SOLUZIONI

COMPITO DEL 29/07/2016

Esercizio 1. Il segnale in esame è periodico, con periodo $T_0 = \pi$. I suoi coefficienti di Fourier sono dati da

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\, e^{-2\,j\,n\,t}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\cos(2\,n\,t)\,dt - \frac{j}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\sin(2\,n\,t)\,dt.$$

Se si osserva che la funzione $t \mapsto t^2$ è **pari**, si ottiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\cos(2\,n\,t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\cos(2\,n\,t)\,dt \overset{(2\,t=\tau)}{=} \frac{1}{4\,\pi}\int_0^{\pi} \tau^2\,\cos(n\,\tau)\,d\tau,$$

e

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\sin(n\,t)\,dt = 0.$$

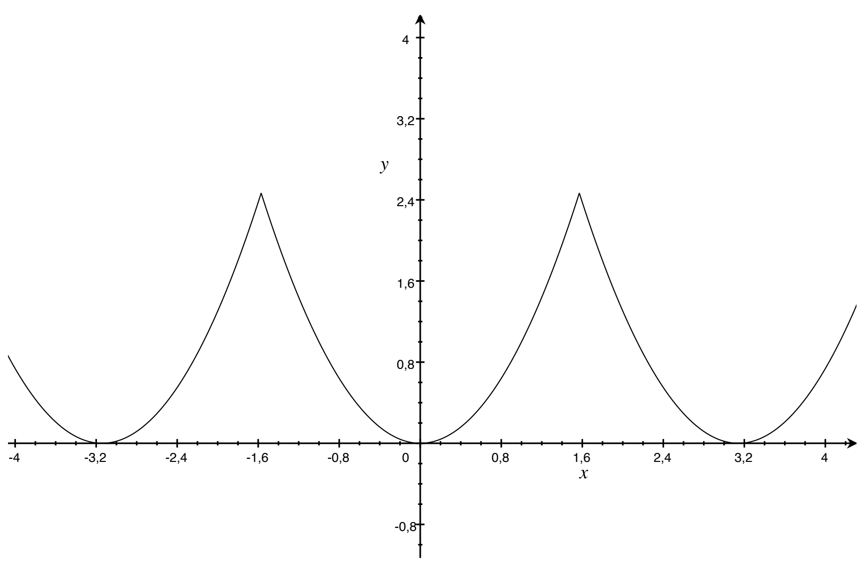

FIGURE 1. Il segnale periodico x dell'Esercizio 1.

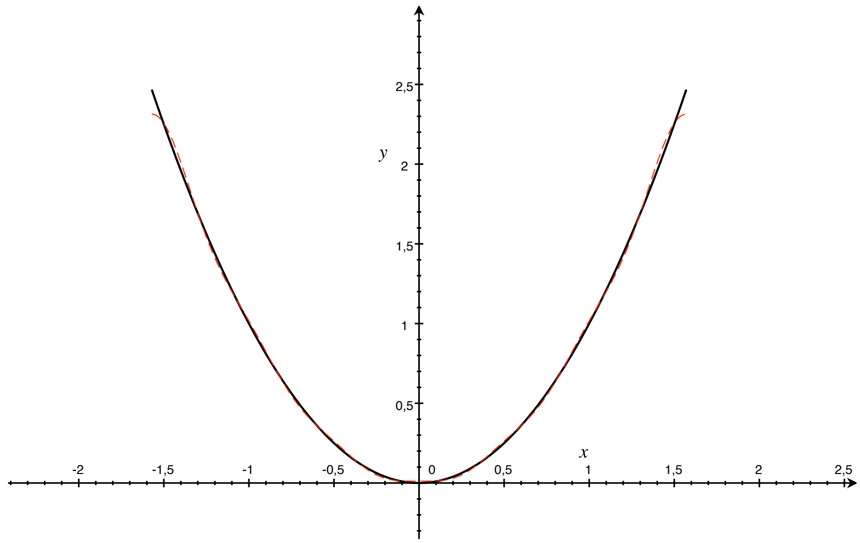

FIGURE 2. Il segnale dell'Esercizio 1 (tratto nero) ed i primi 7 termini della sua serie di Fourier (tratto rosso)

