Esercizio 1.

Determina tutte le soluzioni in campo complesso delle equazioni:

- $z^3+\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{12}=0$ ovvero: $z^3=-\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{12}$

Poniamo $\omega=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}=-\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

$$|\omega|=\sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Arg(\omega)=\pi-arctg\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)=\pi-\frac{5}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi$$

$\omega^{12}=\frac{1}{2^6}\left[\cos(7\pi)+i\sin(7\pi)\right]=\frac{1}{2^6}\left[\cos(\pi)+i\sin(\pi)\right]=-\frac{1}{2^6}$, per la periodicità del seno e coseno

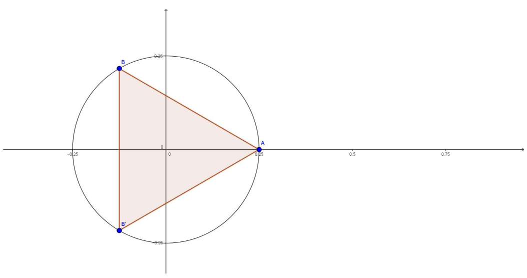
$$z^3=-\omega^{12}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{2^6}\left[\cos(0)+i\sin(0)\right]$$

Le radici cubiche di z sono: $z_k=\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right]=\frac{1}{4}e^{i\frac{2k\pi}{3}}$ con $k=0,1,2$.

Scriviamole in forma algebrica e rappresentiamo sul piano di Gauss:

$$z_0=\frac{1}{4}\qquad z_1=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\qquad z_2=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Le soluzioni stanno sui vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro O e raggio $R=\frac{1}{4}$



- $\left(\frac{\bar{z}-i}{z+i}\right)^4 = 16$

$\frac{\bar{z}-i}{z+i} = \frac{x-iy-i}{x+iy+i} = \frac{x-i(y+1)}{x+i(y+1)}$, con $x+i(y+1) \neq 0$. Numeratore e denominatore sono due complessi coniugati, quindi il modulo del rapporto è 1. L'equazione non ha pertanto alcuna soluzione.

Esercizio 2.

Determina due numeri complessi ω_1, ω_2 in modo che l'equazione (*) $\omega_1 z^2 + \omega_2 z + i = 0$ abbia come soluzioni $z_1 = 3+i$ e $z_2 = \frac{1}{2+i}$

Ricorda le proprietà che legano le soluzioni di una equazione di secondo grado ai coefficienti:
$ax^2 + bx + c = 0$, se l'equazione ha due soluzioni x_1, x_2 (nel caso complesso le soluzioni esistono sempre!) è:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

abbiamo:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{i}{\omega_1} \end{cases} \to \begin{cases} 3+i+\frac{1}{2+i} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \\ (3+i)\left(\frac{1}{2+i}\right) = \frac{i}{\omega_1} \to \omega_1 = \frac{7i-1}{10} \to \omega_2 = \frac{9-23i}{10} \end{cases}$$

Oppure sostituendo nell'equazione (*) le soluzioni e risolvendo il sistema .....

Esercizio 3.

Determina le radici cubiche in campo complesso di

$$(2+3i)^2 - \frac{e^{2\pi i} + 9e^{-\frac{\pi}{2}i}}{e^{\pi i} + e^{\frac{\pi}{2}i}}$$

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

$$9e^{-\frac{\pi}{2}i} = 9\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = -9i$$

$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = i$$

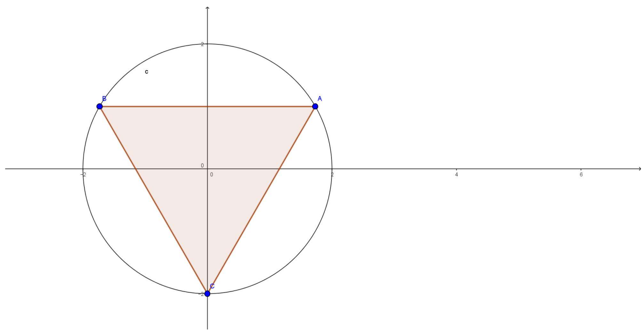
$$(2+3i)^2 - \frac{e^{2\pi i} + 9e^{-\frac{\pi}{2}i}}{e^{\pi i} + e^{\frac{\pi}{2}i}} = (4+12i-9) + \frac{1-9i}{1-i} = 8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Le radici cubiche sono pertanto:

$\omega_k = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$ con $k = 0,1,2$.

