MATEMATICA PER L’ELABORAZIONE DEI SEGNALI a.a. 2008.09

Corso integrato con Teoria dei Segnali

Martedì	8,30 - 11,30
Mercoledì	8,30 - 10,30
Giovedì	8,30 - 10,30

Esame del corso integrato:

è completato quando si è superato

sia Matematica per i segnali

sia Teoria dei Segnali

Le due parti devono essere completate entro 6 mesi

Esame di
Matematica per l’Elaborazione dei segnali:

consiste di 2 parti:

- Esercizio (scritto: 45 minuti)
- Teoria (scritto: 2 domande, 45 minuti)

Il superamento della parte Esercizio è **propedeutico** alla parte di Teoria.

E’ consigliato svolgere Esercizio e Teoria nello stesso giorno.

Testi di riferimento:

Teoria: Appunti in Copisteria, Diapositive sul sito

Esercizi: Badia - Mari “MatES” Pitagora Editrice

Orario ricevimento: Martedì 11,30-13,00 presso Palazzina Presidenza

E. mail: mai@unife.it

Matematica per l’elaborazione dei **segnali**

Teoria dei **segnali**

segnale:

segno conosciuto o convenuto
fra due o più persone
con il quale si dà notizia,
avvertimento o simili,
di qualcosa.

può essere di diverse specie:

- ottico (di fumo, stradale, manifesto...)
- acustico (sirena, clacson...)
- elettrico (cardiogramma …)
- elettromagnetico (Morse, radio …)
- ….

presuppone:

- una sorgente

che lo emetta intenzionalmente usando codici convenuti

- un ricevente

che lo raccolga e sappia tradurne il significato

Solo a queste condizioni si ha un segnale,

cioè la **trasmissione di un'informazione**

Per studiare, elaborare e caratterizzare un segnale si è soliti schematizzarlo, utilizzando il linguaggio matematico, mediante opportune

funzioni

- di 1 o più variabili reali (o complesse)
- a valori reali o vettoriali (o complessi)

In questo corso studieremo solo segnali che possono essere descritti da funzioni:

- di **una** variabile reale

- definite su $\mathbb{R}$ o un **intervallo** I di $\mathbb{R}$

- a valori reali o complessi

Tali segnali possono perciò essere schematizzati nel modo seguente:

$$x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad I \text{ intervallo,}$$

$$\text{t.c.} \quad t \mapsto x(t)$$

oppure :

$$z : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad I \text{ intervallo,}$$

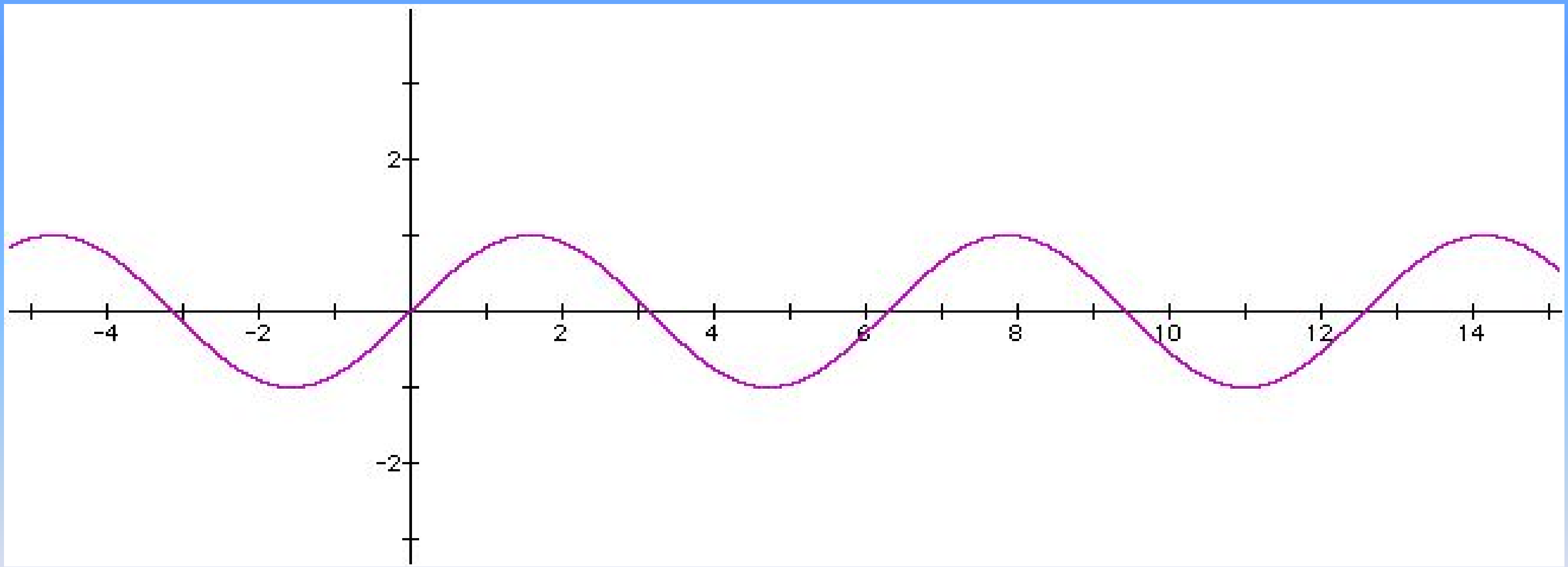
$$\text{t.c.} \quad t \mapsto z(t) = x(t) + j\,y(t)$$

$$j = (0,1) \quad t.c. \quad j^2 = -1$$

Esempio 1.

La funzione sinusoidale:

$x(t) = \sin t$



così come

$$\cos t = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

sono segnali reali continui su tutto $\mathbb{R}$,

cioè per ogni *t* di $\mathbb{R}$

periodici di periodo 2π

sin t	è *dispari*:	$\sin(-t) = -\sin t$
cos t	è *pari*:	$\cos(-t) = \cos t$

Esempio 2.

$$\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

E' un segnale continuo su $\mathbb{R}$

La funzione è pari: per $t \neq 0$:

$$\operatorname{sinc}(-t) = \frac{\sin(-\pi t)}{-\pi t} = \frac{-\sin(\pi t)}{-\pi t} = \operatorname{sinc} t$$

per $t \neq 0$:

$$\left|\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right| \leq \frac{1}{|\pi t|} \quad \text{cioè}$$

$$-\frac{1}{\pi t} \leq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \leq \frac{1}{\pi t}$$

