Esercizi: calcolo di limiti che si presentano sotto forma di indecisione

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{\sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$ essendo per $x\to 0$ $\log(1+2x)\sim 2x$ e $\sin(3x)\sim 3x$

2. $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{3(x-1)^2}=\frac{1}{3}$

essendo per $x\to 1$: $3(x-1)^2\to 0^+$, quindi $e^{3(x-1)^2}-1\sim 3(x-1)^2$.

3. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)=*$

$\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}-1=\left(1+\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\right)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\sim\frac{2}{3x}$, trascurando nella somma l'infinitesimo $\frac{1}{x^3}$ di ordine superiore a $\frac{1}{x^2}$

$*=\lim_{x\to +\infty}x\frac{2}{3x}=\frac{2}{3}$.

4. $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x}=0$ per la gerarchia degli "infiniti".

5. $\lim_{x\to +\infty}\frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}=0$ per la gerarchia degli "infiniti".

6. $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x)$. Posizione: $x=\frac{1}{t}$

$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\log x)=\lim_{t\to +\infty}\left(\frac{1}{t}\cdot\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)=\lim_{t\to +\infty}\frac{\log(t)^{-1}}{t}=\lim_{t\to +\infty}\frac{-\log(t)}{t}=0$.

(per la gerarchia degli "infiniti").

7. $\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{\log x^x}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\log x}=e^0=1$.

8. $\lim_{x\to +\infty}\left(x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\sin(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$. Posizione $\frac{1}{x}=t$

9. $\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right)\right]=*$

$\frac{x+3}{x+1}=1+\frac{2}{x+1}=1+\varepsilon(x)$; $\varepsilon(x)\to 0$ per $x\to+\infty$

$\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right)=\log\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\sim\frac{2}{x+1}\sim\frac{2}{x}$, per $x\to+\infty$

$*=\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{2}{x}\right)=2$

10. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{\log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\cdot\log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2}\right)}=*$

$x\cdot\log\frac{x^2+3}{x^2+2}=x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x^2+2}\right)\sim x\cdot\frac{1}{x^2+2}=\frac{x}{x^2+2}\sim\frac{1}{x}$

$*=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

11. $\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\log\left(1+2x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$, essendo: $e^{x^2}-1\sim x^2$ e $\log\left(1+2x^2\right)\sim 2x^2$, per $x\to0$

12. $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-|x|\right)$

Calcoliamo il limite per $x\to+\infty$. In questo caso ($x>0$) è: $\sqrt{x^2}=x$ e $|x|=x$.

$x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-x=x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)=x\left(\left(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)\sim x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\sim\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

a. $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-|x|\right)=\frac{3}{2}$

Calcoliamo il limite per $x\to-\infty$. In questo caso ($x<0$) è: $\sqrt{x^2}=-x$ e $|x|=-x$.
procedendo come fatto sopra e raccogliendo un segno $-$, si ottiene che:

b. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-|x|\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+x\right)=-\frac{3}{2}$

13. $\lim_{x\to1}\frac{(\log x)^2}{(2x-2)^2}=\lim_{x\to1}\frac{(\log x)^2}{4(x-1)^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to1}\left(\frac{\log x}{x-1}\right)^2=\frac{1}{4}\lim_{t\to0}\left(\frac{\log(1+t)}{t}\right)^2=\frac{1}{4}\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{t}\right)^2=\frac{1}{4}$

avendo posto $x-1=t$.

14. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{2^{x+\frac{1}{2}}+\log|x|}{x^2+1} =$

Calcoliamo:

a. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2^{x+\frac{1}{2}}+\log x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2^{x+\frac{1}{2}}}{x^2} = +\infty$, per la gerarchia degli infiniti.

b. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2^{x+\frac{1}{2}}+\log(-x)}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\log(-x)}{x^2+1} = 0$, per la gerarchia degli infiniti ed essendo $\lim_{x\to-\infty} 2^{x+\frac{1}{2}} = 0$.

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cdot(\sin 2x)^2}{\sin(x^3)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x\cdot(2x)^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{4x^3}{x^3} = 4$, essendo: $\sin(2x) \sim 2x$ e $\sin(x^3) \sim x^3$.

16. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log(\log x)}{1+\log x} = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{\log t}{1+t} = 0$, per la gerarchia degli infiniti ed avendo posto $\log x = t$

17. $\lim_{x\to 0} xe^{\sin\frac{1}{x}} = 0$, infatti $-1 \le \sin\dfrac{1}{x} \le 1 \to e^{-1} \le e^{\sin\frac{1}{x}} \le e$, quindi $e^{\sin\frac{1}{x}}$ limitata.
Il limite si presenta pertanto come prodotto di un "infinitesimo" per un "limitato".

18. $\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{\sin x} = +\infty$
Per quanto visto sopra si ha:

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$e^{-1} \le e^{\sin x} \le e$$

moltiplichiamo per $x > 0$

$$\frac{x}{e} \le x\cdot e^{\sin x} \le x\cdot e$$

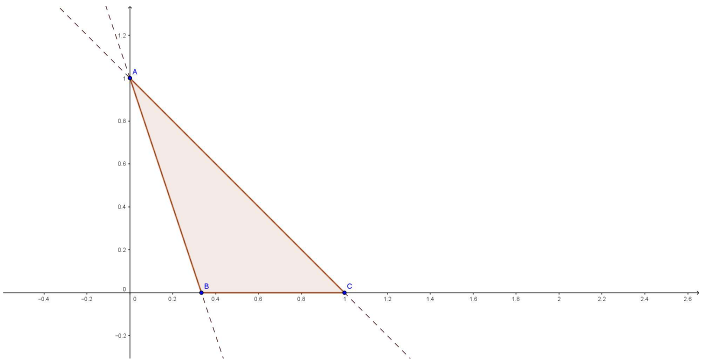
Ora: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e} = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x\cdot e = +\infty$ dal teorema del confronto dei limiti segue che: $\lim_{x\to+\infty} x\cdot e^{\sin x} = +\infty$.

Esercizio 3. Determina $a \ge 0$ e $b \ge 0$ in modo che la successione $a_n = \left(\dfrac{2a+b-1}{a}\right)^n$ sia convergente. Disegna nel piano cartesiano aOb l'insieme delle coppie (a,b) del punto precedente.

Si tratta di una successione geometrica, è convergente per $-1 < \dfrac{2a+b-1}{a} \le 1$, moltiplicando entrambi i membri delle disequazioni per $a > 0$ otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} a+b-1 \le 0 \\ 3a+b-1 > 0 \end{cases}$$

In un piano aOb : triangolo di vertici: $A(0,1)$; $B\left(\frac{1}{3},0\right)$; $C(1,0)$



Esercizio 4. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ stabilisci quando esiste il $\lim\limits_{n\to\infty}\left((2a)^n - a^n\right)$

Si tratta della differenza di due successioni geometriche, le condizioni per la convergenza sono:

$\begin{cases} -1 < 2a \le 1 \\ -1 < a \le 1 \end{cases}$ ovvero: $-\frac{1}{2} < a \le \frac{1}{2}$

Esercizio 5. Esiste un numero $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ tale che $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n - 2^n - a^n\right) = 0$?

se $a < 3$ si ha: $3^n - 2^n - a^n \sim 3^n$ diverge

se $a = 3$ si ha: $3^n - 2^n - 3^n \sim -2^n$ diverge

se $a > 3$ si ha: $3^n - 2^n - a^n \sim -a^n$ diverge

Quindi non esiste alcun $a > 0$ che soddisfi alla richiesta.

Esercizio 6. Sia $\{a_n\}$ una successione limitata con $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Stabilisci se le tre successioni di termine generale $\frac{1}{a_n}$, $\frac{1}{1+a_n}$, $\frac{1}{\log a_n}$ sono necessariamente limitate.

La successione $\frac{1}{a_n}$ non è necessariamente limitata. Esempio: $a_n = \frac{1}{n}$ è limitata ma $\frac{1}{a_n} = n$ non lo è.

La successione $\frac{1}{1+a_n}$ è limitata, infatti se a_n limitata è:

$$0 < a_n < M \Rightarrow 1 < 1 + a_n < M + 1 \Rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{1+a_n} > \frac{1}{M+1}.$$

La successione $\frac{1}{\log a_n}$ non è necessariamente limitata. Per esempio la successione $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ è limitata, ma la successione $\frac{1}{\log a_n} = \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ non è limitata.