ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

Esamineremo solo funzioni di variabile complessa *s* nella forma:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)} \quad \text{o} \quad G(s) \underset{(a>0)}{=} e^{-as}\frac{P(s)}{Q(s)}$$

dove $P(s)$ e $Q(s)$ sono due polinomi in s **primi fra loro** (cioè non hanno zeri comuni) di grado rispettivamente *n* e *m*

Osserviamo innanzitutto che,

se $s_1, s_2, \ldots, s_q$ sono gli **zeri distinti** di $Q(s)$, cioè:

$$Q(s_i) = 0 \qquad \text{per ogni } i = 1, 2, \ldots, q$$

$$s_1 \neq s_2 \neq \ldots \neq s_q$$

allora

$\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ è continua e derivabile quante volte si vuole nel semipiano destro

$$\operatorname{Re} s > \max_{1 \le i \le q} \{\operatorname{Re} s_i\}$$

se $s_1, s_2, \ldots, s_q$ sono gli **zeri distinti** di $Q(s)$,

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \text{e} \qquad G(s) = e^{-as}\frac{P(s)}{Q(s)}$$

nel semipiano complesso

$$\operatorname{Re} s > \lambda = \max_{1 \le i \le q}\{\operatorname{Re} s_i\}$$

possono essere (e dimostreremo che sono effettivamente) la trasformata di Laplace di qualche segnale (o distribuzione).

.

Se $x(t)$ è un segnale causale tale che:

- $x(t)$ è L- trasformabile
- $(\mathcal{L}x)(s) = F(s)$ in $\operatorname{Re} s > \max\limits_{1 \le i \le q} \{\operatorname{Re} s_i\}$

diremo che $x(t)$ è l'anti-trasformata di $F(s)$ in $\operatorname{Re} s > \max\limits_{1 \le i \le q} \{\operatorname{Re} s_i\}$ e scriveremo:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = x(t)$$

.

Caso 1°

Sia

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \text{con} \qquad n < m$$

$$n = grado\, P(s) \qquad\qquad m = grado\, Q(s)$$

Se $s_1, s_2, \ldots, s_q$ sono gli **zeri distinti** di $Q(s)$ di molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_q$ rispettivamente, allora

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_q = m$$

Sotto tali ipotesi è possibile ridurre $F(s)$ in
fratti semplici

esistono cioè delle costanti $c_{ik} \in \mathbb{C}$ per cui

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m_k} c_{ik} \frac{1}{\left(s - s_k\right)^i}$$

($s_1, s_2, \ldots, s_q$ **zeri distinti** di $Q(s)$
di molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_q$ rispettivamente)

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m_k} c_{ik} \frac{1}{(s - s_k)^i}$$

ricordando che

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{At} t^n}{n!}\right)(s) = \frac{1}{(s - A)^{n+1}} \quad \text{in } \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} A$$

per $\operatorname{Re} s > \max\limits_{1 \le k \le q} \left\{ \operatorname{Re} s_k \right\}$ otteniamo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = u(t) \left(\sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m_k} c_{ik} \frac{e^{s_k t}\, t^{i-1}}{(i-1)!} \right)$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m_k} c_{ik} \frac{1}{(s - s_k)^i}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = u(t)\left(\sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m_k} c_{ik} \frac{e^{s_k t}\, t^{i-1}}{(i-1)!}\right)$$

restano da determinare le costanti c_{ik}

- 1a) *zeri* di $Q(s)$ ***tutti** distinti*

In tal caso essi sono esattamente m , grado di $Q(s)$:

$$s_1 \neq s_2 \neq \ldots \neq s_m \qquad\qquad m_k = 1 \quad \forall k = 1, \ldots, m$$

L'espressione in fratti semplici di $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ diventa:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{1}{s - s_k}$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{1}{s - s_k}$$

cosicché

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = u(t)\left(\sum_{k=1}^{m} c_k e^{s_k t}\right)$$

dove $$c_k = \lim_{s \to s_k} \frac{P(s)}{Q(s)}(s - s_k)$$

Infatti, per $s \neq s_k$:

$$\frac{P(s)}{Q(s)}(s - s_k) = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \frac{1}{s - s_i} \right)(s - s_k) =$$

$$= \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} c_i \frac{s - s_k}{s - s_i} \right) + c_k \frac{\cancel{s - s_k}}{\cancel{s - s_k}} =$$

$$= \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} c_i \frac{s - s_k}{s - s_i} \right) + c_k \xrightarrow[s \to s_k]{} 0 + c_k = c_k$$

