| nome e cognome: | matricola: |
|---|---|

Prima di svolgere gli esercizi leggi con attenzione il testo. Scrivi le tue risposte **motivando ogni passaggio e spiegando in modo chiaro e leggibile le cose che fai**. Ricorda di scrivere il tuo nome e numero di matricola su ogni foglio (compreso questo) e di riconsegnare al termine dell'esame tutti i fogli che hai usato (compresi i fogli di brutta copia, il testo del compito e l'eventuale foglio manoscritto con le formule che hai preparato).

1. Nello sviluppo del binomio $\left(2x^2y^2+xy^3\right)^n$ compare il termine $80x^8y^{12}$, determina $n$.

2. Studia la convergenza semplice e assoluta delle serie:
$$A:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{n!} \quad \text{e} \quad B:=\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n\log\frac{n-2}{n+1}.$$

3. Calcola il $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\log(1-x)}{x^2\cdot\sin(3x)}$.

4. Stabilisci se $\int_4^{+\infty}\frac{1}{x^3\cdot\log x}dx$ è convergente.

5. Si vuole trovare una soluzione approssimata dell'equazione $\log x-\frac{1}{x}=0$. A tale scopo

   a. verifica che le ipotesi del metodo di Newton sono verificate nell'intervallo $[1,2]$

   b. scrivi esplicitamente la formula ricorsiva che assegna una successione convergente alla soluzione dell'equazione, precisando se tale approssimazione sarà per eccesso o per difetto

   c. calcola le prime due iterazioni.

6. Calcola le primitive della funzione $f(x)=\frac{x^3}{x^2-x-6}$.

7. Considera la funzione $f(x)=x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Spiega perché la funzione è invertibile nell'intervallo $(0,+\infty)$. Detta $g(y)$ la funzione inversa, relativamente all'intervallo considerato, calcola $g'\left(\frac{3}{\sqrt[3]{e}}\right)$.

8. Considera il numero complesso $z=\frac{2}{\sqrt{3}-i}+\frac{1}{i}$. Calcola $z^6$ e $z^{22}$ esprimendo il risultato in forma esponenziale e algebrica.

9. Determina il limite puntuale della successione di funzioni $f_n(x)=\frac{n\cdot x}{1+n^2x^2}$ con $x\in[-1,1]$. Successivamente stabilisci se la convergenza in tale intervallo è anche uniforme.

10. Enuncia il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale, quindi scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della curva $y=f(x)$, con $f(x)=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$ nel punto di ascissa $x=\frac{3\pi}{2}$.