(argomenti trattati: fino ai polinomi di Taylor ESCLUSI)

Esercizio 1.

Calcola al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ *i seguenti limiti:*

a. $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+x^2\right)^\alpha - x\right]$

b. $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \log x$

a. $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+x^2\right)^\alpha - x\right]$

1. Se $\alpha \le 0$ è $\lim_{x\to\infty}\left[\left(x+x^2\right)^\alpha - x\right] = -\infty$

2. Se $\alpha > 0$ è $\left(x+x^2\right)^\alpha - x \sim x^{2\alpha} - x$, distinguiamo i seguenti casi:

Se $2\alpha > 1 \to \alpha > \frac{1}{2}$ è: $x^{2\alpha} - x \sim x^{2\alpha}$, quindi $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+x^2\right)^\alpha - x\right] = +\infty$

Se $0 < 2\alpha < 1 \to 0 < \alpha < \frac{1}{2}$ è: $x^{2\alpha} - x \sim -x$, quindi $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+x^2\right)^\alpha - x\right] = -\infty$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ non possiamo utilizzare l'asintotico, il calcolo diretto del limite fornisce:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+x^2} - x\right] = \frac{1}{2}$$

Riassumendo è: $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x+x^2\right)^\alpha - x\right] = \begin{cases} +\infty, \alpha > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{2} \\ -\infty, \alpha < \frac{1}{2} \end{cases}$

b. $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \log x$

Se $\alpha \le 0$ è $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \log x = -\infty$

Se $\alpha > 0$ è $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \log x = \lim_{t\to+\infty} \frac{\log(1/t)}{t^\alpha} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{\log t}{t^\alpha} = 0$ (gerarchia infiniti)

Esercizio 2.

Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x\to0}\frac{(x+2)^{x+3} - 8}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Possiamo applicare la regola di De L'Hopital: $D(x+2)^{x+3} = (x+2)^{x+3}\left[\log(x+2) + \frac{x+3}{x+2}\right]$.

$$\lim_{x\to 0}(x+2)^{x+3}\left[\log(x+2)+\frac{x+3}{x+2}\right]=4(2\log 2+3)=12+\log 2^8=12+\log 256$$

Esercizio 3.

Verifica che le funzioni $f(x)=\dfrac{1}{\log|x|}$ *e* $g(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ *sono prolungabili con continuità in* $x=0$*, mentre le funzioni* $h(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$ *e* $l(x)=arctg\dfrac{1}{x}$ *non lo sono.*

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log|x|}=0$, prolungabile con continuità. Prolungamento continuo: $\overline{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\log|x|}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$, prolungabile con continuità. Prolungamento continuo: $\overline{g}(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$, la funzione non è prolungabile con continuità in $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}arctg\dfrac{1}{x}=+\dfrac{\pi}{2}$ e $\lim\limits_{x\to 0^-}arctg\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$, la funzione non è prolungabile con continuità in $x=0$.

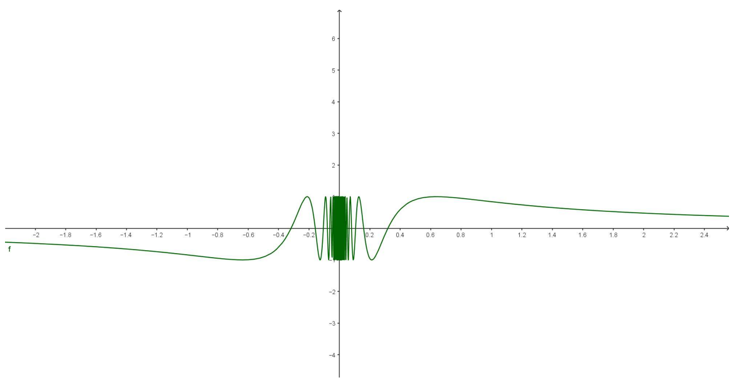
Esercizio 4.

Studia, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ *la derivabilità in* $x=0$ *di*

$f(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, x>0\\ 0, x=0\end{cases}$ *e verifica che per* $\alpha=2$ *la derivata non è continua in* $x=0$*.*

Se $\alpha\leq 0$ non esiste il $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}\right)$, quindi la funzione non è continua in $x=0$.

Grafico di $y=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$



Se $\alpha>0$ il $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}\right)=0=f(0)$, quindi la funzione è continua in $x=0$.