Quindi si ottiene per $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$
\begin{aligned}
c_n = \frac{1}{4\,\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, \cos(n\,t)\, dt &= \cancel{\left[\frac{1}{4\,\pi} \, \frac{\sin(n\,t)}{n} \, t^2 \right]_0^{\pi}} \\
&\quad + \frac{1}{2\,n\,\pi} \int_0^{\pi} t\,(-\sin(n\,t))\, dt \\
&= \frac{1}{2\,n\,\pi} \, \left\{ \left[t\, \frac{\cos(n\,t)}{n} \right]_0^{\pi} - \cancel{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\,t)}{n}\, dt} \right\} \\
&= \frac{1}{2\,n^2} \, \cos(n\,\pi) = \frac{(-1)^n}{2\,n^2},
\end{aligned}
$$

e

$$
c_0 = \frac{1}{4\,\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \frac{\pi^2}{12}.
$$

In definitiva, si ha

$$
x(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^2}{2\,n^2} \; e^{2\,n\,j\,t}.
$$

Si può anche scriverlo come serie di soli coseni

$$
x(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^2} \; \cos(2\,n\,t).
$$

Esercizio 2. (1) si ha

$$
\mathcal{L}[x_{\lambda,t_0}](z) = \frac{1}{\lambda} \, e^{-z\,\frac{t_0}{\lambda}} \, \mathcal{L}[x] \left(\frac{z}{\lambda} \right).
$$

La formula può essere dedotta combinando (opportunamente!) quelle per il riscalamento temporale e per il ritardo, oppure direttamente dalla definizione usando un cambio di variabili. Infatti si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x_{\lambda,t_0}](z) = \int_0^\infty e^{-z\,t}\,x(\lambda\,t - t_0)\,dt &\overset{(\lambda\,t - t_0 = y)}{=} \int_{-t_0}^\infty e^{-z\,\frac{y+t_0}{\lambda}}\,x(y)\,\frac{dy}{\lambda} \\
&= \frac{e^{-z\,\frac{t_0}{\lambda}}}{\lambda}\int_{-t_0}^\infty e^{-\frac{z}{\lambda}\,y}\,x(y)\,dy \\
&= \frac{e^{-z\,\frac{t_0}{\lambda}}}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{z}{\lambda}\,y}\,x(y)\,dy,
\end{aligned}$$

dove si è usato che il segnale è causale, quindi $x(y) = 0$ sull'intervallo $[-t_0, 0)$. L'ultimo integrale coincide proprio con

$$\mathcal{L}[x]\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

La relazione tra le ascisse di convergenza è la seguente

$$\sigma_{x_{\lambda,t_0}} = \lambda\,\sigma_x.$$

(2) osserviamo innanzitutto che usando la formula per la derivata in z della trasformata di Laplace, si ha

$$\mathcal{L}[t\,\cos t\,u](z) = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}[\cos t\,u](z),$$

ci basta quindi determinare la trasformata di Laplace del segnale $t \mapsto \cos t\,u(t)$ e poi derivarla. Si ricordi che

$$\cos t = \frac{e^{j\,t} + e^{-j\,t}}{2},$$

quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos t\,u](z) &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\,t} + e^{-j\,t}}{2}\,u\right](z) \\
&= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\,t}}{2}\,u\right](z) + \mathcal{L}\left[\frac{e^{-j\,t}}{2}\,u\right](z) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-j} + \frac{1}{z+j}\right) = \frac{z}{z^2+1}, \qquad \text{per } \mathrm{Re}\,(z) > 0.
\end{aligned}$$

In conclusione si ottiene

$$\mathcal{L}[t\,\cos t\,u](z) = -\frac{d}{dz}\frac{z}{z^2+1} = \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}, \qquad \text{per } \mathrm{Re}\,(z) > 0.$$