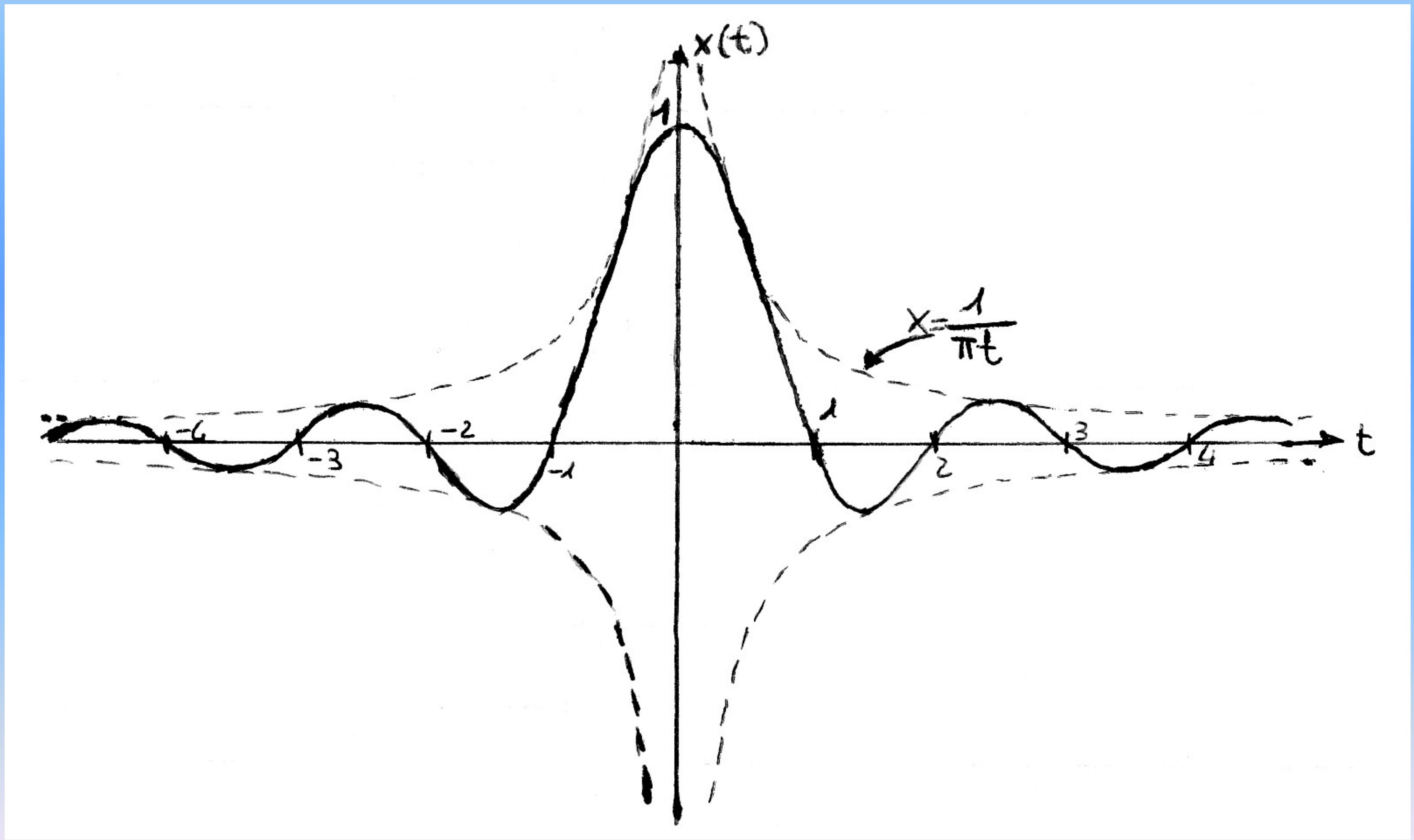
e:

$$\operatorname{sinc} t = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi t) = 0 \Leftrightarrow \pi t = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$ovvero:$$

$$\operatorname{sinc} t = 0 \Leftrightarrow t = k,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{sinc} t = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$



Esempio 3.

La funzione esponenziale complessa:

$z(t) = \cos t + j \sin t = e^{jt}$

E' un segnale complesso continuo su $\mathbb{R}$

periodico di periodo 2π

di ampiezza (o modulo) unitario:

$$\left|z(t)\right| = \left|e^{jt}\right| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = 1$$

Molti segnali NON sono continui su $\mathbb{R}$ ma *continui a tratti*

Definizione:
Una funzione *f* definita su $\mathbb{R}$ si dice *continua a tratti* se, comunque si scelga un intervallo limitato e chiuso $\left[a,b\right]$, in tale intervallo *f* è continua **tranne al più** un **numero finito** di punti in cui *f* presenta discontinuità di tipo salto.

In altre parole:

se $t_o \in (a,b)$ è un punto di discontinuità per *f* allora esistono <u>finiti</u>:

$$\lim_{t \to t_o^+} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to t_o^-} f(t)$$

che vengono indicati rispettivamente con $f(t_o^+)$ e $f(t_o^-)$

Si chiama *salto* di *f* in t_o il valore

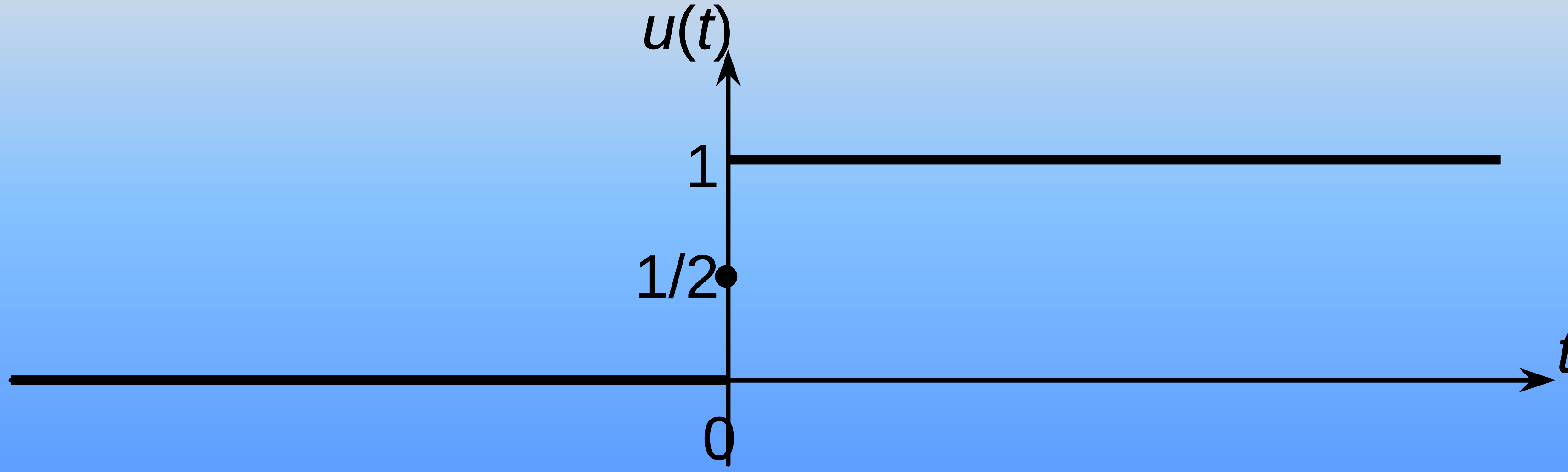
$$s(t_o) = f(t_o^+) - f(t_o^-)$$

Esempio 4.

Il gradino unitario è il segnale definito da :

$$u(t)=\begin{cases} 1 & t>0 \\ \dfrac{1}{2} & t=0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

$u(t)$ è continuo a tratti (brevemente: $\mathcal{C}$-tratti)
il suo grafico è:



C' è un unico punto di discontinuità in $t_o = 0$.

Poiché $u\left(0^+\right)=1$ e $u\left(0^-\right)=0$ risulta

$$s\left(0\right)=1$$

Definizione.