- 2a) $Q(s)$ ha q *zeri* distinti, $q < m$

  s_k ognuno di molteplicità m_k , $1 \leq k \leq q$

allora dall'espressione in fratti semplici

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m_k} c_{ik} \frac{1}{\left(s - s_k\right)^i}$$

si ottiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = u(t)\left(\sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{m_k} c_{ik} \frac{e^{s_k t}\, t^{i-1}}{(i-1)!}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)=u(t)\left(\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_k}c_{ik}\,\frac{e^{s_k t}\,t^{i-1}}{(i-1)!}\right)$$

dove le costanti c_{ik} sono:

$$c_{ik}=\frac{1}{(m_k-i)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{(m_k-i)}}{ds^{(m_k-i)}}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}(s-s_k)^{m_k}\right)$$

con

$$1\le k\le q \qquad\qquad 1\le i\le m_k$$

(per $m_k=1 \quad \forall k=1,\ldots,m$ si ottiene la precedente)

Esempio 57.

Sia data la funzione di variabile complessa

$$F(s) = \frac{2s^2 - 1}{s(s^2+1)}$$

E' del tipo $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ con: $P(s) = 2s^2 - 1$

$Q(s) = s(s^2+1)$

Essendo $s(s^2+1) = 0 \Leftrightarrow s_1 = 0,\ s_2 = j,\ s_3 = -j$

$$\operatorname{Re} s_1 = \operatorname{Re} s_2 = \operatorname{Re} s_3 = 0$$

in $\operatorname{Re} s > 0$ la funzione $F(s)$ è la trasformata di Laplace di un segnale.

Notiamo ora che: $$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{2s^2 - 1}{s(s^2 + 1)}$$

•Il *grado* del *numeratore* (che è 2) è *minore* del *grado* del *denominatore* (che è 3).

•Gli *zeri* di $Q(s)$ sono *tutti distinti* (o semplici).

La scomposizione di $F(s)$ in fratti semplici è allora del tipo:

$$\frac{2s^2-1}{s\left(s^2+1\right)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s-j}+\frac{c_3}{s+j}$$

Ne segue:

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)(t)=$$

$$=u(t)\left(c_1+c_2e^{jt}+c_3e^{-jt}\right)$$

$$x(t) = u(t)\left(c_1 + c_2 e^{jt} + c_3 e^{-jt}\right)$$

dove:

$$c_k = \lim_{s \to s_k} \frac{P(s)}{Q(s)}(s - s_k)$$

Perciò:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{2s^2 - 1}{s\left(s^2 + 1\right)}$$

$$s_1 = 0$$

$$c_1 = \lim_{s \to 0} \frac{2s^2 - 1}{\cancel{s}\left(s^2 + 1\right)} \cdot \cancel{s} = -1$$

$$s_2 = j$$

$$c_2 = \lim_{s \to j} \frac{2s^2 - 1}{s\left(s^2 + 1\right)} \cdot \left(s - j\right) =$$

$$= \lim_{s \to j} \frac{2s^2 - 1}{s\cancel{\left(s - j\right)}\left(s + j\right)} \cdot \cancel{\left(s - j\right)} =$$

$$= \frac{2j^2 - 1}{j\left(2j\right)} = \frac{-2 - 1}{2\left(-1\right)} = \frac{3}{2}$$

$$s_3 = -j$$

$$c_3 = \lim_{s \to -j} \frac{2s^2 - 1}{s\left(s^2 + 1\right)} \cdot \left(s + j\right) =$$

$$= \lim_{s \to -j} \frac{2s^2 - 1}{s\left(s - j\right)\cancel{\left(s + j\right)}} \cdot \cancel{\left(s + j\right)} =$$

$$= \frac{2\left(-j\right)^2 - 1}{-j\left(-2j\right)} == \frac{-2-1}{-2} = \frac{3}{2}$$

Riassumendo: $c_1=-1 \quad c_2=c_3=\frac{3}{2}$

cosicché

$$x(t)=u(t)\left(c_1+c_2e^{jt}+c_3e^{-jt}\right)=$$

$$=u(t)\left(-1+\frac{3}{2}e^{jt}+\frac{3}{2}e^{-jt}\right)=$$

$$=u(t)\left(-1+3\left(\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\right)\right)=$$

$$=u(t)(-1+3\cos t)$$

Ovviamente la determinazione delle costanti c_k permette di scrivere compiutamente anche la scomposizione di $F(s)$ in fratti semplici:

$$\frac{2s^2-1}{s\left(s^2+1\right)}=-\frac{1}{s}+\frac{3}{2}\frac{1}{s-j}+\frac{3}{2}\frac{1}{s+j}$$

Esempio 58.