Le soluzioni sono:

$$\omega_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \qquad \omega_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \qquad \omega_1 = 2i$$



Le soluzioni stanno sui vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro O e raggio $R = 2$

Esercizio 4.

Determina tutti i numeri complessi che sono uguali al complesso coniugato del proprio quadrato e rappresentali graficamente nel pano complesso.

$$z = \overline{z^2} \rightarrow x + iy = \overline{(x-iy)^2} \rightarrow x + iy = \overline{x^2 - y^2 + i(2xy)} \rightarrow x + iy = x^2 - y^2 - i(2xy)$$

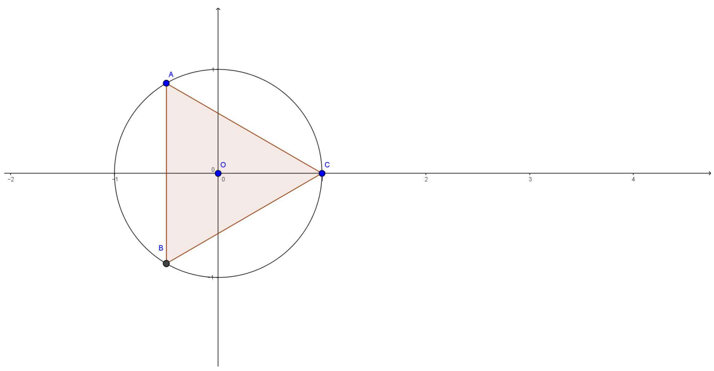
quindi:

$\begin{cases} x = x^2 - y^2 \\ y = -2xy \end{cases}$. Risolvendo si ottengono le soluzioni: $(0,0);(1,0);\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Quindi:

$z_1 = 0$; $\quad z_2 = 1$; $\quad z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Le soluzioni z_2, z_3, z_4 stanno sui vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro O e raggio $R = 1$, la soluzione $z_1 \doteq O$

Esercizio 5

Scrivi nella forma trigonometrica i seguenti numeri complessi ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}\left(\cos y + i\sin y\right)$$

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^{x}\left(\cos y - i\sin y\right)$$

$$ie^{z} = ie^{x+iy} = e^{x}\left(i\cos y - \sin y\right) = e^{x}\left(-\sin y + i\cos y\right)$$

$$e^{2z+3i} = e^{2x+i(2y+3)} = e^{2x}\left(\cos\left(2y+3\right) + i\sin\left(2y+3\right)\right)$$

$$e^{-iz} = e^{-i(x+iy)} = e^{-ix+y} = e^{y}\left(\cos\left(-x\right) + i\sin\left(-x\right)\right) = e^{y}\left(\cos x - i\sin\left(x\right)\right)$$

Esercizio 6.

Calcola la parte reale del numero complesso: $\dfrac{1}{2+i}e^{(3-i)x}$

$$\frac{1}{2+i}e^{(3-i)x} = \frac{2-i}{5}e^{3x}\left(\cos x - i\sin x\right) = \frac{e^{3x}}{5}\left[2\cos x - \sin x + i\left(-2\sin x - \cos x\right)\right]$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2+i}e^{(3-i)x}\right] = \frac{e^{3x}}{5}\left(2\cos x - \sin x\right)$$

Esercizio 7.

Calcola la parte immaginaria del numero complesso: $\left(5+2i\right)e^{-3x+2ix}$

$$\left(5+2i\right)e^{-3x+2ix} = \left(5+2i\right)e^{-3x}\left[\cos\left(2x\right) + i\sin\left(2x\right)\right] = e^{-3x}\left[5\cos\left(2x\right) - 2\sin\left(2x\right)\right] + ie^{-3x}\left[5\sin\left(2x\right) + 2\cos\left(2x\right)\right]$$

$$\operatorname{Im}\left[\left(5+2i\right)e^{-3x+2ix}\right] = e^{-3x}\left[5\sin\left(2x\right) + 2\cos\left(2x\right)\right].$$

Esercizio 8.

