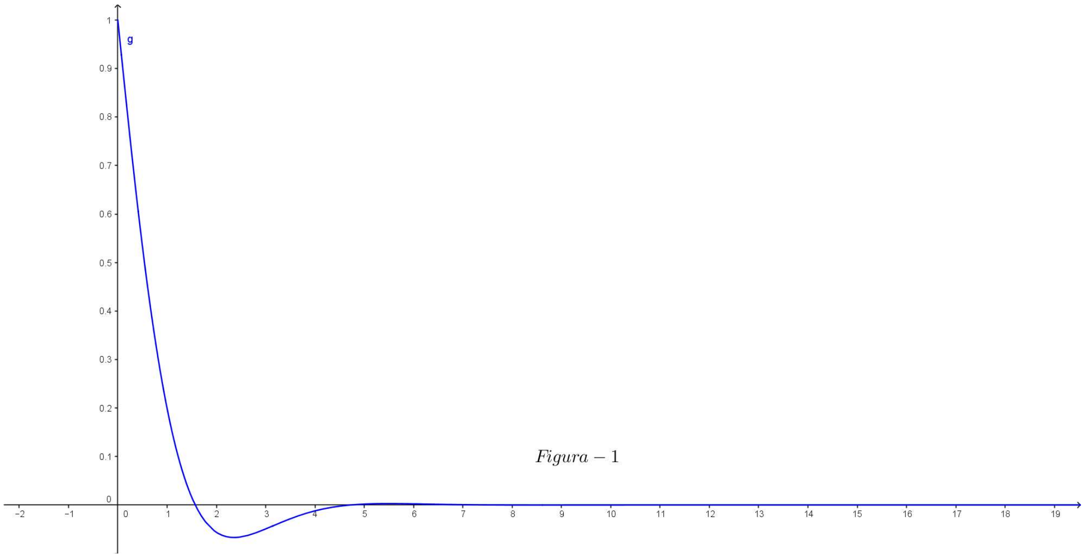
Funzione $f\left(x\right)=e^{-x}\cos x$ per $x\geq 0$



$Figura - 1$

$f\left(0\right)=1$; $f\left(x\right)>0$ per $\cos x>0$, intersezioni asse ascisse: $\cos x=0$, quindi: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}\wedge k\geq 0$ (stiamo studiando la funzione per $x\geq 0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\cos x=0$, $y=0$ asintoto orizzontale per $x\to+\infty$.

Massimi e minimi relativi interni al dominio e quindi appartenenti all'intervallo $\left(0,+\infty\right)$:

$f'\left(x\right)=-e^{-x}\left(\sin x+\cos x\right)>0$ per $\sin x+\cos x<0$.

Punti di minimo relativo: $x=\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$; punti di massimo relativo: $x=\dfrac{7}{4}\pi+2k\pi$.

Minimi relativi: $f\left(\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi\right)=e^{-\frac{3}{4}\pi-2k\pi}\cos\left(\dfrac{3}{4}\pi+2k\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi-2k\pi}$

All'aumentare di k i minimi relativi aumentano, infatti all'aumentare di k, l'esponente $-\dfrac{3}{4}\pi-2k\pi$ diminuisce, $e^{-\frac{3}{4}\pi-2k\pi}$ decresce e quindi $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi-2k\pi}$ cresce.

Per $k=0$, si ha: $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$ primo minimo relativo

Per $k=1$, si ha: $f\left(\dfrac{3}{4}\pi+2\pi\right)=f\left(\dfrac{11}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{11}{4}\pi}$ secondo minimo relativo etc.

Quindi il minimo assoluto è $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$ e il punto di minimo assolto è: $\dfrac{3}{4}\pi$.

Massimi relativi: $f\left(\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right)=e^{-\frac{7}{4}\pi-2k\pi}\cos\left(\frac{7}{4}\pi+2k\pi\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{4}\pi-2k\pi}$