Sia data la funzione di variabile complessa

$$F(s)=\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}$$

E' del tipo $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ con:

$$P(s)=1$$

$$Q(s)=s^3\left(s^2+1\right)$$

Essendo: $Q(s)=0 \Leftrightarrow s_1=0,\ s_2=j,\ s_3=-j$

$$\operatorname{Re} s_1=\operatorname{Re} s_2=\operatorname{Re} s_3=0$$

in $\operatorname{Re} s > 0$ la funzione $F(s)$ è la trasformata di Laplace di un segnale.

Notiamo ora che: $$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}$$

•Il *grado* del *numeratore* è *minore* del *grado* del *denominatore*.

•Gli *zeri distinti* di $Q(s)$ sono solo 3, $\left(s_1 = 0,\ s_2 = j,\ s_3 = -j\right)$ mentre il suo grado è 5.

La molteplicità di tali zeri è:

$$s_1 = 0 \qquad m_1 = 3;$$

$$s_2 = j \qquad m_2 = 1; \qquad s_3 = -j \qquad m_3 = 1$$

La scomposizione di $F(s)$ in fratti semplici è allora del tipo:

$$\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{m_k} c_{ik} \frac{1}{\left(s-s_k\right)^i}$$

$$s_1 = 0 \qquad m_1 = 3;$$

$$s_2 = j \qquad m_2 = 1; \qquad s_3 = -j \qquad m_3 = 1$$

$$\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{m_k} c_{ik}\frac{1}{\left(s-s_k\right)^i} =$$

$$= c_{11}\frac{1}{s-s_1} + c_{21}\frac{1}{\left(s-s_1\right)^2} + c_{31}\frac{1}{\left(s-s_1\right)^3} +$$

$$+ c_{12}\frac{1}{s-s_2} + c_{13}\frac{1}{s-s_3}$$

$$s_1 = 0 \qquad m_1 = 3;$$

$$s_2 = j \qquad m_2 = 1; \qquad s_3 = -j \qquad m_3 = 1$$

$$\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{m_k} c_{ik}\frac{1}{\left(s-s_k\right)^i} =$$

$$= c_{11}\frac{1}{s} + c_{21}\frac{1}{s^2} + c_{31}\frac{1}{s^3} +$$

$$+ c_{12}\frac{1}{s-j} + c_{13}\frac{1}{s+j}$$

Poiché:

$$\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)} = c_{11}\frac{1}{s} + c_{21}\frac{1}{s^2} + c_{31}\frac{1}{s^3} +$$

$$+ c_{12}\frac{1}{s-j} + c_{13}\frac{1}{s+j}$$

ne segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-A)^n}\right) = u(t)\,\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{At}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right) =$$

$$= u(t)\left(c_{11} + c_{21}t + c_{31}\frac{t^2}{2} + c_{12}e^{jt} + c_{13}e^{-jt}\right)$$

Le costanti sono date da:

$$c_{ik}=\frac{1}{\left(m_k-i\right)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{(m_k-i)}}{ds^{(m_k-i)}}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\left(s-s_k\right)^{m_k}\right)$$

$$k=1\Rightarrow s_1=0, m_1=3 \qquad 1\le i\le 3$$

$$k=1, i=1$$

$$c_{11}=\frac{1}{\left(3-1\right)!}\lim_{s\to 0}\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{\cancel{s^3}\left(s^2+1\right)}\cancel{s^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{-\cancel{2}s}{\left(s^2+1\right)^2}\right)=-\lim_{s\to 0}\left(\frac{\left(s^2+1\right)^2-4s^3\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+1\right)^4}\right)$$

$$=-1$$

Le costanti sono date da:

$$c_{ik} = \frac{1}{(m_k - i)!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{(m_k - i)}}{ds^{(m_k - i)}} \left(\frac{P(s)}{Q(s)} (s - s_k)^{m_k} \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow s_1 = 0, m_1 = 3 \qquad 1 \le i \le 3$$