Un segnale $x(t)$ si dice *causale* se

$$x(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

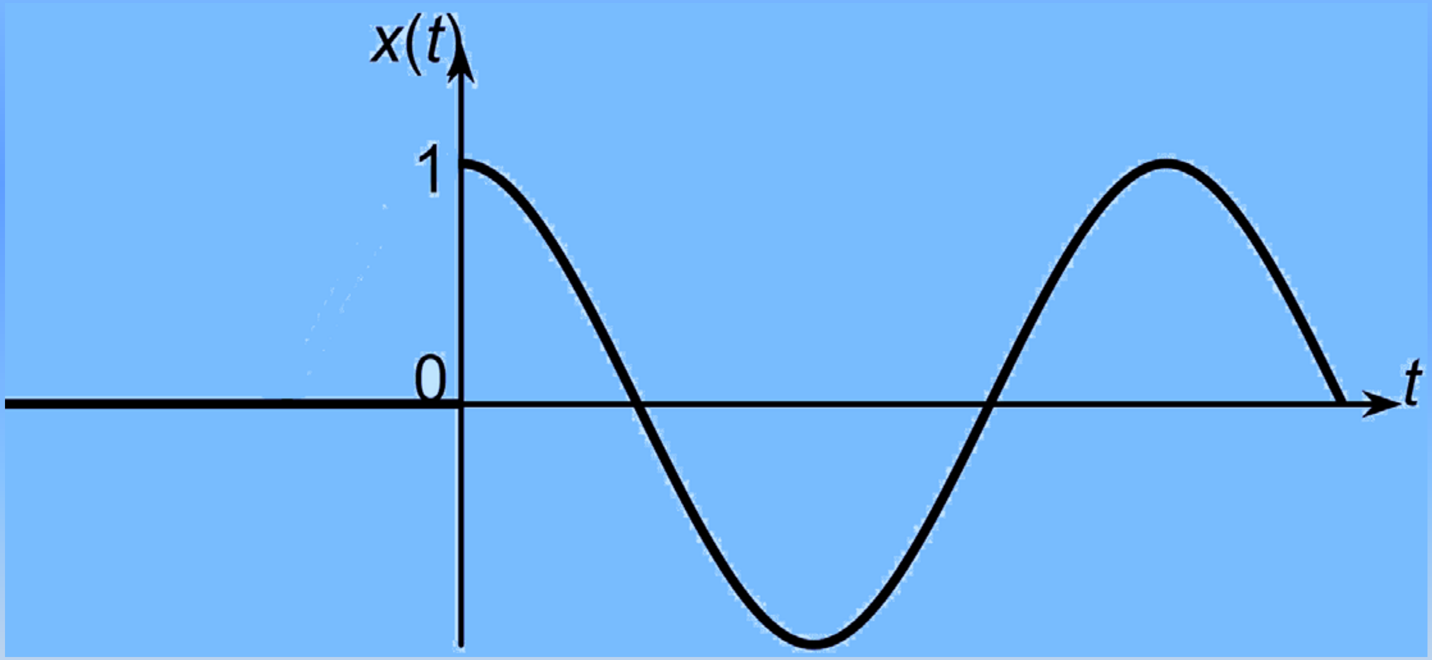
Dunque $u(t)$ è un segnale causale.

Si osservi che per ogni funzione *f* definita in $\mathbb{R}$ si ha che $u(t)\,f(t)$ è un segnale causale.

Esempio 5.

Consideriamo la funzione $f(t) = \cos t$

Il segnale $x(t) = u(t)\cos t$ è un segnale causale.

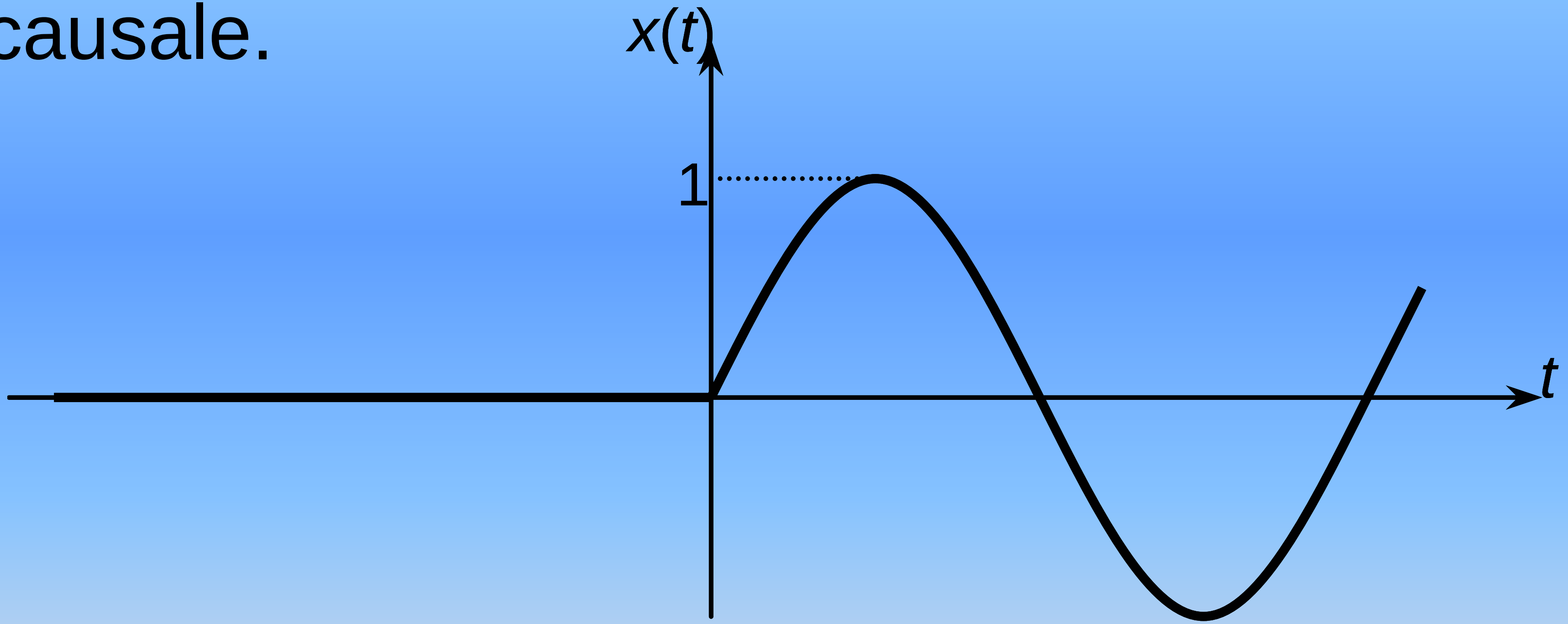


C' è un'unica discontinuità in $t_o = 0$ con $s(0) = 1$

Esempio 5bis.

Consideriamo la funzione $f(t) = \sin t$

Il segnale $x(t) = u(t)\sin t$ è un segnale causale.

