1. Sia $f(x)=\sqrt{x}-1$ . Stabilisci giustificando opportunamente se alla funzione $f(x)$ possiamo applicare il teorema di Lagrange nell'intervallo $[0,2]$. Se si può, determina le coordinate del punto ( o dei punti) che soddisfa ( soddisfano) il teorema.

Il dominio della funzione è $[0,+\infty)$ dove la funzione è continua. La funzione è derivabile in $(0,+\infty)$. Quindi la funzione $f(x)$ è continua in $[0,2]$ ed è derivabile in $(0,2)$ e soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange.

Esiste $c\in(0,2)$ tale che $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$.

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, quindi: $\dfrac{1}{2\sqrt{c}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\to c=\dfrac{1}{2}\in(0,2)$. $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$.

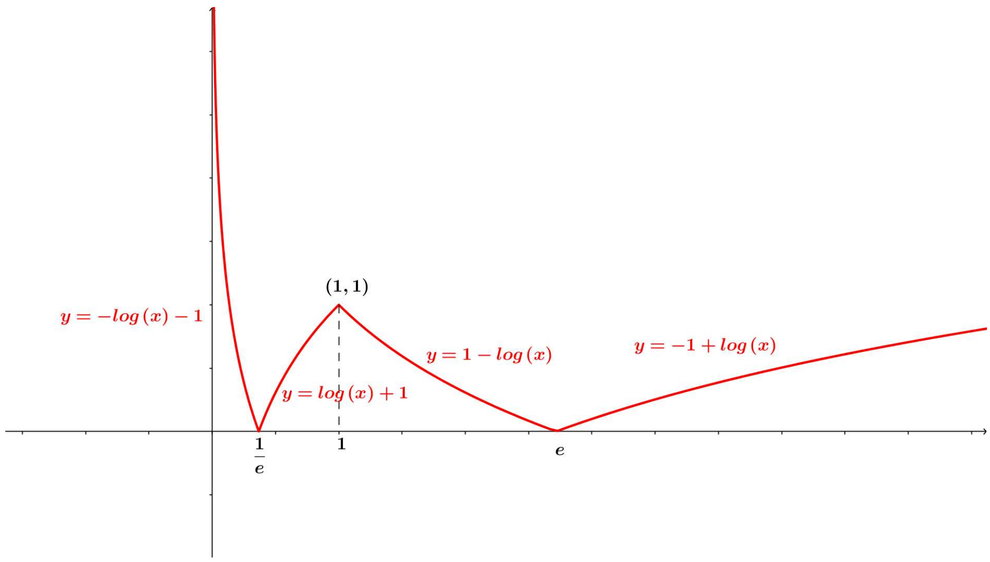
2. Calcola il $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin(x^2)\cdot(e^{2x}-1)}{(1-\cos x)^2}$

$\sin(x^2)\sim x^2$; $(e^{2x}-1)\sim 2x$; $(1-\cos x)^2\sim\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2=\dfrac{1}{4}x^4$, per $x\to 0$.

Quindi: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin(x^2)\cdot(e^{2x}-1)}{(1-\cos x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4}{\frac{1}{4}x^4}=8$

3. Considera la funzione: $f(x)=\left|1-\left|\log(x)\right|\right|$; in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $xOy$ rappresenta la curva di equazione $y=f(x)$ giustificando adeguatamente tutti i passaggi eseguiti. Individua, se esistono, i punti di discontinuità e/o di non derivabilità, specificandone la natura (dire, cioè, se si tratta di punti angolosi, di cuspide, di flesso a tangente verticale, di discontinuità ...).

Rappresentiamo le curve: $y=|\log x|$; $y=-|\log x|$; $y=1-|\log x|$ ed infine $y=\left|1-\left|\log(x)\right|\right|$



La funzione è continua, essendo la composizione di funzioni continue, gli eventuali punti di non derivabilità sono $x=\frac{1}{e}; x=1; x=e$. Per stabilirne il carattere osserviamo che:

$$f(x)=\begin{cases} -1-\log x; 0<x<\frac{1}{e} \\ 1+\log x; \frac{1}{e}\le x\le 1 \\ 1-\log x; 1<x\le e \\ -1+\log x; x>e \end{cases}$$ , quindi: $$f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}; 0<x<\frac{1}{e} \\ \frac{1}{x}; \frac{1}{e}<x<1 \\ -\frac{1}{x}; 1<x<e \\ \frac{1}{x}; x>e \end{cases}$$

$f'_-\left(\frac{1}{e}\right)=-e$ $\quad f'_-(1)=1 \quad f'_-(e)=-\frac{1}{e}$

$f'_+\left(\frac{1}{e}\right)=+e$ $\quad f'_+(1)=-1 \quad f'_+\left(\frac{1}{e}\right)=+\frac{1}{e}$ . Si tratta quindi di punti angolosi.