(3) si tratta di un segnale C^1 a tratti, che è continuo nell'unico punto (cioè $t = 0$) in cui la derivata classica è discontinua. Si ottiene quindi

$$x'(t) = (\cos t - t\,\sin t)\;u(t),$$

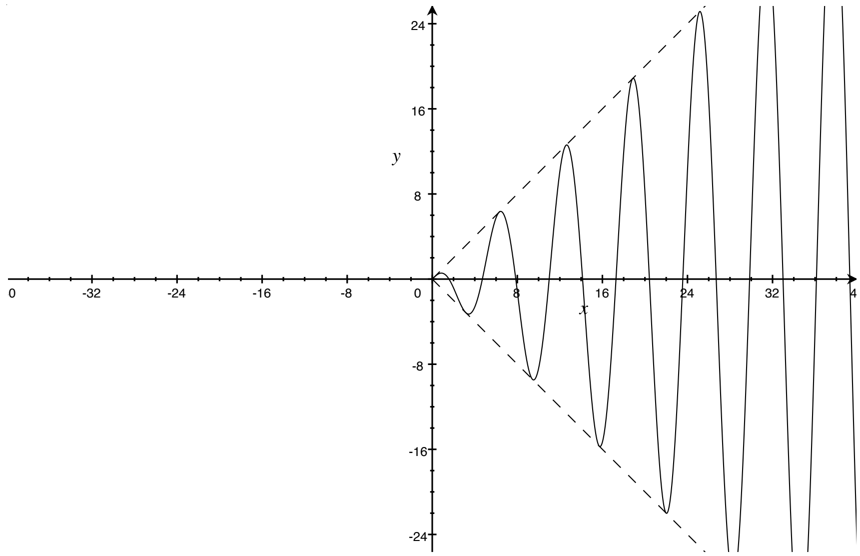

FIGURE 3. Il segnale x dell'Esercizio 2

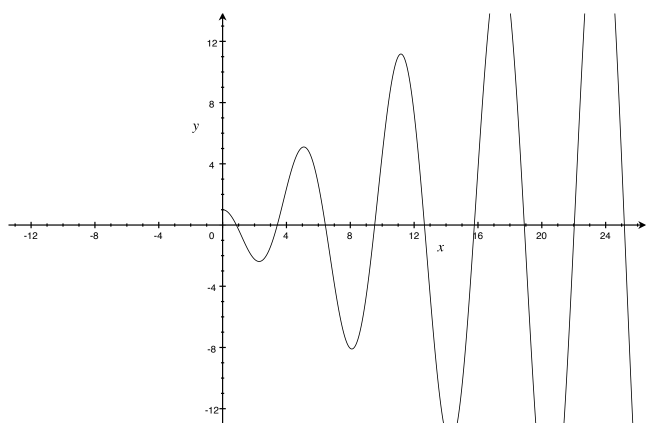

FIGURE 4. Il grafico di x'. Si osservi che in $t = 0$ c'è un salto, di altezza 1.

ovvero la derivata prima distribuzionale coincide con quella classia. Tale derivata è a sua volta un segnale C^1 a tratti, con discontinuità di tipo salto in $t = 0$. Si osservi che il salto ha ampiezza 1, si ha quindi

$$x''(t) = -\left(2\,\sin t + t\,\cos t\right)\,u(t) + \delta_0.$$

(4) per il primo segnale, usando la linearità della trasformata di Laplace si ha

$$\mathcal{L}[(t+1)\,x](z) = \mathcal{L}[t\,x](z) + \mathcal{L}[x](z) = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}[x](z) + \mathcal{L}[x](z)$$
$$= \frac{2\,z\,(1+2\,z-z^2)}{(z^2+1)^3} + \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2},$$

e l'ascissa di convergenza è ancora 0.

Per il secondo segnale, basta applicare la formula vista al punto (1), con

$$\lambda = 2 \qquad \text{e} \qquad t_0 = 1,$$

quindi

$$\mathcal{L}[x(2\,t-1)](z) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{z}{2}}\,\mathcal{L}[x]\left(\frac{z}{2}\right)$$
$$= 2\,e^{-\frac{z}{2}}\,\frac{z^2-4}{(z^2+4)^2}$$

definita ancora per $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Infine, per il terzo segnale, si usa la formula che lega convoluzione e trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[x \otimes u](z) = \mathcal{L}[x](z)\,\mathcal{L}[u](z) = \frac{1}{z}\,\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2},$$

ancora per $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Esercizio 3. (1) la formula in questione è

$$\mathcal{F}[x \otimes y](f) = \mathcal{F}[x](f)\,\mathcal{F}[y](f).$$

(2) dalla formula precedente, si ha

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect} \otimes \mathrm{rect}](f) = (\mathcal{F}[\mathrm{rect}](f))^2$$

e ricordando che

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}](f) = \mathrm{sinc}(f),$$

si ottiene dunque

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect} \otimes \mathrm{rect}](f) = (\mathrm{sinc}(f))^2 = \frac{\sin^2(\pi\,f)}{\pi^2\,f^2}.$$