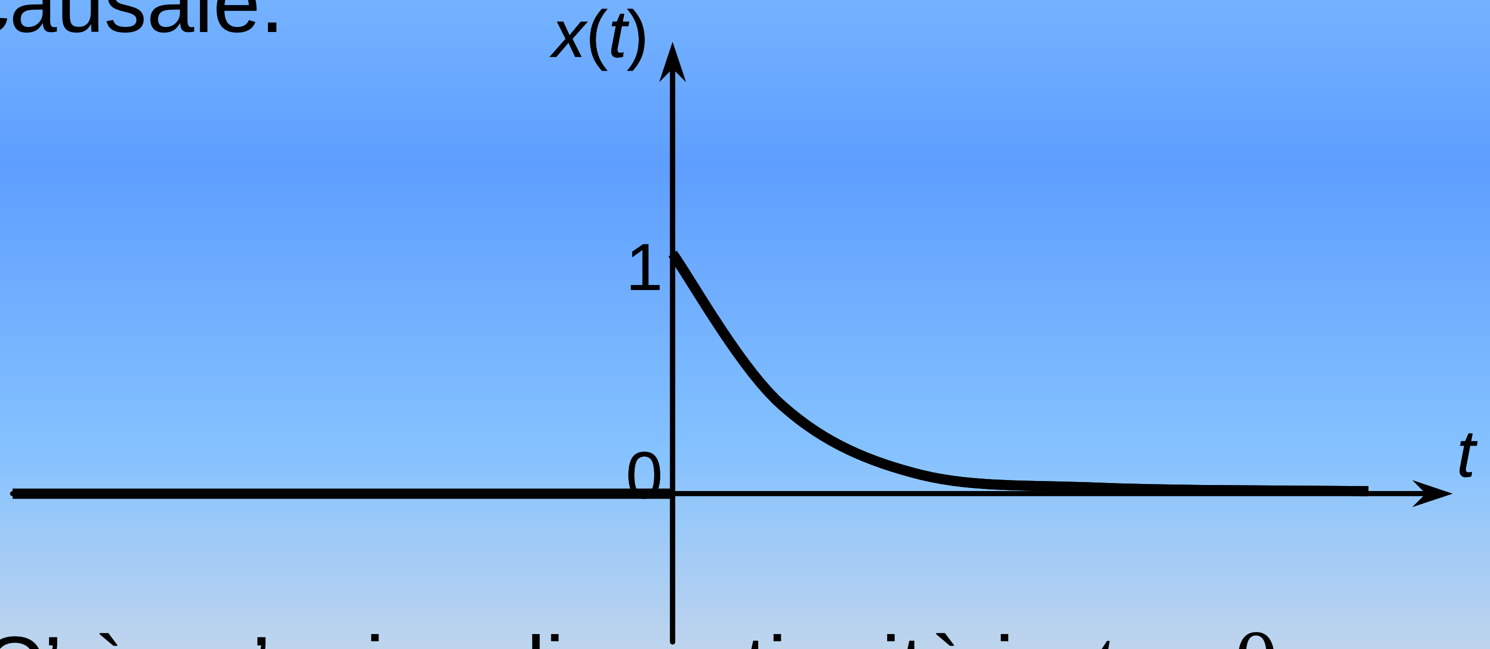


Il segnale non ha discontinuità; è continuo in $\mathbb{R}$

Esempio 6.

Consideriamo la funzione $f(t)=e^{-t}$

Il segnale $x(t)=u(t)e^{-t}$ è un segnale causale.

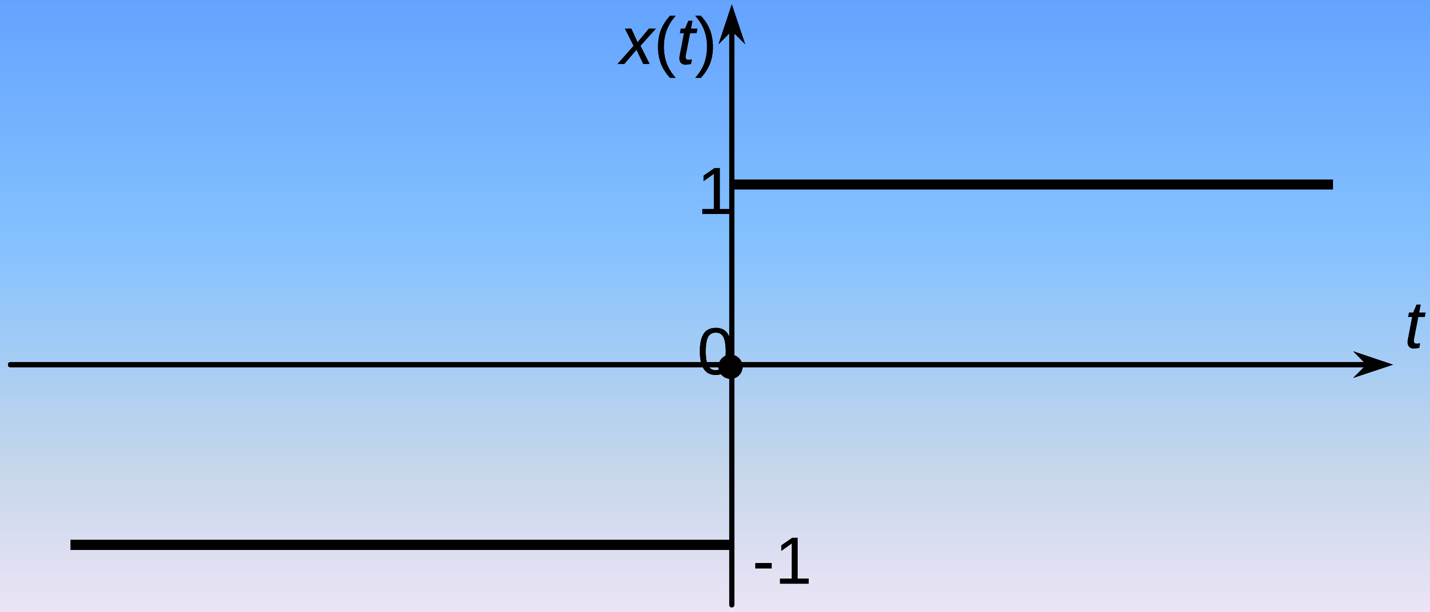


C' è un'unica discontinuità in $t_o=0$
con $s(0)=1$

Esempio 7.

Consideriamo la funzione

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



C' è un'unica discontinuità in $t_o = 0$
con $s(0) = 2$

Lo stesso segnale può essere anche espresso come:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{|t|} & se\ t \neq 0 \\ 0 & se\ t = 0 \end{cases}$$

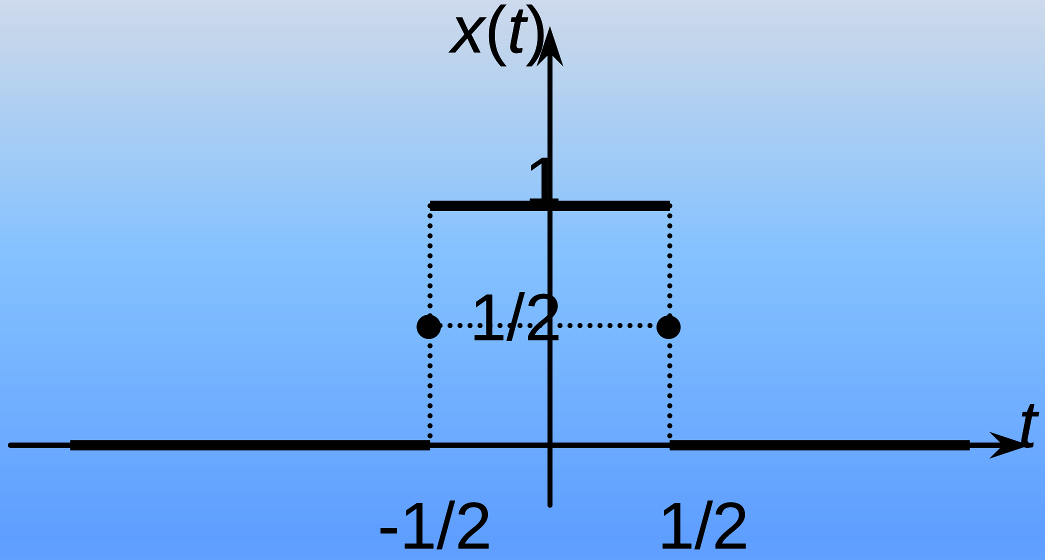
oppure:

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

Esempio 8.

