

Argomenti svolti fino venerdì 9 ottobre 2015

1. *Lunedì 21 settembre 2015*

Gli insiemi. Relazioni tra gli insiemi. L'insieme vuoto e l'insieme delle parti. Gli insiemi numerici. Operazioni su insiemi e proprietà. L'insieme dei numeri naturali e il principio di induzione. Alcuni tipi di dimostrazione: diretta, regola della controinversa, per assurdo. L'importanza dei controesempi. Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

2. *Martedì 22 settembre*

La dimostrazione per induzione. la disuguaglianza di Bernoulli (dimostrazione). Campi totalmente ordinati, (\mathbb{Q}, \leq) è un campo totalmente ordinato. L'insieme $(P(A), \subseteq)$ non è totalmente ordinato. Insiemi limitati, definizione di estremo superiore / inferiore, massimo e minimo. Insiemi non limitati. Assioma di completezza.

3. *Mercoledì 23 settembre*

Definizione assiomatica di \mathbb{R} . Allineamenti decimali. $0, \bar{9} = 1$. La retta reale. La cardinalità di un insieme finito. La cardinalità del numerabile e del continuo.

Il valore assoluto di un numero reale. Grafico di $f(x) = |x|$.

4. *Venerdì 25 settembre*

Disuguaglianza triangolare e disuguaglianza di Cauchy -Schwarz (dimostrazioni). Media geometrica ed aritmetica e relazione tra esse (dimostrazione). Simbolo di sommatoria e proprietà. Le progressioni aritmetiche e geometriche.

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}; q \neq 1 \text{ (dimostrazione).}$$

5. *Lunedì 28 settembre*

Permutazioni semplici, il simbolo di $n!$ e proprietà di $n!$

Disposizioni semplici e combinazioni semplici. Coefficienti binomiali e proprietà. Il binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \text{ (dimostrazione per induzione).}$$

Sia A un insieme di cardinalità finita n allora la cardinalità di $P(A)$ è 2^n (dimostrazione).

Radice n -sima e potenze ad esponente reale.

6. *Martedì 29 settembre*

L'esponenziale e i logaritmi. Grafici e proprietà. Risoluzione di esercizi.

7. *Mercoledì 30 settembre*

Definizione di funzione. Dominio, codominio e immagine di una funzione. Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. La funzione inversa. Il grafico della funzione inversa. Funzioni limitate e non limitate. Estremo superiore / inferiore, massimo e minimo. Funzioni monotone. Funzioni pari e dispari e loro grafici. Risoluzione di esercizi.

8. *Venerdì 2 ottobre*

Teorema: se una funzione è strettamente monotona allora è invertibile (dimostrazione), non vale il viceversa (controesempio). La funzione potenza $f(x) = kx^\alpha$. Le funzioni esponenziali e logaritmiche. Le funzioni periodiche.

Le funzioni circolari e le funzioni iperboliche. La curva "catenaria". $Sh(x) \leq \frac{e^x}{2} \leq Ch(x)$ e

$$(Ch(x))^2 - (Sh(x))^2 = 1 \text{ (con dimostrazioni).}$$

9. *Lunedì 5 ottobre*

Funzione parte intera e mantissa. Composizione di funzioni e iterate di una funzione. Funzioni inverse delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche. Risoluzione di esercizi.

10. Martedì 6 ottobre

Definizione di successione numerica. Successioni limitate e non limitate. Successioni monotone. Successioni che soddisfano definitivamente una certa proprietà.

Dimostrazione che le due successioni $a_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ e $a_n = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$ sono rispettivamente monotona

crescente e monotona decrescente. Definizione del numero di Nepero $e = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n ; n \geq 1 \right\}$. Il numero di

Nepero e un problema di capitalizzazione. Limite di una successione; successioni convergenti, divergenti e irregolari. Le successioni oscillanti. Il teorema di unicità del limite (dimostrazione). Risoluzione di esercizi.

11. Mercoledì 7 ottobre

Limiti di una successione monotona. Teorema: "le successioni monotone sono regolari" (dimostrazione).

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n .$$

Infiniti ed infinitesimi.

Teoremi di permanenza del segno e del confronto.

Corollari del teorema del confronto:

- $|b_n| \leq c_n$ e c_n infinitesima, allora anche b_n è infinitesima.
- Se b_n è limitata e c_n infinitesima, allora $(b_n \cdot c_n)$ è infinitesima.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Limiti di una successione geometrica.

Algebra dei limiti e aritmetizzazione parziale dei simboli "+∞" e "-∞".

Forme di indecisione.

Esercizi: calcolo di limiti di successioni.

12. Venerdì 9 ottobre

Confronti di infiniti e di infinitesimi.

Successioni asintotiche.

Criterio del rapporto.

Gerarchia degli infiniti.

Esercizi: calcolo di limiti di successioni.