4. $g(x):=x^{\frac{4}{3}}\log|x|+\left|\log\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\right|$ spiega, giustificando tutti i passaggi per il calcolo del limite, se la funzione è prolungabile con continuità in $x_0=0$.

Calcoliamo il $\lim_{x\to 0}x^{\frac{4}{3}}\log|x|+\left|\log\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\right|$, osserviamo che: $\lim_{x\to 0}x^{\frac{4}{3}}\log|x|$ si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$, togliendo l'indeterminazione (per esempio con De L'Hopital) si ha che: $\lim_{x\to 0}x^{\frac{4}{3}}\log|x|=0$ e quindi:

$\lim_{x\to 0}x^{\frac{4}{3}}\log|x|+\left|\log\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\right|=\left|\log\frac{3}{4}\right|=\log\frac{4}{3}$, quindi la funzione è prolungabile con continuità in $x_0=0$.

$$g_1(x):=\begin{cases} x^{\frac{4}{3}}\log|x|+\left|\log\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\right|, x\neq 0 \\ \log\frac{4}{3}, x=0 \end{cases}$$

5. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione definita da: $f:=x^3+e^{2x}-5$. Stabilisci se la funzione è invertibile in $\mathbb{R}$ e in caso affermativo, indicata con $g$ la sua funzione inversa, rappresenta il grafico $y=g(f(x))$.

Calcoliamo la derivata $f'(x)=3x^2+2e^{2x}>0$ in $\mathbb{R}$. Il dominio e il codominio di $f$ è $\mathbb{R}$, quindi $y=g(f(x))=x$, $x\in\mathbb{R}$.

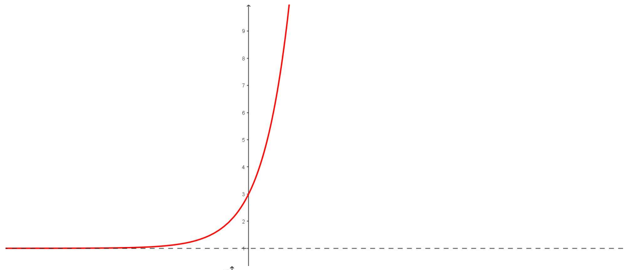
6. Calcola il $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\log(1-2x)}$.

Per $x\to 0$ $e^{3x}-1\sim 3x$ e $\log(1-2x)\sim -2x$, quindi: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\log(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-2x}=-\frac{3}{2}$

7. Enuncia il teorema di Lagrange e stabilisci, giustificando adeguatamente, se la funzione $f(x) := \sqrt{2x - x^2}$ soddisfa le condizioni del teorema nell'intervallo $[0,1]$. In caso affermativo trova i punti / il punto che soddisfano / soddisfa il teorema.

La funzione è continua in $[0,2]$ e derivabile in $(0,2)$, quindi è continua in $[0,1]$ e derivabile in $(0,1)$, soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange. Esiste quindi $x \in (0,1)$ tale che: $f'(x) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0}$. Risolvendo si trova che l'unica soluzione accettabile è: $x = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Rappresenta sommariamente il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 2}$ e determina l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa $x = 1$.

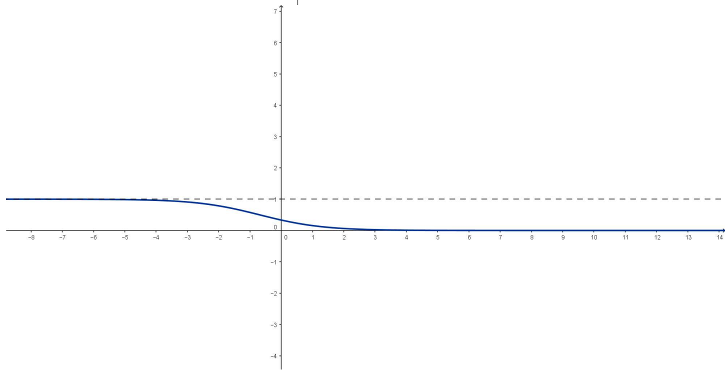


$f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x} + 2} = \dfrac{1}{1 + 2e^x}$.