Consideriamo la funzione

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & |t| = \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



Lo stesso segnale può essere anche espresso come:

$$rect(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Ci sono due punti di discontinuità:

$$t_1 = -\frac{1}{2} \qquad\qquad t_1 = -\frac{1}{2}$$

con

$$s\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad\qquad s\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Si osservi:

$$s\left(t_1\right) > 0 \iff salto\text{"}in\ su\text{"}$$

$$s\left(t_2\right) < 0 \iff salto\text{"}in\ giù\text{"}$$

Definizione.

Un segnale $x(t)$ si dice *a durata limitata* se esiste un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$ tale che

$$x(t)=0 \quad \forall t \notin [a,b]$$

Dunque $rect(t)$ è un segnale a durata limitata.

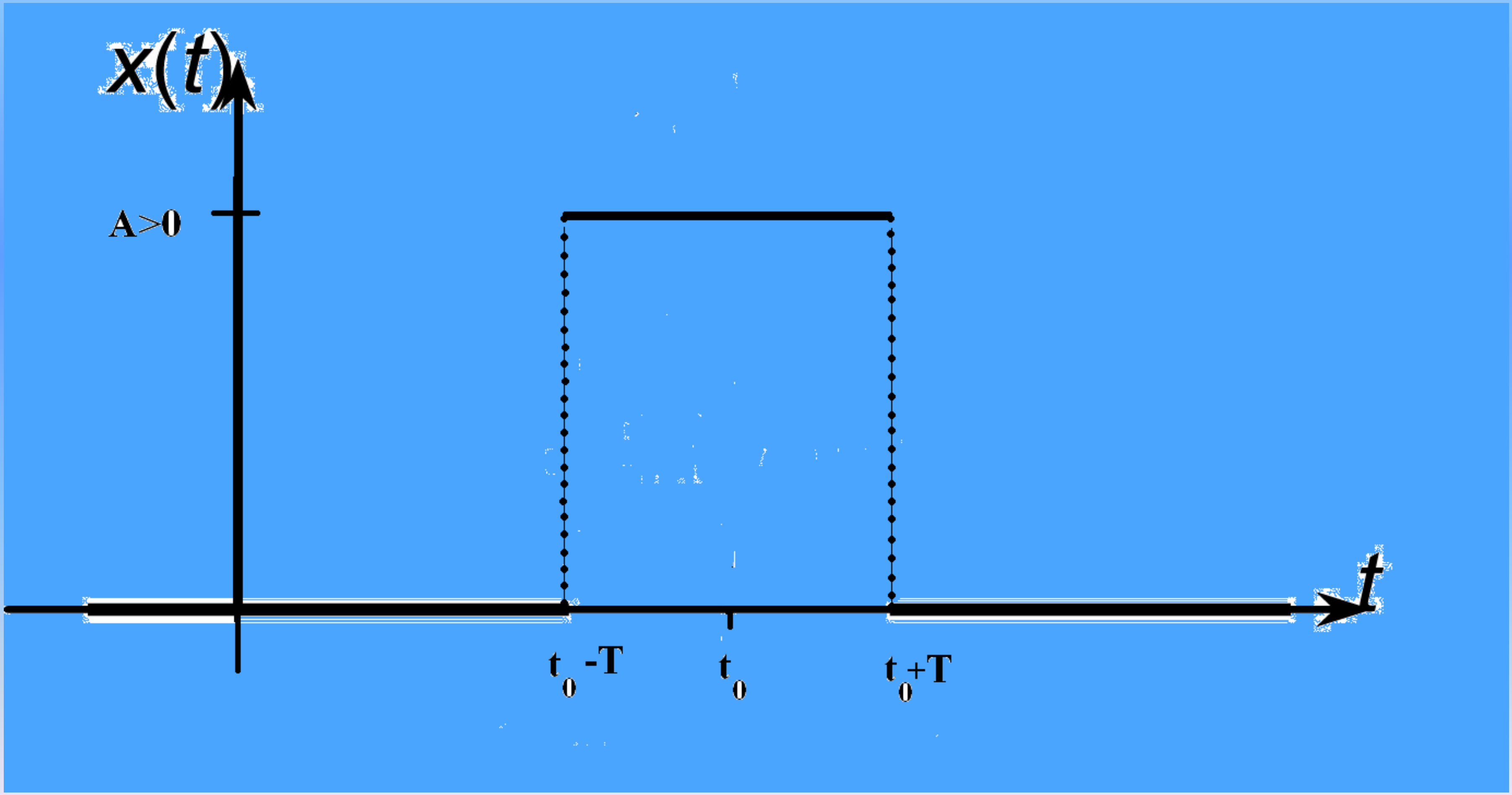
Il segnale $rect(t)$, insieme con i suoi traslati, è spesso utilizzato per “selezionare” tratti di durata limitata di segnali esprimibili in forma analitica.

A tal fine si ricordi che: se $A, t_0 \in \mathbb{R}$ e $T > 0$

$$A \, rect\left(\frac{t - t_0}{2T}\right)$$

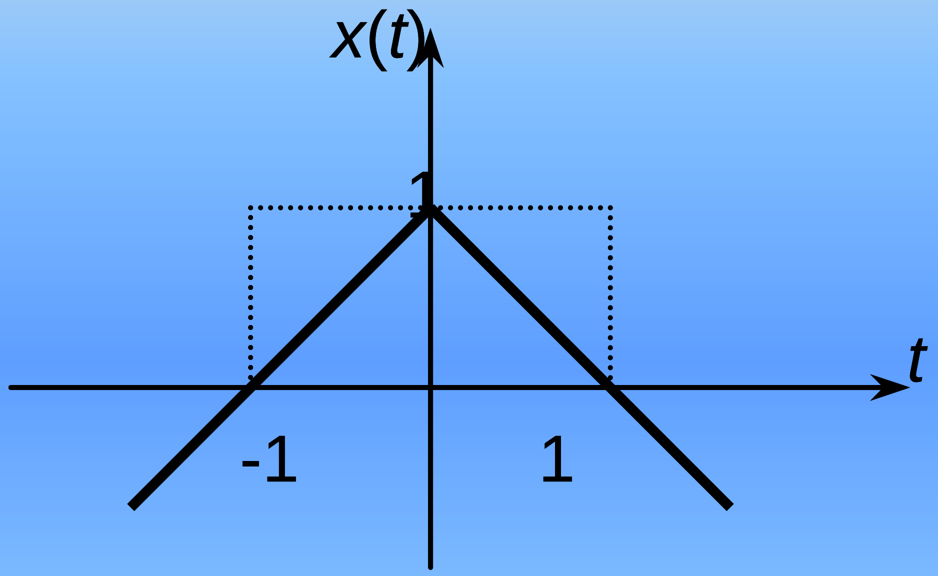
è un rettangolo di altezza $|A|$, di asse $t = t_0$ e durata $2T$

$$A\ rect\left(\frac{t-t_0}{2T}\right)$$



Esempio 9.

