t}{20}})$$

(b) La funzione $20k\,(1 - e^{\frac{-t}{20}})$ è crescente perchè la sua derivata vale $k\,e^{\frac{-t}{20}}$ e $k > 0$. Affinché il serbatoio non si riempia, ma la quantità di liquido raggiunga i 100 litri, deve quindi essere

$$100 < \lim_{t\to+\infty} y(t) < 200$$

cioè, poiché $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 20k$, $5 < k < 10$. ■

Esercizio 20 *Data l'equazione differenziale*

$$y' = x\sqrt{y-2}$$

se ne determini la soluzione generale e la soluzione particolare passante per il punto $(2, 6)$.

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili. Una soluzione particolare è $y(x) = 2$. Le altre soluzioni sono le soluzioni di

$$\frac{y'}{\sqrt{y-2}} = x \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{y-2} = \frac{x^2}{2} + c \quad \Rightarrow \quad y = 2 + \frac{x^4}{16} + \frac{c^2}{4} + \frac{cx^2}{4}$$

La condizione iniziale $y(2) = 6$ ci permette di ricavare il valore $c = 2$ e la soluzione particolare passante per il punto $(2, 6)$: $y = 3 + \dfrac{x^4}{16} + \dfrac{x^2}{2}$. ■

Esercizio 21 *In un serbatoio viene immessa dell'acqua con portata costante di* 4 *litri al secondo. Da un foro praticato sul fondo esce acqua con portata (in litri al secondo) proporzionale alla quantità di acqua contenuta nel serbatoio e coefficiente di proporzionalità* $\frac{1}{20}$.

(a) *Supponendo che inizialmente il serbatoio sia vuoto, determinare la quantità d'acqua contenuta nel serbatoio in funzione del tempo.*

(b) *Supponendo che inizialmente il serbatoio contenga una quantità* $A \geq 0$ *di acqua, discutere l'andamento della quantità d'acqua presente nel serbatoio al variare di* A.

Soluzione. (a) Detta $y(t)$ la quantità d'acqua presente nel serbatoio all'istante t, possiamo esprimere la variazione di $y(t)$ nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$ tramite

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx 4\Delta t - \frac{1}{20}\, y\, \Delta t$$

Dividendo i termini dell'uguaglianza per Δt e facendo tendere questo incremento a 0, otteniamo l'equazione differenziale $y' + \frac{1}{20}y = 4$ la cui soluzione generale è $y(t) = 80 + c\, e^{-\frac{1}{20}t}$. Dalla condizione iniziale $y(0) = 0$ ricaviamo $c = -80$ e quindi l'andamento dell'acqua nel serbatoio è dato da $y(t) = 80 - 80\, e^{-\frac{1}{20}t}$.

(b) Dalla soluzione generale dell'equazione differenziale e dalla condizione iniziale $y(0) = A$ ricaviamo $c = A - 80$ e quindi l'andamento dell'acqua nel serbatoio è dato da $y(t) = 80 + (A - 80)\, e^{-\frac{1}{20}t}$. La derivata prima $y'(t)$ vale $\frac{80-A}{20}\, e^{-\frac{1}{20}t}$ e il limite $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ vale 80 indipendentemente dal valore di A. Possiamo concludere che per $A < 80$ $y(t)$ è una funzione strettamente crescente, mentre per $A > 80$ $y(t)$ è una funzione strettamente decrescente, e che in entrambi i casi il valore di $y(t)$ tende asintoticamente a 80. Per $A = 80$, la funzione vale costantemente 80. ■

Esercizio 22 *Determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale* $y' = (1 - y)^2$ *e la soluzione particolare che verifica la condizione iniziale* $y(0) = 0$.

Soluzione. Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili. Una soluzione si ricava annullando il termine $(1 - y)^2$ ed è quindi la funzione costante $y(x) = 1$.

Le altre soluzioni sono le soluzioni dell'equazione differenziale $\dfrac{y'}{(1-y)^2} = 1$. Integrando entrambi i termini dell'uguaglianza otteniamo $\dfrac{1}{1-y} = x + c$ da cui ricaviamo $y = 1 - \dfrac{1}{x+c}$

che, al variare di c in $\mathbb{R}$, e assieme alla soluzione identicamente uguale a 1, dà l'insieme delle soluzioni.