Grafico di $g(x) = 1 + 2e^x$

dal quale si deduce immediatamente il grafico di

$f(x) = \dfrac{1}{1 + 2e^x}$



Asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \to -\infty$

Asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$

Sempre decrescente. Presenta un punto di flesso.

Calcoliamo le derivate: $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(1 + 2e^x)^2}$

$f(1) = \dfrac{1}{1 + 2e}$ e $f'(1) = \dfrac{-2e}{(1 + 2e)^2}$

L'equazione della retta tangente in $\left(1, \dfrac{1}{1+2e}\right)$ è: $y - \dfrac{1}{1+2e} = -\dfrac{2e}{(1+2e)^2}(x-1)$

9. Considera la funzione $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Spiega perché la funzione è invertibile nell'intervallo $(0, +\infty)$. Detta $g(y)$ la funzione inversa relativamente all'intervallo considerato, calcola $g'\left(\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

Calcoliamo $f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{x+1}{x}$, la derivata prima è maggiore di zero nell'intervallo $(0,+\infty)$, quindi per il teorema di Lagrange la funzione è strettamente crescente in tale intervallo e quindi è invertibile. La derivata della funzione inversa

$g'\left(\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, con $f(x_0)=\dfrac{2}{\sqrt{e}}\rightarrow x_0\cdot e^{-\frac{1}{x_0}}=2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\rightarrow x_0=2$.

Quindi: $g'\left(\dfrac{2}{\sqrt{e}}\right)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{2\sqrt{e}}{3}$.

10. Considera la funzione $f(x)=x\cdot e^{-x}$, disegna il grafico giustificando tutti i passaggi eseguiti ed individua gli intervalli di invertibilità. Stabilisci se la funzione è invertibile in $O=(0,0)$ e in caso affermativo calcola la derivata della funzione inversa in tale punto.

$f(x)=x\cdot e^{-x}$, dominio $\mathbb{R}$, segno:

$x>0\rightarrow f(x)>0$

$x=0\rightarrow f(0)=0$

$x<0\rightarrow f(x)<0$

comportamento agli estremi del dominio: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x}=-\infty$ vi è un asintoto orizzontale $y=0$ per $x\rightarrow+\infty$.

Derivata prima:

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$

$x<1\rightarrow f'(x)>0$, la funzione è crescente

$x>1\rightarrow f'(x)<0$, la funzione è decrescente

$x=1\rightarrow f'(1)=0$; $(1,e^{-1})$ punto di massimo relativo ed assoluto

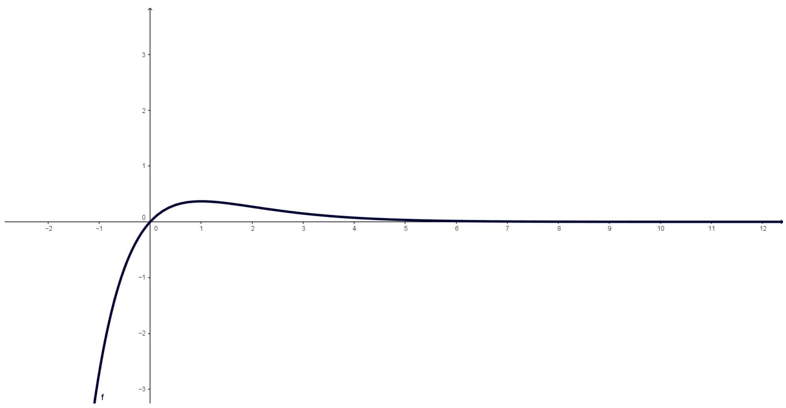
Derivata seconda:

$f''(x)=e^{-x}(x-2)$

$x<2\rightarrow f''(x)<0$, la funzione rivolge la concavità verso il basso

$x>2\rightarrow f''(x)>0$, la funzione rivolge la concavità verso l'alto

$x=2\rightarrow f''(2)=0$; $(2,2e^{-2})$ punto di flesso.