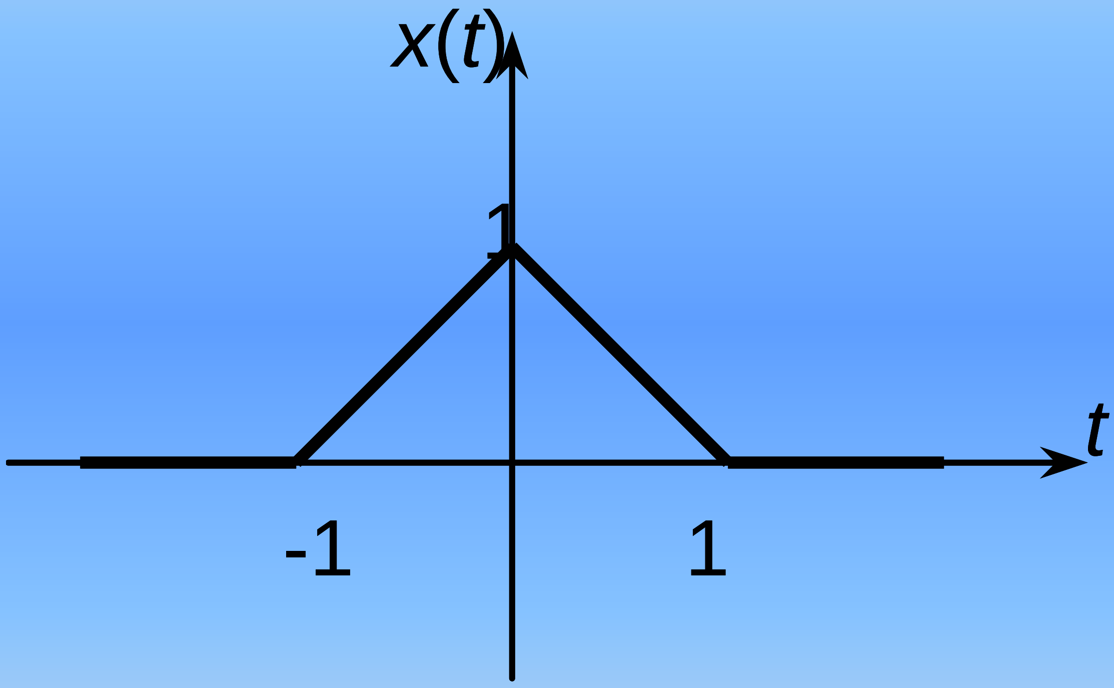
Consideriamo la funzione $f(t) = 1 - |t|$



Se la moltiplichiamo per il rettangolo tratteggiato in figura, cioè $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$

otteniamo:

$$x(t) = \left(1 - |t|\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$



Questo segnale, continuo su $\mathbb{R}$ è chiamato:

$$\mathrm{triang}(t)$$

Ricordando che:

Un segnale $x(t)$ si dice *continuo a tratti* se, comunque si scelga un intervallo limitato e chiuso $[a,b]$, in tale intervallo $x(t)$ è continuo **tranne al più** un **numero finito** di punti in cui presenta discontinuità di tipo salto.

Possiamo dedurre che:

1.

Se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti , allora è limitato su ogni intervallo di lunghezza finita $[a,b]$.

2.

Se $t_0, t_1, t_2 ...., t_{n+1}$ sono i punti di discontinuità di $x(t)$ in $[a,b]$, ne segue che $x(t)$ è Riemann integrabile in $[a,b]$ e risulta:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\,dt$$

Definizione.

Un segnale $x(t)$ $\mathcal{C}$-tratti su $\mathbb{R}$ è detto *periodico* di periodo *To* > 0 se:

$$x(t+T_o)=x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Osservazione 1.

Se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti e periodico, essendo Riemann integrabile su ogni intervallo di lunghezza finita, lo è su ogni intervallo di lunghezza *To*; inoltre, per la periodicità risulta che, per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale:

$$\int_{a}^{a+T_o} x(t)\,dt = \int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t)\,dt$$

Osservazione 2.

Se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti e periodico, essendo limitato su ogni intervallo di lunghezza finita, lo è su ogni intervallo di lunghezza *To,* e quindi, per la periodicità, su tutto $\mathbb{R}$.

Esempio 10.

Il segnale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT_o}{T} \right)$$

$$\text{con } 0 < T < T_o$$

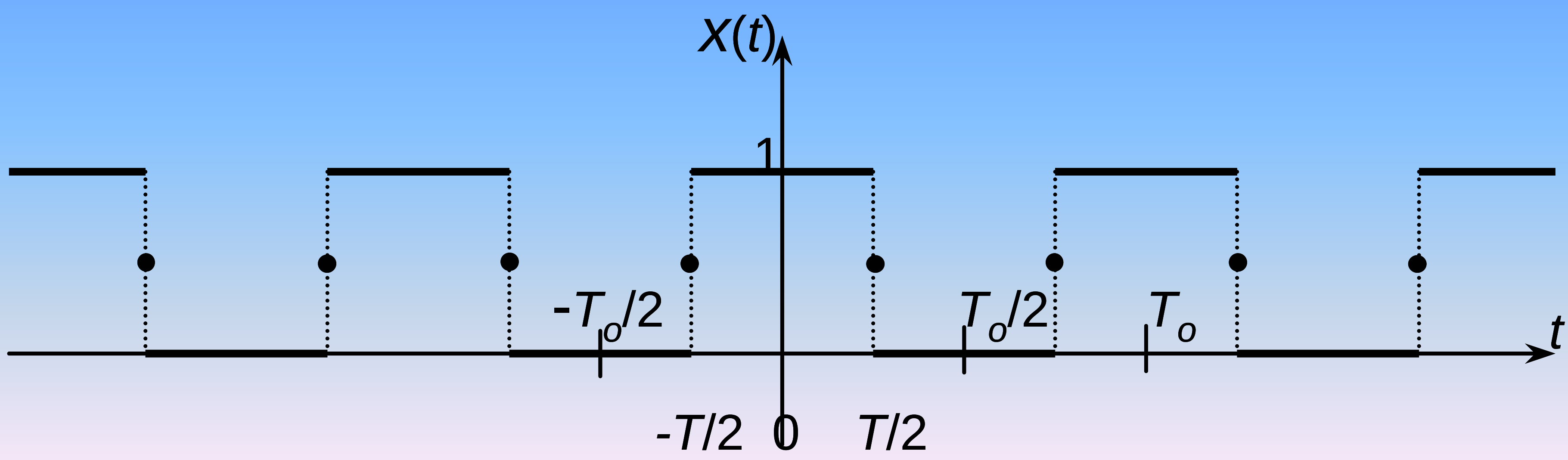
è ottenuto ripetendo periodicamente (con periodo T_0) , il rettangolo ,

