Esercitazione da consegnare entro martedì 8 novembre

Risolvi gli esercizi in modo chiaro e spiegando i passaggi eseguiti.

Esercizio 1.

Calcola al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+x^2\right)^\alpha - x\right]$

b. $\lim_{x\to 0^+}\left(x^\alpha \log x\right)$

Esercizio 2.

Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+2\right)^{x+3}-8}{x}$$

Esercizio 3.

Verifica che le funzioni $f\left(x\right)=\frac{1}{\log|x|}$ e $g\left(x\right)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ sono prolungabili con continuità in $x=0$, mentre le funzioni $h\left(x\right)=e^{\frac{1}{x^2}}$ e $l\left(x\right)=arctg\frac{1}{x}$ non lo sono.

Esercizio 4.

Studia, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la derivabilità in $x=0$ di

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x}, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

e verifica che per $\alpha = 2$ la derivata non è continua in $x=0$.

Esercizio 5.

Traccia il grafico di $f\left(x\right)=x\sqrt[3]{\left(\log|x|\right)^2}$ e studia gli eventuali punti di continuità e non derivabilità.

Esercizio 6.

Verifica che $f\left(x\right)=x\sin x-\cos\left(2x\right)$ ha un punto stazionario in $x=0$ e determinane la natura.

Esercizio 7.

Supponi che a funzione $f\left(t\right)=10000\cdot\frac{1}{1+8e^{-t}}$ descriva la crescita di una popolazione in funzione del tempo ($f\left(t\right)$ è la densità media di individui al tempo t). Traccia il grafico della funzione per $t\geq 0$. In quale istante il tasso di crescita è massimo? A quale punto del grafico corrisponde tale istante?

Esercizio 8.

Un parallelepipedo rettangolo di base $2m^2$ e altezza $5m$ è pieno di acqua. Da un rubinetto posto sul fondo vengono prelevati 20 litri al minuto. Con quale velocità l'altezza dell'acqua decresce? Come varia l'altezza dell'acqua al variate del tempo?

Esercizio 9.

Inscrivi in un cono circolare retto di altezza h e raggio di base R un cilindro di volume massimo.

Esercizio 10.

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(arctgx - \frac{\pi x + 2}{2x + 1} \right)$$