Calcola nel campo complesso i logaritmi di: -1; $1+i\sqrt{3}$

Ricordiamo che $\log\left(\rho e^{i\theta}\right) = \log\rho + i\left(\theta + 2k\pi\right); k \in \mathbb{Z}$

$$\log\left(-1\right) = \log\left(e^{i\pi}\right) = \log 1 + i\left(\pi + 2k\pi\right) = i\left(\pi + 2k\pi\right)$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Quindi: $\log\left(1+i\sqrt{3}\right) = \log\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \log 2 + i\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$

Esercizio 9.

Risolvi l'equazione: $e^{iz} = ie^{z}; z = x + iy$

$$z = x + iy \to iz = ix + i^2 y = -y + ix \to e^{iz} = e^{-y+ix} = e^{-y}\left(\cos x + i \sin x\right)$$

$$* \, e^{iz} = e^{-y}\left(\cos x + i \sin x\right)$$

$$ie^{z} = ie^{x+iy} = ie^{x}\left(\cos y + i \sin y\right) = e^{x}\left(i \cos y + i^2 \sin y\right) = e^{x}\left(-\sin y + i \cos y\right) = e^{x}\left(\sin\left(-y\right) + i \cos\left(-y\right)\right)$$

per la parità della funzione coseno.

$$** \, ie^{z} = e^{x}\left(\sin\left(-y\right) + i \cos\left(-y\right)\right)$$

Uguagliando i secondi membri di * e ** (dovendo essere $e^{iz} = ie^{z}$) si ottiene:

$$e^{-y}\left(\cos x + i \sin x\right) = e^{x}\left(\sin\left(-y\right) + i \cos\left(-y\right)\right)$$

$$\to \begin{cases} e^{-y} = e^{x} \to x = -y \\ \cos x = \sin\left(-y\right) \to \cos x = \sin x \to x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \to y = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin x = \cos\left(-y\right) \to \sin x = \cos x \end{cases} \text{, con } k \in \mathbb{Z}$$

Soluzioni: $z = \left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi + i\left(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right)\right)$.

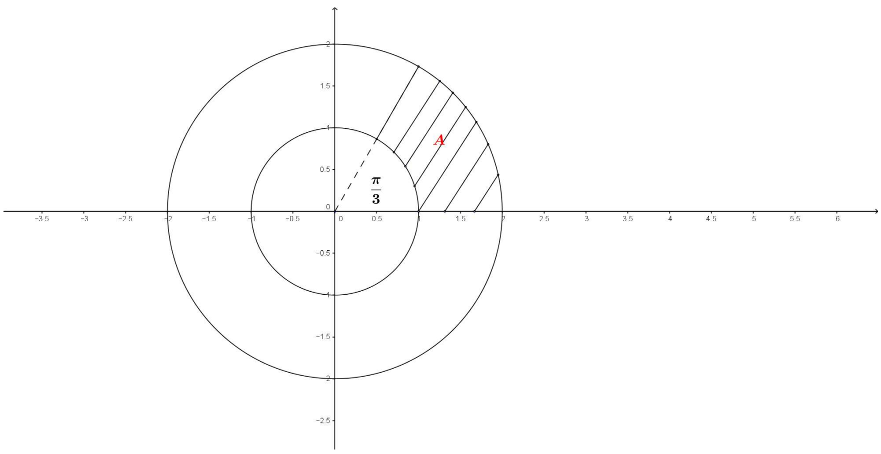
Esercizio 10.

Disegna nel piano complesso i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le 2; 0 \le \arg\left(z\right) \le \frac{\pi}{3} \right\}$$

$\left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \le z \le 2 \right\}$ è la corona circolare racchiusa tra le circonferenza di raggio 1 e 2 rispettivamente e centro in $z_0 = 0$

Dovendo anche essere $0 \le Arg\left(z\right) \le \dfrac{\pi}{3}$, si deduce che l'insieme A è il seguente:

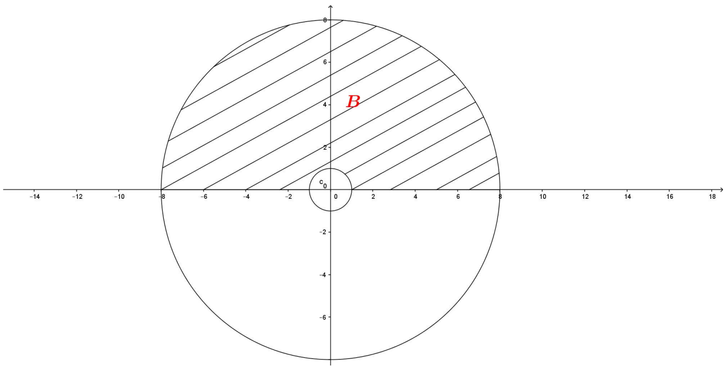


$$B = \left\{ \omega \in \mathbb{C} : \omega = z^3 ; z \in A \right\}$$

$$|\omega| = |z|^3 \rightarrow 1 \leq |\omega| \leq 8$$

$$Arg(\omega) = 3 \cdot Arg(z) \rightarrow 0 \leq Arg(\omega) \leq \pi$$

L'insieme B è il seguente:



$$C = \left\{ v \in \mathbb{C} : v = \sqrt[4]{z} ; z \in A \right\}$$

$$|v| = \sqrt[4]{|z|} \rightarrow 1 \leq |v| \leq \sqrt[4]{2}$$

Indicato con $\theta = Arg(z)$, si ha che: $Arg(v) = \dfrac{\theta}{4} + \dfrac{2k\pi}{4} = \dfrac{\theta}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ con $k = 0,1,2,3.$

da $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3} \rightarrow k\dfrac{\pi}{2} \leq Arg(v) \leq \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{2}$

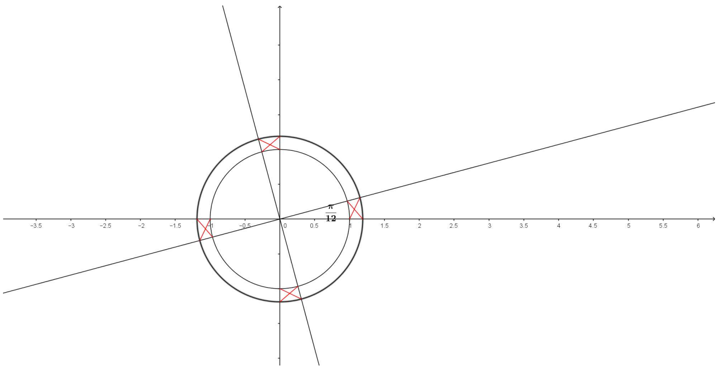
Si ha che:

Per $k = 0$, $0 \leq Arg(v) \leq \dfrac{\pi}{12}$

Per $k = 1$, $\dfrac{\pi}{2} \leq Arg(v) \leq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}$

Per $k = 2$, $\pi \leq Arg(v) \leq \dfrac{\pi}{12} + \pi$

Per $k = 3$, $\dfrac{3}{2}\pi \leq Arg(v) \leq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{3}{2}\pi$



L'insieme C è indicato con una X

Esercizio 11.

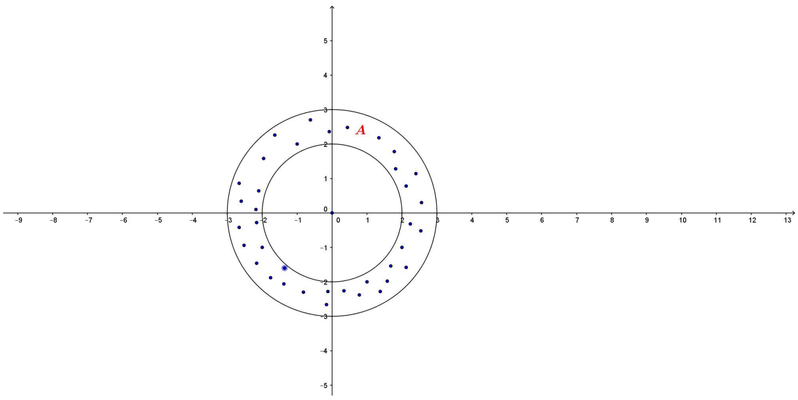
Disegna nel piano complesso i seguenti insiemi:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|^2-5|z|+6\le 0\right\}$$