(3) si usa ancora la formula al punto (1), insieme alle formule per il riscalamento temporale ed il ritardo. Si ha

$$\mathcal{F}[x](f) = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}[\mathrm{rect}]\left(\frac{f}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{2}\right),$$

e

$$\mathcal{F}[y](f) = e^{2\,\pi\,j\,f}\,\mathcal{F}[\mathrm{rect}](f) = e^{2\,\pi\,j\,f}\,\mathrm{sinc}(f).$$

Si ottiene dunque

$$\mathcal{F}[x \otimes y](f) = \frac{e^{2\pi j f}}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{2}\right) \operatorname{sinc}(f).$$

Esercizio 4. Osserviamo innanzitutto che la funzione razionale F ha 3 poli semplici, in corrispondenza delle 3 radici semplici del polinomio

$$z^3 - 1.$$

Tali radici sono

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, j, \qquad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, j,$$

cerchiamo tre coefficienti $A, B, C \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{1}{z^3 - 1} = \frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} + \frac{C}{z - z_3}.$$

Una volta che avremo determinato i 3 coefficienti, il segnale cercato sarà dato da

$$y(t) = \left(A\, e^{z_1 t} + B\, e^{z_2 t} + C\, e^{z_3 t}\right) u(t).$$

Usando il Teorema dei Residui, si trova facilmente[1]

$$A = \operatorname{Res}(F; z_1) = \frac{1}{3\, z_1^2} = \frac{1}{3},$$

$$B = \operatorname{Res}(F; z_2) = \frac{1}{3\, z_2^2} = -\frac{1}{3\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, j\right)} = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\, j,$$

$$C = \operatorname{Res}(F; z_3) = \frac{1}{3\, z_3^2} = \frac{1}{3\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, j\right)} = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}\, j.$$

[1] Si ricordi che ogni polo è semplice e la funzione F è della forma $f(z)/g(z)$, quindi i residui si ottengono facilmente come

$$\operatorname{Res}(F, z_i) = \frac{f(z_i)}{g'(z_i)}.$$

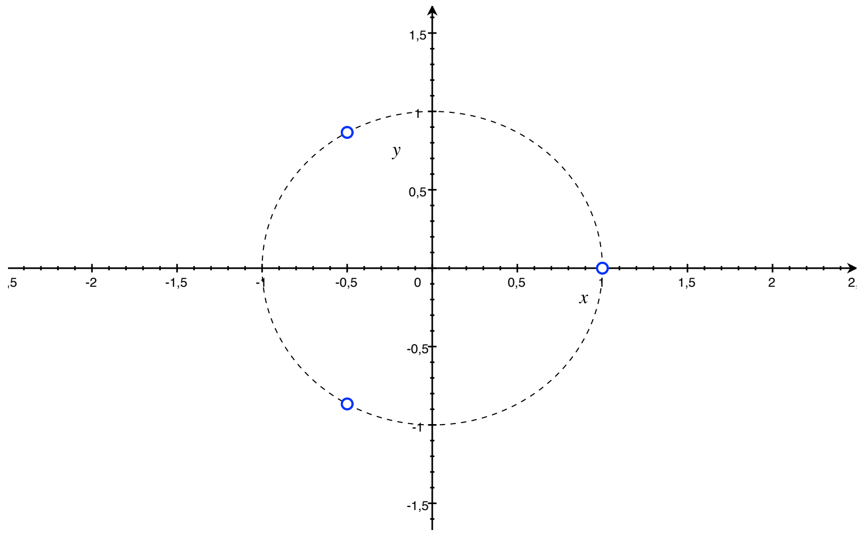

FIGURE 5. I poli z_1, z_2 e z_3 della funzione F dell'Esercizio 4