Dalla condizione iniziale $y(0) = 0$ ricaviamo $c = 1$ per cui la soluzione particolare è $y = 1 - \dfrac{1}{x+1}$. ■

Esercizio 23 *In una popolazione il tasso di crescita è del* 10% *su base annua e vengono immessi dall'esterno nuovi* 5.000 *individui l'anno. Supponendo che i dati varino con continuità, determinare:* (a) *il numero di individui della popolazione in funzione del tempo e del numero* N_0 *di individui presenti all'istante* $t = 0$, (b) *il valore di* N_0 *tale che la popolazione raggiunga i* 200.000 *individui in* 15 *anni.*

Soluzione. (a) Usiamo come unità di misura l'anno ed il migliaio di individui. Detto $N(t)$ il numero di individui all'istante t, la variazione di tale funzione nell'intervallo Δt può essere approssimata da

$$N(t + \Delta t) - N(t) \approx \frac{1}{10} N(t) \Delta t + 5 \Delta t$$

Dividendo per Δt e facendo tendere questa quantità a 0, otteniamo l'equazione differenziale $N' - \dfrac{1}{10}N = 5$, la cui soluzione generale è $N(t) = -50 + c\, e^{\frac{1}{10}t}$. Dalla condizione iniziale $N(0) = N_0$ otteniamo $c = N_0 + 50$ e quindi $N(t) = -50 + (N_0 + 50)\, e^{\frac{1}{10}t}$.

(b) Affinché vengano raggiunte 200 migliaia di individui in 15 anni, deve valere l'uguaglianza $200 = -50 + (N_0 + 50)\, e^{\frac{3}{2}}$, cioè $N_0\, e^{\frac{3}{2}} = 50(5 - e^{\frac{3}{2}})$ e $N_0 = 50(5 - e^{\frac{3}{2}})e^{-\frac{3}{2}}$. ■

Esercizio 24 *Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale* $y' = 4x\sqrt{y-2}$ *passante per il punto* $(0, 3)$.

Soluzione. L'equazione differenziale è a variabili separabili e le sue soluzioni sono l'integrale singolare $y(x) = 2$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ e le soluzioni dell'equazione $(*)\dfrac{y'}{2\sqrt{y-2}} = 2x$ che può essere scritta $\dfrac{dy}{2\sqrt{y-2}} = 2x\, dx$. Integrando otteniamo la soluzione generale dell'equazione $(*)$: $\sqrt{y-2} = x^2 + c$ cioè $y = 2 + (x^2 + c)^2$, dove, dalla prima uguaglianza segue $c \geq 0$.

Sostituendo x con 0 e y con 3, otteniamo $c = 1$. La soluzione particolare sarà quindi $y = 2 + (x^2 + 1)^2$. ■

Esercizio 25 *In un serbatoio di* 200 *litri viene immessa dell'acqua con portata costante di* k *litri al minuto. Da un foro praticato sul fondo esce acqua con portata, in litri al minuto, proporzionale alla quantità d'acqua contenuta nel serbatoio con coefficiente di proporzionalità uguale a* $\dfrac{1}{20}$. *Inizialmente il serbatoio contiene* 100 *litri di acqua.*

Determinare i valori di k *per cui il serbatoio si riempie.*

Soluzione. Indichiamo con $y(t)$ la quantità d'acqua presente nel serbatoio all'istante t. La variazione Δy corrispondente all'intervallo $[t, t + \Delta t]$ può essere approssimata da $k\,\Delta t - \frac{1}{20} y\,\Delta t$. Passando al limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo l'equazione differenziale $y' = k - \frac{1}{20} y$, la cui soluzione generale è $y(t) = 20k + c\,e^{-\frac{t}{20}}$. Dalla condizione iniziale $y(0) = 100$ ricaviamo $c = 100 - 20k$ e quindi la quantità d'acqua contenuta nel serbatoio in funzione del tempo è data da $y(t) = 20k + (100 - 20k)e^{-\frac{t}{20}}$.

Affinchè il serbatoio si riempia l'equazione $(*)$ $200 = 20k + (100 - 20k)e^{-\frac{t}{20}}$ (nell'incognita t) deve avere soluzioni positive. Dall'equazione $(*)$ ricaviamo $e^{-\frac{t}{20}} = \dfrac{10-k}{5-k}$, cioè $t = -20 \log\left(\dfrac{10-k}{5-k}\right) = 20 \log\left(\dfrac{5-k}{10-k}\right)$. Risulta quindi $t > 0$ se $\dfrac{5-k}{10-k} > 1$, che equivale a $\dfrac{-5}{10-k} > 0$. Il serbatoio quindi si riempie per $k > 10$. ∎