Derivabilità in $x=0$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{h^\alpha \sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+} h^{\alpha-1}\sin\frac{1}{h}$$, tale limite esiste e vale 0 solo se $\alpha-1>0$ cioè $\alpha>1$.

Riassumendo: la funzione è continua in $x=0$ solo se $\alpha>0$ ed è derivabile solo se $\alpha>1$.

Se $\alpha=2$, la funzione è derivabile in $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

la derivata non è continua in $x=0$ poiché non esiste il $\lim_{x\to 0^+}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$.

Esercizio 5.

Traccia il grafico di $f(x)=x\sqrt[3]{\left(\log|x|\right)^2}$ *e studia gli eventuali punti di continuità e non derivabilità.*

Dominio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la funzione è dispari.

Studiamo per $x>0$, quindi: $f(x)=x\sqrt[3]{(\log x)^2}=x(\log x)^{\frac{2}{3}}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x(\log x)^{\frac{2}{3}}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} x(\log x)^{\frac{2}{3}}=+\infty$$

$$f'(x)=\frac{3\log x+2}{3\sqrt[3]{\log x}}>0$$

Numeratore: $3\log x+2>0$ per $x>e^{-\frac{2}{3}}\simeq 0.5$

Denominatore: $\log x>0$ per $x>1$.

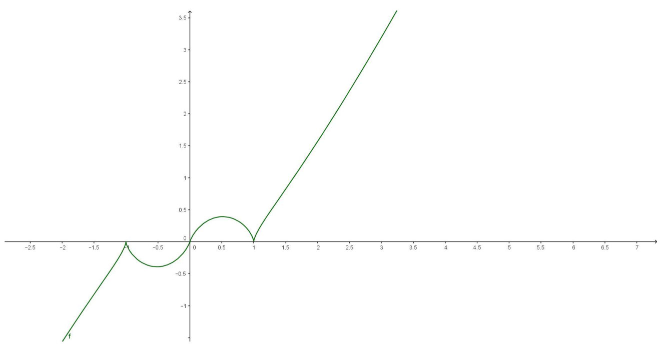
Quindi $f'(x)>0$ in $\left(0,e^{-\frac{2}{3}}\right)\vee(1,+\infty)$, intervalli di crescenza, $f'(x)<0$ in $\left(e^{-\frac{2}{3}},1\right)$, intervallo di decrescenza.

Per stabilire la natura di $x=1$ dove la funzione non è derivabile, calcoliamo:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{3\log x+2}{3\sqrt[3]{\log x}}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{3\log x+2}{3\sqrt[3]{\log x}}=+\infty$$

quindi $x=1$ è un punto di cuspide.

Osserviamo che la funzione è prolungabile con continuità in $x=0$.



Esercizio 6.

Verifica che $f(x) = x\sin x - \cos(2x)$ *ha un punto stazionario in* $x = 0$ *e determinane la natura.*

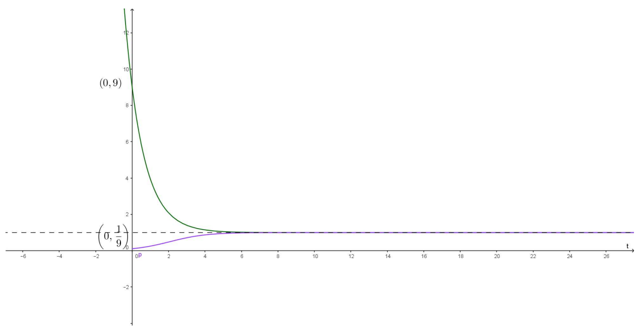
$f'(x) = \sin x + x\cos x + 2\sin(2x)$; $f'(0) = 0$, quindi $x = 0$ è un punto stazionario. Per stabilirne la natura, calcolo la derivata seconda:

$f''(x) = 2\cos x - x\sin x + 4\cos(2x)$; $f''(0) = 6 > 0$, quindi $x = 0$ è punto di minimo relativo.