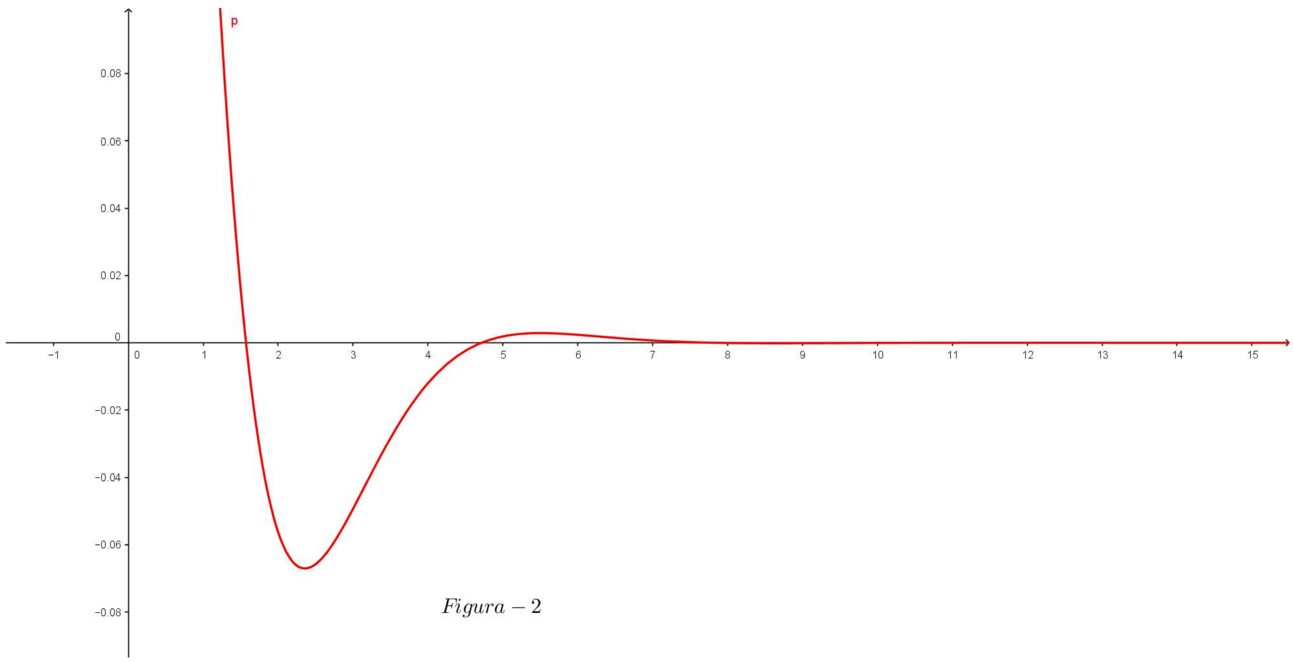
All'aumentare di k i massimi relativi diminuiscono.

Per $k=0$, si ha: $f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{4}\pi}$ primo minimo relativo.

Per $k=1$, si ha: $f\left(\frac{7}{4}\pi+2\pi\right)=f\left(\frac{15}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{15}{4}\pi}$ secondo minimo relativo etc.

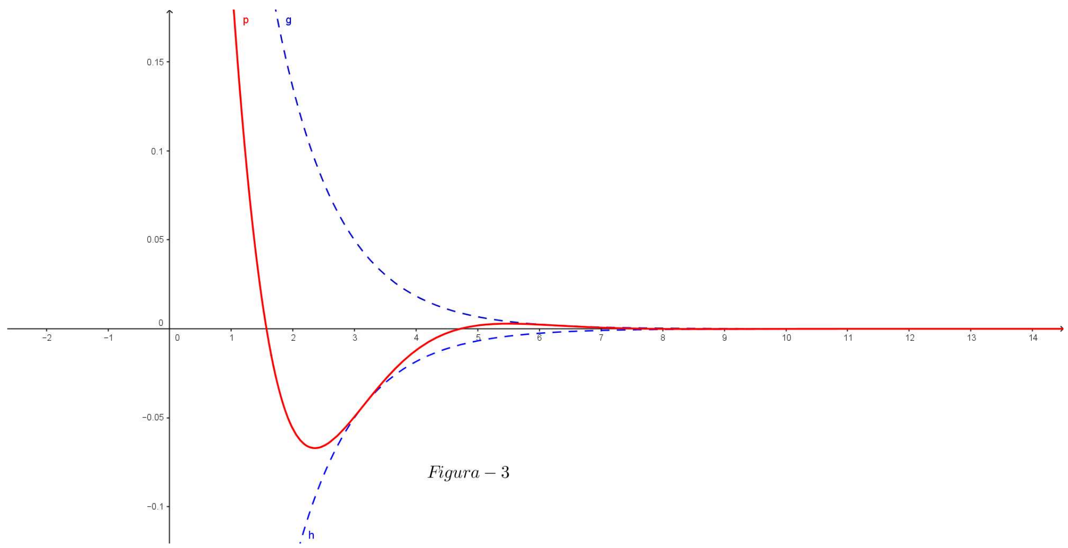
Poiché per $x=0$ è $f(0)=1$, la funzione ha massimo assoluto uguale a 1, raggiunto nel punto $x=0$.