$k = 1, i = 2$

$$c_{21} = \frac{1}{(3-2)!} \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\cancel{s^3}(s^2 + 1)} \cancel{s^3} \right) =$$

$$= \lim_{s \to 0} \left(\frac{-\cancel{2}s}{(s^2+1)^2} \right) = 0$$

Le costanti sono date da:

$$c_{ik} = \frac{1}{(m_k - i)!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{(m_k - i)}}{ds^{(m_k - i)}} \left(\frac{P(s)}{Q(s)} (s - s_k)^{m_k} \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow s_1 = 0, m_1 = 3 \qquad 1 \le i \le 3$$

$k = 1, i = 3$

$$c_{31} = \frac{1}{(3-3)!} \lim_{s \to 0} \left(\frac{1}{\cancel{s^3}(s^2+1)} \cancel{s^3} \right) = 1$$

$$c_{11} = -1; \;\; c_{21} = 0; \;\; c_{31} = 1$$

$$c_{ik}=\frac{1}{(m_k-i)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{(m_k-i)}}{ds^{(m_k-i)}}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}(s-s_k)^{m_k}\right)$$

$$k=2\Rightarrow s_2=j, m_2=1$$

$$k=2, i=1$$

$$c_{12}=\lim_{s\to j}\left(\frac{1}{s^3(s+j)\cancel{(s-j)}}\cancel{(s-j)}\right)=\frac{1}{j^3(2j)}=\frac{1}{2}$$

$$k=3\Rightarrow s_3=-j, m_3=1$$

$$k=3, i=1$$

$$c_{13}=\lim_{s\to -j}\left(\frac{1}{s^3\cancel{(s+j)}(s-j)}\cancel{(s+j)}\right)=\frac{1}{(-j)^3(-2j)}=\frac{1}{2}$$

Riassumendo:

$$c_{11} = -1;\ \ c_{21} = 0;\ \ c_{31} = 1;\ \ c_{12} = c_{13} = \frac{1}{2}$$

cosicché $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)$

$$x(t) = u(t)\left(c_{11} + c_{21}t + c_{31}\frac{t^2}{2} + c_{12}e^{jt} + c_{13}e^{-jt}\right) =$$

$$= u(t)\left(-1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt}\right) =$$

$$= u(t)\left(-1 + \frac{1}{2}t^2 + \cos t\right)$$

$$c_{11} = -1; \quad c_{21} = 0; \quad c_{31} = 1; \quad c_{12} = c_{13} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)} = c_{11}\frac{1}{s} + c_{21}\frac{1}{s^2} + c_{31}\frac{1}{s^3} +$$

$$+ c_{12}\frac{1}{s-j} + c_{13}\frac{1}{s+j}$$

La scomposizione di $F\left(s\right)$ in fratti semplici è:

$$\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-j} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j}$$

Esempio 59.

Sia data la funzione di variabile complessa

$$F(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

E’ del tipo $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ con: $P(s) = 1$

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

In questo caso $Q(s)$ non è già fattorizzato e la determinazione dei suoi zeri non è immediata.

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

Osserviamo però che, essendo $Q(s)$ polinomio a coefficienti interi avente 1 come coefficiente del termine di grado massimo, i suoi eventuali zeri interi sono da ricercarsi fra i divisori del termine noto (nel nostro caso sono: $\pm 1, \pm 2$).

Poiché $Q(-1) = 0$

possiamo dividere $Q(s)$ per $(s+1)$

$$\begin{array}{r|l}
s^3+4s^2+5s+2 & s+1 \\ \hline
-\left(s^3+s^2\right) & s^2+3s+2 \\ \hline
3s^2+5s+2 & \\
-\left(3s^2+3s\right) & \\ \hline
2s+2 & \\
-\left(2s+2\right) & \\ \hline
\equiv &
\end{array}$$

$$s^3+4s^2+5s+2=\left(s^2+3s+2\right)\left(s+1\right)$$

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

$$s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = \left(s^2 + 3s + 2\right)(s+1)$$

Poiché le soluzioni dell'equazione

$\left(s^2 + 3s + 2\right) = 0$ sono $s = -1,\ \ s = -2$

risulta

$$\left(s^2 + 3s + 2\right) = (s+1)(s+2)$$

cosicché

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = (s+1)^2 (s+2)$$

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = (s+1)^2 (s+2)$$

Essendo ora:

$$Q(s) = 0 \Leftrightarrow s_1 = -1,\ s_2 = -2$$

e $\quad \operatorname{Re} s_1 = \operatorname{Re} s_2 = 0$

in $\operatorname{Re} s > 0$ la funzione $F(s)$ è la trasformata di Laplace di un segnale.