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T} \right)$$

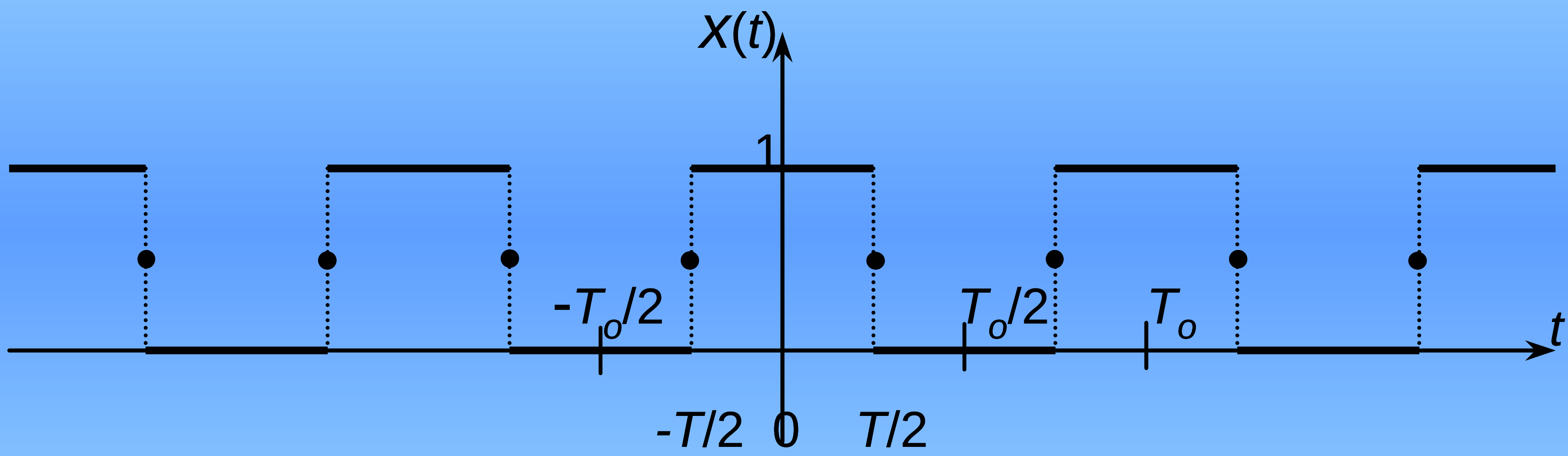
$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ è un rettangolo altezza 1, asse $t = 0$ e ampiezza T

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - kT_o}{T}\right)$$

ha il seguente grafico:



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - kT_o}{T}\right)$$



è un segnale $\mathcal{C}$-tratti chiamato *onda quadra di periodo To*

Esempio 11.

Il segnale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{triang}\left(\frac{t - kT_o}{T_o / 2}\right)$$

$$T_o > 0$$

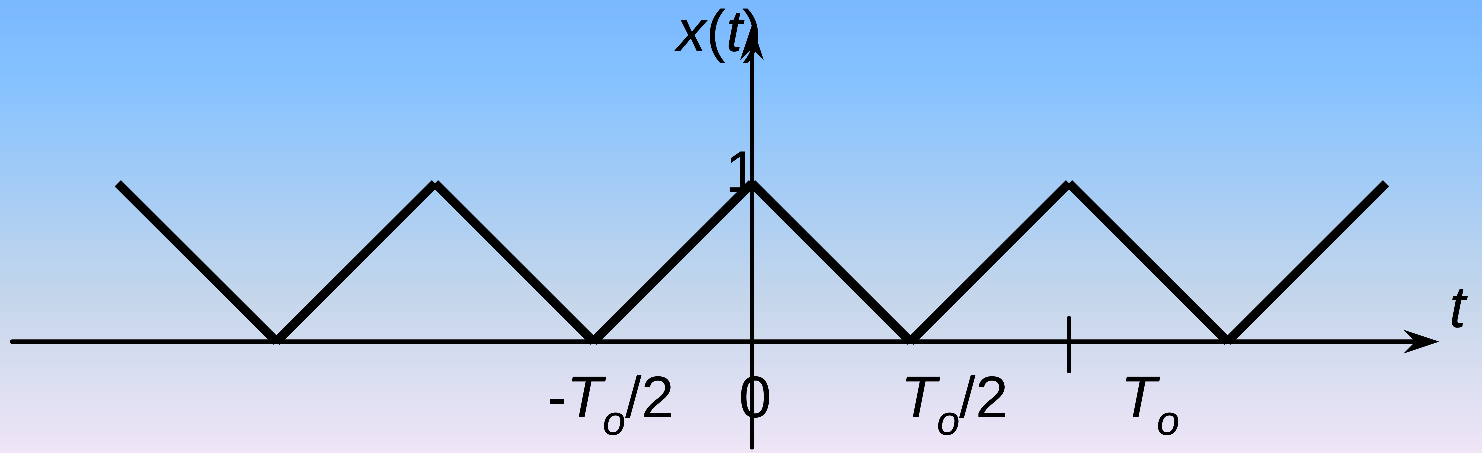
è ottenuto ripetendo periodicamente (con periodo T_0) , il triangolo ,

$$\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T_o / 2}\right)$$

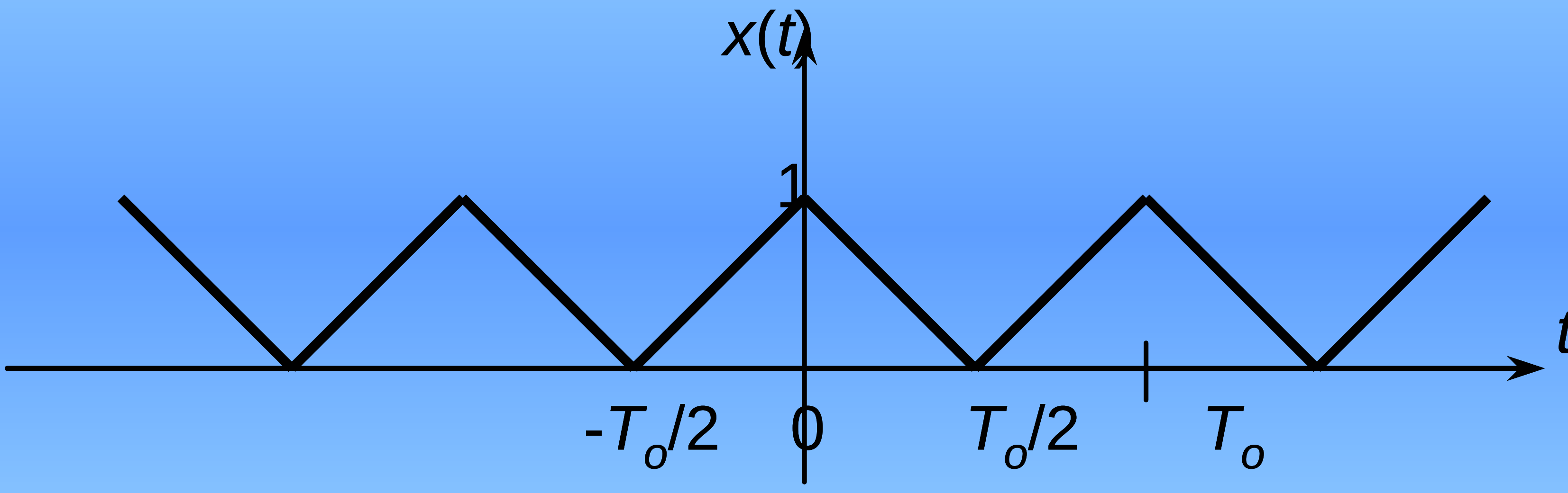
$\mathrm{triang}\left(\dfrac{t}{T_o/2}\right)$ è un triangolo di altezza 1, asse $t=0$ e base T_0

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{triang}\left(\frac{t-kT_o}{T_o/2}\right)$$

ha il seguente grafico:



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{triang}\left(\frac{t - kT_o}{T_o / 2} \right)$$



è un segnale continuo chiamato
onda triangolare di periodo T_o

Esempio 12.

