MATEMATICA PER L'ELABORAZIONE DEI SEGNALI

COMPITO DEL 17/05/2016

NOME:

COGNOME:

NUMERO DI MATRICOLA:

Esercizio 1. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un segnale causale, ovvero tale che

$$x(t) = 0, \qquad \text{per ogni } t < 0.$$

(1) siano $\lambda > 0$ e $t_0 > 0$, si definisca il nuovo segnale causale

$$x_{\lambda,t_0}(t) = x\left(\frac{t-t_0}{\lambda}\right).$$

Si enunci una formula che dia il legame tra la trasformata di Laplace di x e quella di x_{λ,t_0}. Si precisi anche la relazione tra le ascisse di convergenza;

(2) consideriamo il segnale causale

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (t-n)\Big(u(t-n) - u(t-n-1)\Big), \qquad t \in \mathbb{R},$$

dove u è la funzione *gradino unitario* di Heaviside. Si rappresenti graficamente x e si calcoli la sua trasformata di Laplace, precisando il semipiano di convergenza;

(3) si calcoli la derivata distribuzionale del segnale al punto precedente;

(4) si calcolino le trasformate di Laplace dei segnali

$$t \mapsto e^t\, t\, x(t), \qquad t \mapsto x(2\,t-1) \qquad \text{e} \qquad t \mapsto x \otimes u(t),$$

dove x è ancora il segnale del punto (4). Per ogni caso, si precisino i semipiani di convergenza.

Esercizio 2. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ il segnale periodico

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{triang}\left(\frac{t}{\pi} - 2\,k\right).$$

Si rappresenti graficamente x e si calcoli il suo sviluppo in serie di Fourier.

Esercizio 3. Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ il segnale definito da

$$x(t) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[\mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2} - k\right) + \mathrm{rect}\left(t + \frac{1}{2} + k\right)\right]$$

(1) Rappresentare graficamente x;

(2) mostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < +\infty;$$

(3) mostrare che la sua trasformata di Fourier $f \mapsto X(f)$ è una funzione limitata, ovvero che esiste una costante $C > 0$ (dipendente eventualmente da x) tale che

$$|X(f)| \leq C, \qquad \text{per ogni } f \in \mathbb{R};$$

(4) calcolare la derivata distribuzionale di x;

(5) si calcoli la trasformata di Fourier della derivata distribuzionale di x;

(6) si calcoli la trasformata di Fourier di x. Si verifichi che tale trasformata è una funzione a valori reali.

Esercizio 4. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ e f un segnale causale trasformabile secondo Laplace. Si consideri il seguente problema di Cauchy

$$(\mathbf{C}) \qquad \begin{cases} y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) &= f(t), \quad \text{per } t \geq 0, \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0. \end{cases}$$

La funzione di variabile complessa

$$z \mapsto \frac{1}{z^2 + a\,z + b},$$

è detta *funzione di trasferimento del sistema*. Il segnale causale $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che

$$\mathcal{L}[Y](z) = \frac{1}{z^2 + a\,z + b},$$

è detto *risposta impulsiva del sistema*.

Si calcoli la risposta impulsiva nel caso $a = 0$ e $b = -4$ e si calcoli la soluzione del problema di Cauchy $(\mathbf{C})$ corrispondente, per $f(t) = e^{2\,t}\,u(t)$ (u è come sempre il gradino unitario).