"dilatando" l'asse delle ordinate:



$Figura - 2$

Si può osservare che la curva è racchiusa tra le curve $y=e^{-x}$ e $y=-e^{-x}$.



$Figura - 3$

Le intersezioni tra la curva $y = e^{-x}$ e la curva $y = f(x)$ si hanno quando:

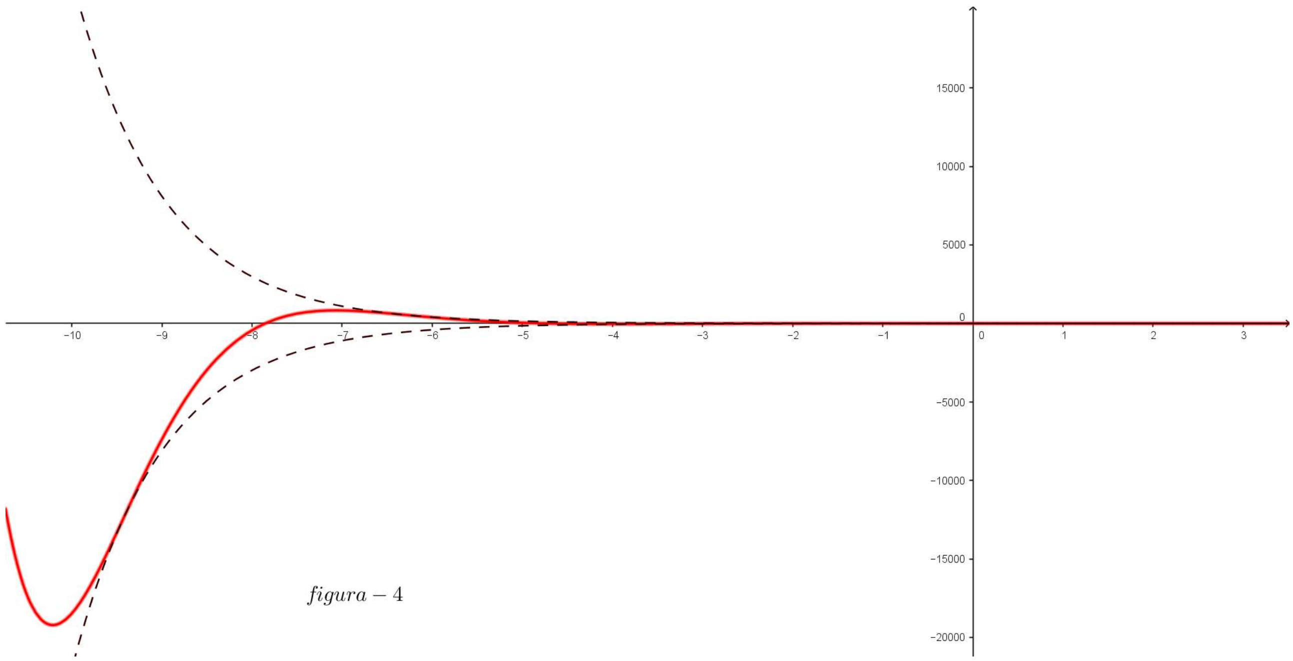
$e^{-x}\cos x = e^{-x} \Leftrightarrow \cos x = 1$, quindi per $x = 2k\pi$.

Le intersezioni tra la curva $y = -e^{-x}$ e la curva $y = f(x)$ si hanno quando:

$e^{-x}\cos x = -e^{-x} \Leftrightarrow \cos x = -1$, quindi per $x = \pi + 2k\pi$.

Tali intersezioni non corrispondono ai punti di massimo / minimo relativi della $y = f(x)$.

Per $x < 0$ è: $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, la funzione compie infinite oscillazioni di ampiezza sempre maggiore, rimanendo comunque compresa tra le curve $y = e^{-x}$ e $y = -e^{-x}$



$figura - 4$