Risolvendo la disequazione

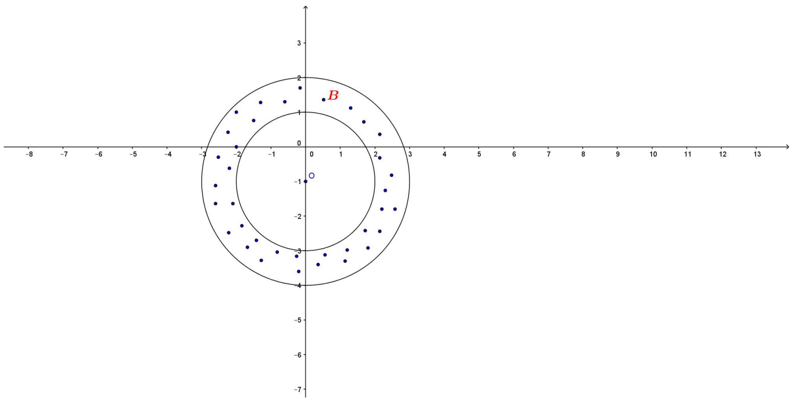
$|z|^2-5|z|+6\le 0$ si ha: $2\le|z|\le 3$.

Quindi l'insieme A è la corona circolare racchiusa tra le circonferenze di raggio 2 e 3 , centro in $z_0=0$

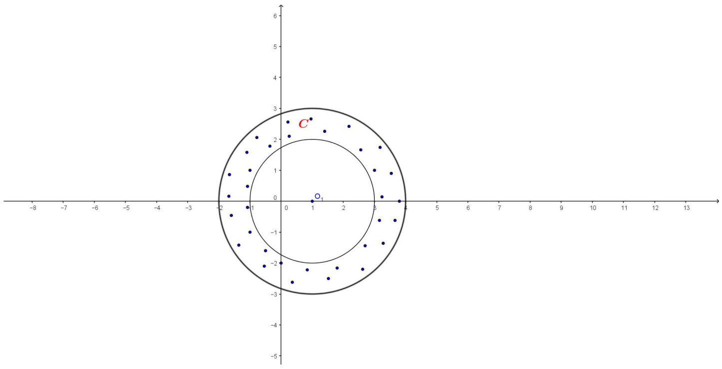


L'insieme

$B=\left\{\omega\in\mathbb{C}:\omega=z-i, z\in A\right\}$ corrisponde a una traslazione verso il basso dell'insieme A di una unità, centro in $z_0=-i$



$C=\left\{v\in\mathbb{C}:v=\omega\cdot i,\omega\in B\right\}$, poiché $|i|=1$ e $Arg(i)=\frac{\pi}{2}$, ricordando il significato geometrico di prodotto di due numeri complessi, si deduce che l'insieme C corrisponde aduna rotazione di $\frac{\pi}{2}$ dei punti $\omega\in B$. In particolare il centro viene ruotato di $\frac{\pi}{2}$, centro in $z_1=1$.



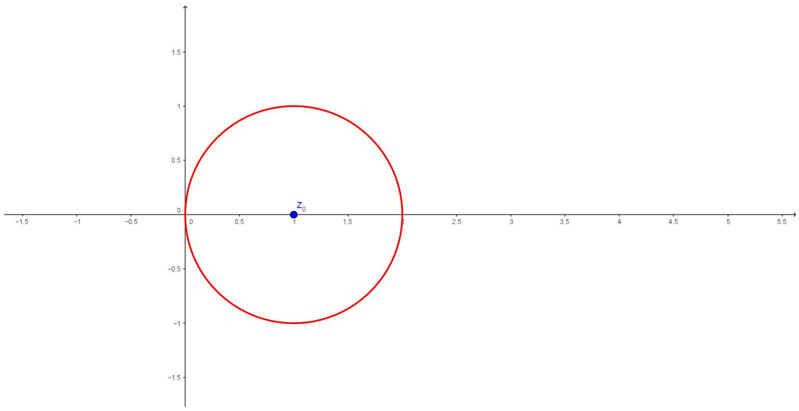
Esercizio 12.