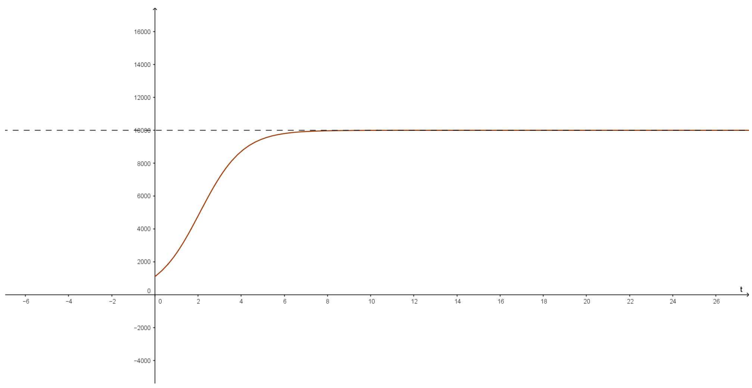
Esercizio 7.

Supponi che a funzione $f(t) = 10000 \cdot \dfrac{1}{1+8e^{-t}}$ descriva la crescita di una popolazione in funzione del tempo ($f(t)$ è la densità media di individui al tempo t). Traccia il grafico della funzione per $t \geq 0$. In quale istante il tasso di crescita è massimo? A quale punto del grafico corrisponde tale istante?

Grafico di $y = 1 + 8e^{-t}$ dal quale deduciamo $y = \dfrac{1}{1+8e^{-t}}$



e quindi il grafico $y = f(t)$



$f'(t) = \dfrac{80000e^t}{(8+e^t)^2}$ e $f''(t) = \dfrac{80000e^t(8-e^t)}{(8+e^t)^3}$ che presenta un massimo all'istante $t = \log 8$, che corrisponde alla massima velocità (tasso) di crescita.

Esercizio 8.

Un parallelepipedo rettangolo di base $2m^2$ e altezza $5m$ è pieno di acqua. Da un rubinetto posto sul fondo vengono prelevati 20 litri al minuto. Con quale velocità l'altezza dell'acqua decresce? Come varia l'altezza dell'acqua al variate del tempo?

Dati:

$V'(t) = -20dm^3/\min$; $S_b = 2m^2 = 200dm^2$; $h_0 = 5m = 50dm$

Dalla relazione $V = S_b \cdot h \rightarrow V' = S_b \cdot h' \rightarrow h' = \dfrac{V'}{S_b} = -0.1dm/\min$

Quindi: $h'(t) = -0.1dm/\min$, esprime la velocità con cui l'acqua decresce.

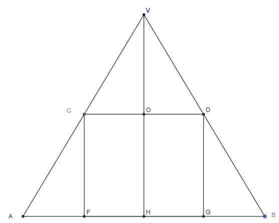
Troviamo l'espressione di come varia l'altezza dell'acqua al variate del tempo:

$\begin{cases} h'(t) = -0.1dm/\min \rightarrow h(t) = -0.1t + c \\ h(0) = h_0 = 50dm \end{cases}$, essendo $h(0) = 50 \rightarrow c = 50$. $h(t) = 50 - \dfrac{1}{10}t$

Esercizio 9.

Inscrivi in un cono circolare retto di altezza h e raggio di base R un cilindro di volume massimo.

Dati: $VH = h$ e $HB = R$. Poniamo: $OD = x$; $0 < x < R$.



Consideriamo i triangoli simili VHB e

$VOD : R : x = h : VO \rightarrow VO = \dfrac{h}{R}x$;

$OH = h - \dfrac{h}{R}x = \dfrac{h}{R}(R - x)$.

Il volume del cilindro è:

$$V(x) = \pi x^2 \frac{h}{R}(R - x) = \frac{\pi h}{R}(Rx^2 - x^3) \rightarrow V'(x) = \frac{\pi h}{R}(2Rx - 3x)$$

$V'(x) = \dfrac{\pi h}{R}(2Rx - 3x) > 0$ per $0 < x < \dfrac{2}{3}R$, quindi $x = \dfrac{2}{3}R$ è massimo relativo e assoluto.

Esercizio 10.

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(arctgx - \frac{\pi x + 2}{2x+1} \right) = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(arctgx - \frac{\pi x + 2}{2x+1} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{arctgx - \dfrac{\pi x + 2}{2x+1}}{x^{-1}}$$

$$D\left(arctgx - \frac{\pi x + 2}{2x+1} \right) = \frac{(8-\pi)x^2 + 4x + 5 - \pi}{(2x+1)^2 (x^2+1)}$$

$$D(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(8-\pi)x^2 + 4x + 5 - \pi}{(2x+1)^2(x^2+1)}(-x^2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\pi-8)x^4}{4x^4} = -2 + \frac{\pi}{4}$$