La funzione è invertibile in: $(-\infty,1]\vee[1,+\infty)$ in questi due intervalli considerati separatamente una qualsiasi retta parallela all'asse delle ascisse $y=k, k\le e^{-1}$ incontra la curva in un solo punto, in altre parole ogni $y$ del codominio proviene da una sola $x$ del dominio da cui l'invertibilità.

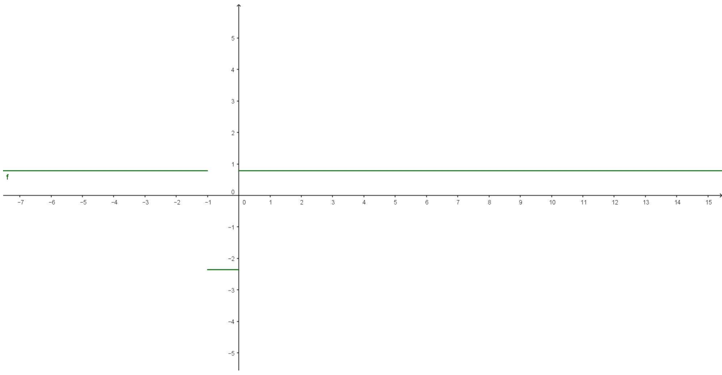
La funzione è pertanto invertibile in $O=(0,0)$, e $g'(0)=\dfrac{1}{f'(0)}=1$

11. Considera la funzione $f(x)=arctg\left(\frac{1}{x}\right)+arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ e calcola la derivata. E' possibile affermare che la funzione è costante? Rappresenta la funzione.

Calcoliamo la derivata della funzione:

$f'(x)=0$

Il corollario del teorema di Lagrange non è applicabile in questo caso in quanto la funzione non è definita in $x=-1$ e in $x=0$ e quindi il dominio della funzione non è un intervallo, non possiamo pertanto concludere che la funzione è costante nel suo dominio naturale. Osserviamo però che negli intervalli $(-\infty,-1)\vee(-1,0)\vee(0,+\infty)$ la derivata prima è nulla, quindi in ciascun intervallo la funzione è costante.



Per $x<-1$, per esempio $x=-2$ è $f(-2)=\frac{\pi}{4}$

Per $-1<x<0$, per esempio $x=-\frac{1}{2}$ è $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}\pi$

Per $x>0$, per esempio $x=2$ è $f(2)=\frac{\pi}{4}$

12. Stabilisci se le funzioni $f(x)=\begin{cases} x^2\log x; x>0 \\ e^x-1; x\le 0\end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases} x^2\sin x; x>0 \\ 0; x=0 \\ e^{\frac{1}{x}}; x<0\end{cases}$ sono derivabile in $x=0$.

Per $f(x)$:

$\lim_{x\to 0^+} x^2\log x=\lim_{x\to 0^-}\left(e^x-1\right)=f(0)$, quindi la funzione è continua in $x=0$.

$\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2\log h}{h}=0$, mentre $\lim_{h\to 0^-}\frac{e^h-1}{h}=1$, quindi non è derivabile in $x=0$.

Per $g(x)$:

$\lim_{x\to 0^+} x^2\sin x=\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0=g(0)$ , quindi è continua in $x=0$

$\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2\sin h}{h}=0$ e $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{h}}}{h}=0$, quindi la funzione è derivabile in $x=0$.

13. Calcola la velocità ( o tasso) di variazione del volume di una sfera rispetto al suo raggio (risolto a lezione).

14. Un contenitore cilindrico con raggio di base $R=1m$ e altezza $3m$ è pieno d'acqua. Da un rubinetto posto in prossimità del fondo vengono prelevati $10$ litri di acqua al minuto. Determina con quale velocità l'altezza dell'acqua nel cilindro decresce (risolto a lezione).

15. In un triangolo isoscele $ABC$ di base $AB = 3cm$ il vertice $C$ si muove perpendicolarmente alla base in modo che l'area del triangolo cresca alla velocità di $4cm^2/s$. A quale velocità cresce l'altezza $CH$ ? E il lato $CB$ ? (risolto a lezione).