Notiamo ora che: $$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

•Il *grado* del *numeratore* è *minore* del *grado* del *denominatore*.

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2 = (s+1)^2 (s+2)$$

•Gli *zeri distinti* di $Q(s)$ sono 2, di molteplicità

$$s_1 = -1 \qquad m_1 = 2;$$

$$s_2 = -2 \qquad m_2 = 1$$

La scomposizione di $F(s)$ in fratti semplici è allora:

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{m_k} c_{ik}\frac{1}{(s-s_k)^i}$$

$$s_1 = -1 \qquad m_1 = 2; \qquad s_2 = -2 \qquad m_2 = 1$$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = c_{11}\frac{1}{s-s_1} + c_{21}\frac{1}{(s-s_1)^2} + c_{12}\frac{1}{s-s_2}$$

$$s_1 = -1 \qquad ; \qquad s_2 = -2$$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s+2)} = c_{11}\frac{1}{s+1} + c_{21}\frac{1}{(s+1)^2} + c_{12}\frac{1}{s+2}$$

Ne segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-A)^n}\right) = u(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{At}$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) =$$

$$= u(t)\left(c_{11}e^{-t} + c_{21}te^{-t} + c_{12}e^{-2t}\right)$$

Le costanti sono date da:

$$c_{ik} = \frac{1}{(m_k - i)!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{(m_k - i)}}{ds^{(m_k - i)}} \left(\frac{P(s)}{Q(s)} (s - s_k)^{m_k} \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow s_1 = -1, m_1 = 2 \qquad\qquad 1 \le i \le 2$$

$$k = 1, i = 1$$

$$c_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\cancel{(s+1)^2}\,(s+2)} \cancel{(s+1)^2} \right) =$$

$$= \lim_{s \to -1} \left(-\frac{1}{(s+2)^2} \right) = -1$$

Le costanti sono date da:

$$c_{ik} = \frac{1}{(m_k - i)!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{(m_k - i)}}{ds^{(m_k - i)}} \left(\frac{P(s)}{Q(s)} (s - s_k)^{m_k} \right)$$

$$k = 1 \Rightarrow s_1 = -1, m_1 = 2 \qquad\qquad 1 \le i \le 2$$

$$k = 1, i = 2$$

$$c_{21} = \frac{1}{(2-2)!} \lim_{s \to -1} \left(\frac{1}{\cancel{(s+1)^2}(s+2)} \cancel{(s+1)^2} \right) = 1$$

$$k = 2 \Rightarrow s_2 = -2, m_2 = 1$$

$$k = 2, i = 1$$

$$c_{12} = \lim_{s\to-2}\left(\frac{1}{(s+1)^2\cancel{(s+2)}}\cancel{(s+2)}\right) = 1$$

In definitiva $c_{11} = -1;\ c_{21} = 1;\ c_{12} = 1$

cosicché:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = u(t)\left(c_{11}e^{-t} + c_{21}te^{-t} + c_{12}e^{-2t}\right) =$$

$$= u(t)\left(-e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}\right)$$

e: $$\frac{1}{s^3+4s^2+5s+2}=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}=$$

$$=c_{11}\frac{1}{s+1}+c_{21}\frac{1}{(s+1)^2}+c_{12}\frac{1}{s+2}$$

$$c_{11}=-1;\ \ c_{21}=1;\ \ c_{12}=1$$

$$\frac{1}{s^3+4s^2+5s+2}=-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2}$$

Caso 2°

Consideriamo funzioni del tipo

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad \text{con} \quad n \geq m$$

$$n = grado\, P(s) \qquad m = grado\, Q(s)$$

In tal caso esistono due polinomi $N(s)$ e $R(s)$ tali che

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = N(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = N(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

dove il grado di $R(s)$ è minore di quello di $Q(s)$ (basta dividere $P(s)$ per $Q(s)$, $R(s)$ è il resto).