Disegna nel piano complesso i seguenti insiemi:

$A = \{ z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1 \}$

$B = \{ \omega \in \mathbb{C} : \omega = (1+i) \cdot z ; z \in A \}$

L'insieme A è la circonferenza di centro in $z_0 = 1$ e raggio 1



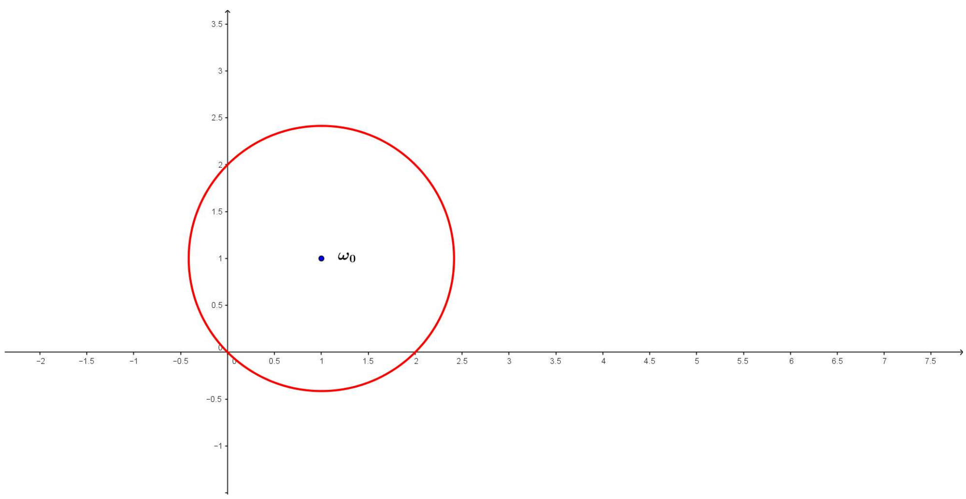
L'insieme B si ottiene come segue:

$|1+i| = \sqrt{2}$, $Arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$

Quindi i punti di B si ottengono da quelli dell'insieme A mediante una rotazione di un angolo uguale ad $\dfrac{\pi}{4}$ e una "dilatazione" di $\sqrt{2}$.

In particolare il centro $z_0 = 1 + 0i$ avente $|z_0| = 1$ e $Arg(z_0) = 0$ si trasformerà in ω_0 con $|\omega_0| = \sqrt{2}$ e $Arg(z_0) = \dfrac{\pi}{4}$. Quindi: $\omega_0 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4} \right) = 1 + i$

L'insieme B è quindi una circonferenza di centro $\omega_0 = 1 + i$ e raggio $R = \sqrt{2}$



Esercizio 13

Nel piano complesso calcola l'area del poligono avente per vertici le soluzioni dell'equazione $z^6 = 32\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$.

$z^6 = 32\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+i\right) = 64\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}} \rightarrow \rho\left(z^6\right) = 64\sqrt{2}$. Il modulo di z è $\rho = \sqrt[6]{64\sqrt{2}} = 2\sqrt[12]{2}$. Le soluzioni si trovano sui vertici dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\rho = 2\sqrt[12]{2}$, il lato dell'esagono è $l = \rho = 2\sqrt[12]{2}$ ed, essendo l'area di un triangolo equilatero $A_1 = \frac{l^2}{4}\sqrt{3}$, segue che l'area richiesta è:

$$A = 6 \cdot \frac{\left(2\sqrt[12]{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4\sqrt[6]{2}\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt[6]{54}.$$

Esercizio 14.

Nel piano complesso calcola il perimetro del poligono avente per vertici le soluzioni dell'equazione $z^4 = 8\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

Soluzione: $z^4 = 8\left(1-i\sqrt{3}\right) = 16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \rightarrow \rho(z) = 2$

Le soluzioni stanno sui vertici di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio $R = 2$ il cui perimetro è $8\sqrt{2}$.

Esercizio 15.

Scomporre il polinomio $x^4 + 1 = 0$

Risolviamo l'equazione $x^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$

le radici quarte sono: $x_k = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$, $k = 0,1,2,3.$

$$x^4 + 1 = \left(x-x_0\right)\cdot\left(x-x_1\right)\cdot\left(x-x_2\right)\cdot\left(x-x_3\right)$$

con: $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ $\quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$ $\quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ $\quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

Esercizio 16.

Quali sono le soluzioni dell'equazione $z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1 = 0$?