Il segnale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t-kT_o}{T_o/2} \right) \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT_o}{T_o} \right)$$

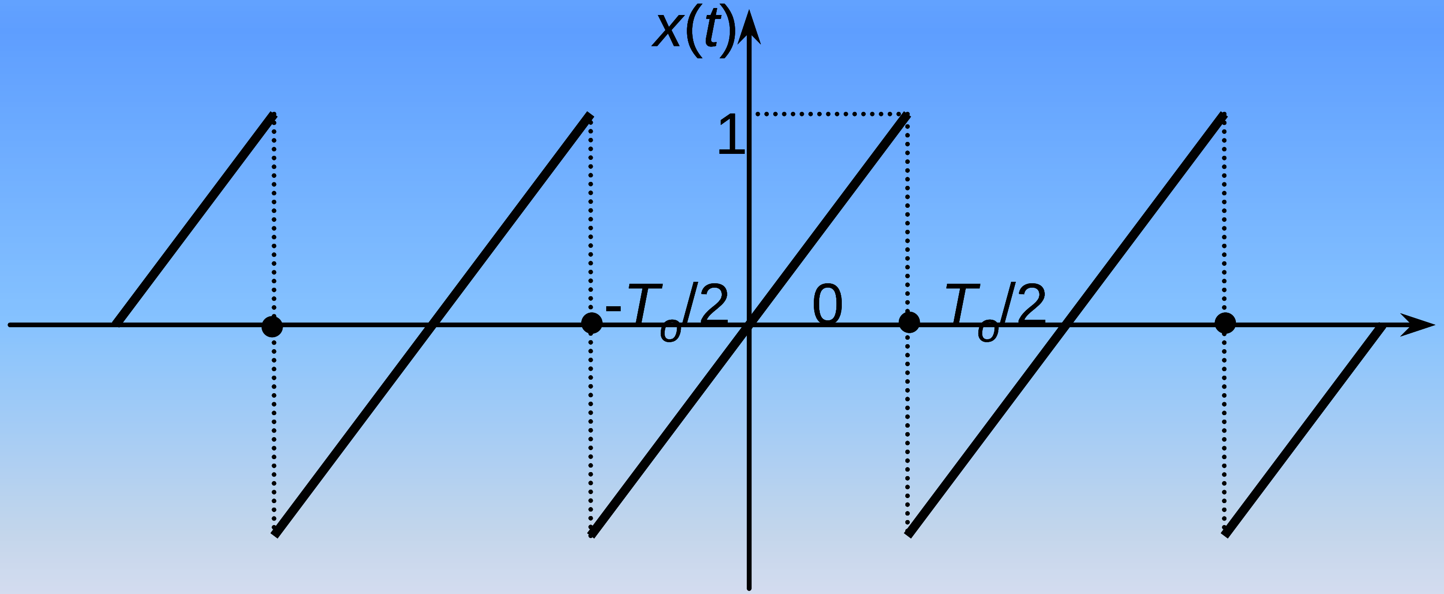
$$T_o > 0$$

è ottenuto ripetendo periodicamente (con periodo T_0) , il segmento ,

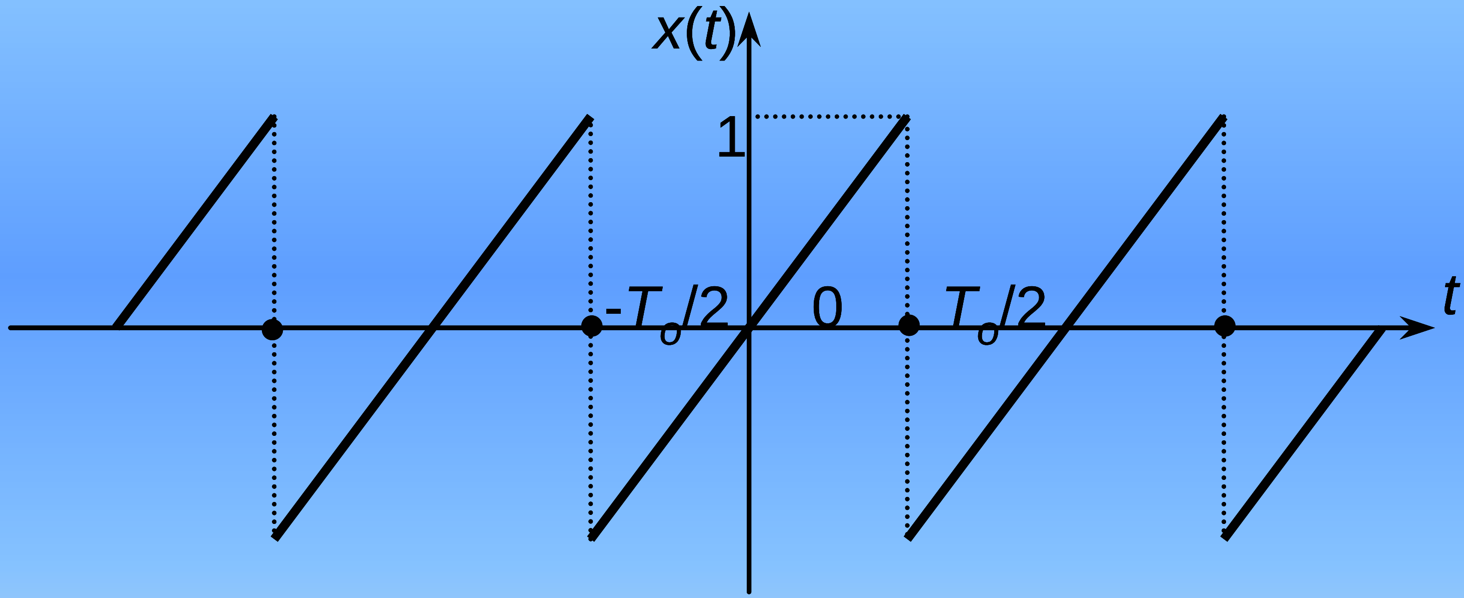
$$\left(\frac{t}{T_o/2} \right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_o} \right)$$

il segmento è ottenuto “tagliando” la retta di equazione

$$r(t) = \left(\frac{t}{T_o / 2} \right)$$ con il rettangolo $$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_o} \right)$$



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t-kT_o}{T_o/2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t-kT_o}{T_o}\right)$$



è un segnale $\mathcal{C}$-tratti chiamato *onda a dente di sega di periodo To*