Perciò $\dfrac{R(s)}{Q(s)}$ è nelle ipotesi del Caso1 e

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(N(s)\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{Q(s)}\right)$$

Se dunque $s_1, s_2, \ldots, s_q$ sono gli zeri distinti

di $Q(s)$ di molteplicità $m_1, m_2, \ldots, m_q$

rispettivamente, otteniamo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{Q(s)}\right) = u(t)\left(\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_k} c_{ik}\,\frac{e^{s_k t}\,t^{i-1}}{(i-1)!}\right)$$

$$\operatorname{Re} s > \max_{1\le k\le q}\left\{\operatorname{Re} s_k\right\}$$

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = N(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

Il polinomio $N(s)$ sarà del tipo:

$$N(s) = a_0 s^r + a_1 s^{r-1} + \ldots + a_r \qquad r = n - m$$

e dunque:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(N(s)\right) = a_0 D^{(r)}\delta(t) + a_1 D^{(r-1)}\delta(t) + \ldots + a_r \delta(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(N(s)\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{Q(s)}\right)$$

sarà allora del tipo:

$$x(t)=a_0D^{(r)}\delta(t)+a_1D^{(r-1)}\delta(t)+\ldots+a_r\delta(t)+$$

$$+u(t)\left(\sum_{k=1}^{q}\sum_{i=1}^{m_k}c_{ik}\,\frac{e^{s_k t}\,t^{i-1}}{(i-1)!}\right)$$

Esempio 60.

Sia data la funzione di variabile complessa

$$F(s) = \frac{2s^3 - 7s^2 + 39s + 19}{s^2 - 4s + 20}$$

E' del tipo $\frac{P(s)}{Q(s)}$ con: $P(s) = 2s^3 - 7s^2 + 39s + 19$

$$Q(s) = s^2 - 4s + 20$$

Essendo:

$$s^2 - 4s + 20 = 0 \Leftrightarrow s_1 = 2 - 4j,\ s_2 = 2 + 4j$$

$$\operatorname{Re} s_1 = \operatorname{Re} s_2 = 2$$

in $\operatorname{Re} s > 2$ la funzione $F(s)$ è la trasformata di Laplace di un segnale.

Notiamo ora che:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{2s^3 - 7s^2 + 39s + 19}{s^2 - 4s + 20}$$

il *grado* del *numeratore* è *maggiore* del *grado* del *denominatore*.

Dobbiamo allora determinare due polinomi $R(s)$ e $N(s)$ tali che:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = N(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

dove il grado di $R(s)$ è minore di quello di $Q(s)$. Occorre perciò dividere

$$P(s) = 2s^3 - 7s^2 + 39s + 19$$

per

$$Q(s) = s^2 - 4s + 20$$

$$\begin{array}{r|l}
2s^3 - 7s^2 + 39s + 19 & s^2 - 4s + 20 \\ \cline{2-2}
-\left(2s^3 - 8s^2 + 40s\right) & 2s + 1 \\ \cline{1-1}
s^2 - \quad s + 19 & \\
-\left(s^2 - \quad 4s + 20\right) & \\ \cline{1-1}
3s - 1 &
\end{array}$$

$$2s^3 - 7s^2 + 39s + 19 = \left(s^2 - 4s + 20\right)\left(2s + 1\right) + \left(3s - 1\right)$$

$$2s^3 - 7s^2 + 39s + 19 = \left(s^2 - 4s + 20\right)\left(2s + 1\right) + \left(3s - 1\right)$$

$$P\left(s\right) = Q\left(s\right)N\left(s\right) + R\left(s\right)$$

$$\frac{P\left(s\right)}{Q\left(s\right)} = N\left(s\right) + \frac{R\left(s\right)}{Q\left(s\right)}$$

$$\frac{2s^3 - 7s^2 + 39s + 19}{s^2 - 4s + 20} = \left(2s + 1\right) + \frac{3s - 1}{s^2 - 4s + 20}$$

Notiamo che: $$\frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{3s-1}{s^2-4s+20}$$

•Il *grado* del *numeratore* (che è 1) è *minore* del *grado* del *denominatore* (che è 2).

•Gli *zeri* di $Q(s)$, $s_1 = 2-4j,\ s_2 = 2+4j$ sono *tutti distinti* (o semplici).