Osserviamo che il primo membro è la somma dei primi $n+1$ termini di una progressione geometrica di ragione x, quindi: $z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1 = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ da cui: $z^{n+1} - 1 = (z-1)\left(z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1\right)$.

Le soluzioni di $z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1 = 0$ sono quindi le soluzioni dell'equazione $z^{n+1} - 1 = 0$ esclusa la soluzione $z = 1$.

Le $n+1$ soluzioni di $z^{n+1} - 1 = 0$ si ottengono risolvendo l'equazione $z^{n+1} = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ e sono le seguenti:

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1},\ k = 0,1,\ldots,n.$$

Per $k=0$ abbiamo la soluzione $z_0=\cos 0+i\sin 0=1$ che escludiamo.

Le n soluzioni dell'equazione sono pertanto: $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$, $k=1,\ldots,n.$

Esercizio 17.

Utilizzando il principio di induzione dimostrare che $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$

Per $n=0$ è $1=1$, Vero

Supponiamo vera la $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$ e dimostriamo che è vera la:

$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{n+1}=\left(\cos\left((n+1)\theta\right)+i\sin\left((n+1)\theta\right)\right)$

$$\begin{aligned}
&\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{n+1}=\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\cdot\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\cdot\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)=\\
&=\cos\theta\cdot\cos(n\theta)+\cos\theta\cdot\left(i\sin(n\theta)\right)+i\sin\theta\cdot\cos(n\theta)+i\sin\theta\cdot\left(i\sin(n\theta)\right)=\\
&=\cos\theta\cdot\cos(n\theta)-\sin\theta\cdot\sin(n\theta)+i\left[\cos\theta\cdot\sin(n\theta)+\sin\theta\cdot\cos(n\theta)\right]=\\
&=\cos(\theta+n\theta)+i\sin(\theta+n\theta)=\cos\left((n+1)\theta\right)+i\sin\left((n+1)\theta\right).
\end{aligned}$$

Esercizio 18.

L'equazione $\alpha z^2+\beta z-2i=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ha soluzioni: $z_1=2+i$ e $z_2=\frac{1}{2i}$. Determina $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

$z_1+z_2=\frac{4+i}{2}$ e $z_1\cdot z_2=\frac{1-2i}{2}$

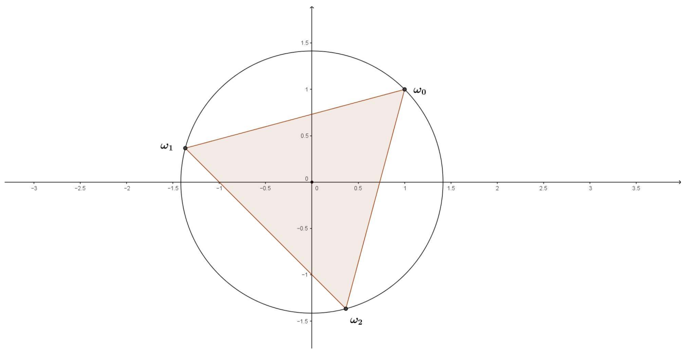
$$\begin{cases} z_1\cdot z_2=\dfrac{-2i}{\alpha} \\ z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{4}{5}(2-i) \\ \beta=-\dfrac{2}{5}(9-2i)\end{cases}$$

Allo stesso risultato si perviene sostituendo nell'equazione le soluzioni e risolvendo il sistema lineare nelle incognite α,β

$$\begin{cases}(3+4i)\alpha+(2+i)\beta=2i \\ \alpha+2i\beta=-8i\end{cases}$$

Esercizio 19.

Determina le radici cubiche di $\left(1+i\right)^3$ e rappresenta nel piano complesso.



$$\left|1+i\right| = \sqrt{2}$$

$$Arg\left(1+i\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{1}{4}\pi} \to \left(1+i\right)^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

$$\omega_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$$

Esercizio 20.

Risolvi l'equazione $\left(z+i\right)^3 = \frac{1-i}{1+i}$. Pongo $\omega = z+i \to z = \omega - i$

$$\frac{1-i}{1+i} = -i = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \to \sqrt[3]{-i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right).$$

$$k = 0 \to \omega_0 = i \to z_0 = \omega_0 - i = 0$$

$$k = 1 \to \omega_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \to z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$k = 2 \to \omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \to z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$