La scomposizione in fratti semplici è allora:

$$\frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{c_1}{s - s_1} + \frac{c_2}{s - s_2}$$

$$\frac{3s - 1}{s^2 - 4s + 20} = \frac{c_1}{s - (2 - 4j)} + \frac{c_2}{s - (2 + 4j)}$$

Ne segue:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{Q(s)}\right) = u(t)\left(c_1 e^{(2-4j)t} + c_2 e^{(2+4j)t}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{Q(s)}\right)=u(t)\left(c_1 e^{(2-4j)t}+c_2 e^{(2+4j)t}\right)=$$

$$=u(t)e^{2t}\left(c_1 e^{-j4t}+c_2 e^{j4t}\right)$$

dove:

$$c_k=\lim_{s\to s_k}\frac{R(s)}{Q(s)}(s-s_k)$$

Perciò:

$$c_1 = \lim_{s \to s_1} \frac{R(s)}{Q(s)}(s - s_1) =$$

$$= \lim_{s \to s_1} \frac{R(s)}{\cancel{(s - s_1)}(s - s_2)} \cancel{(s - s_1)} =$$

$$= \lim_{s \to (2-4j)} \frac{3s - 1}{(s - (2 + 4j))} =$$

$$= \frac{6 - 12j - 1}{-8j} = \frac{3}{2} + j\frac{5}{8}$$

$$c_2 = \lim_{s \to s_2} \frac{R(s)}{Q(s)}(s - s_2) =$$

$$= \lim_{s \to s_2} \frac{R(s)}{(s - s_1)\cancel{(s - s_2)}} \cancel{(s - s_2)} =$$

$$= \lim_{s \to (2+4j)} \frac{3s - 1}{\left(s - (2 - 4j)\right)} =$$

$$= \frac{6 + 12j - 1}{8j} = \frac{3}{2} - j\frac{5}{8}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} + j\frac{5}{8} \qquad\qquad c_2 = \frac{3}{2} - j\frac{5}{8}$$

Risulta allora:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{Q(s)}\right) = u(t)e^{2t}\left(c_1 e^{-j4t} + c_2 e^{j4t}\right) =$$

$$= u(t)e^{2t}\left(\left(\frac{3}{2} + j\frac{5}{8}\right)e^{-j4t} + \left(\frac{3}{2} - j\frac{5}{8}\right)e^{j4t}\right) =$$

$$= u(t)e^{2t}\left(\frac{3}{2}\left(e^{j4t} + e^{-j4t}\right) - j\frac{5}{8}\left(e^{j4t} - e^{-j4t}\right)\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{Q(s)}\right)=$$

$$=u(t)e^{2t}\left(3\left(\frac{e^{j4t}+e^{-j4t}}{2}\right)-j\frac{5}{4}j\left(\frac{e^{j4t}-e^{-j4t}}{2j}\right)\right)=$$

$$=u(t)e^{2t}\left(3\cos(4t)+\frac{5}{4}\sin(4t)\right)$$

Ricordando che:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = N(s) + \frac{R(s)}{Q(s)}$$

$$\frac{2s^3 - 7s^2 + 39s + 19}{s^2 - 4s + 20} = (2s+1) + \frac{3s-1}{s^2 - 4s + 20}$$

$N(s) = 2s + 1$ cosicché:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(N(s)\right) = 2(D\delta)(t) + \delta(t)$$

Per concludere:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(N(s)\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(s)}{Q(s)}\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right)=2\left(D\delta\right)(t)+\delta(t)+$$

$$+u(t)e^{2t}\left(3\cos(4t)+\frac{5}{4}\sin(4t)\right)$$

Caso 3°

Sia ora $G(s) = e^{-as} \dfrac{P(s)}{Q(s)} \qquad (a > 0)$

Se conosciamo l'anti- trasformata di $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ (che è di uno dei due tipi visti sopra)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{Q(s)}\right) = x(t)$$

l'anti- trasformata di $G(s)$ è:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\right) = x(t-a)$$

Esempio 61.

Sia data la funzione di variabile complessa

$$G(s) = e^{-2s}\,\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}$$

Abbiamo già determinato l’anti- trasformata di

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}$$

(Esempio 58)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}\right)=u\left(t\right)\left(-1+\frac{1}{2}t^2+\cos t\right)$$

L'anti- trasformata di

$$G\left(s\right)=e^{-2s}\frac{1}{s^3\left(s^2+1\right)}$$

è allora:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(G\left(s\right)\right)=u\left(t-2\right)\left(-1+\frac{1}{2}\left(t-2\right)^2+\cos\left(t-2\right)\right)$$