POLINOMI TRIGONOMETRICI

<u>Definizione</u>.

Si dice *polinomio trigonometrico di ordine n e periodo* 2π

in *FORMA RETTANGOLARE*:

$$P_n(x) = \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)$$

$$\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R} \,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$P_n(x) = \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)$$

Ogni elemento $\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$

è detto *armonica k-esima*.

Per *k* = 1, l’elemento $\alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x$

è detto *armonica fondamentale*.

Esistono altre forme in cui esprimere tale polinomio trigonometrico.

Se *k* è tale che $\alpha_k^2 + \beta_k^2 \neq 0$

è possibile scrivere:

$$\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx =$$

$$= \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}} \cos kx + \frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}} \sin kx \right)$$

Poiché:

$$\left|\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}\right|\le 1 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}\right|\le 1$$

$$\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}\right)^2+\left(\frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}\right)^2=1$$

esiste $\vartheta_k \in \mathbb{R}$ per cui vale:

$$\cos\vartheta_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}$$

$$\sin\vartheta_k = -\frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}$$

In tal modo:

$$\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx =$$

$$= \sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}\left(\frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}\cos kx + \frac{\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2+\beta_k^2}}\sin kx\right) =$$

$$= A_k\left(\cos\vartheta_k \cos kx - \sin\vartheta_k \sin kx\right) =$$

$$= A_k \cos\left(kx + \vartheta_k\right)$$

$$\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx = A_k \cos\left(kx + \vartheta_k\right)$$

dove

$A_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}$ è detta *ampiezza*

ϑ_k è detta *fase iniziale*

della k-esima armonica.

Il polinomio trigonometrico può essere allora scritto:

$$P_n(x) = \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right)$$

FORMA POLARE:

$$P_n(x) = A_o \cos\vartheta_o + 2\sum_{k=1}^{n} A_k \cos\left(kx + \vartheta_k\right)$$

dove $A_o = \left|\alpha_0\right|$

$\vartheta_o = 0$ se $\alpha_0 > 0$ oppure

$\vartheta_o = \pi$ se $\alpha_0 < 0$

Ricordando ora che:

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j\sin\vartheta \qquad \left|e^{j\vartheta}\right| = 1$$

da cui :

$$e^{-j\vartheta} = \cos\vartheta - j\sin\vartheta$$

e quindi $e^{-j\vartheta} = (e^{j\vartheta})^*$ segue:

$$\cos\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2} \qquad \sin\vartheta = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{j2}$$

Formule di Eulero

$$2A_k\cos\left(kx+\vartheta_k\right)=A_k\left(e^{j\left(kx+\vartheta_k\right)}+e^{-j\left(kx+\vartheta_k\right)}\right)=$$

$$=A_k\left(e^{jkx}e^{j\vartheta_k}+e^{-jkx}e^{-j\vartheta_k}\right)$$

posto, se $k\geq 1$,

$X_k=A_k e^{j\vartheta_k}$ e $X_{-k}=A_k e^{-j\vartheta_k}$ valgono:

$$2A_k\cos\left(kx+\vartheta_k\right)=X_k e^{jkx}+X_{-k}e^{-jkx}$$

$k\geq 1$

$$2A_k \cos\left(kx + \vartheta_k\right) = X_k e^{jkx} + X_{-k} e^{-jkx}$$

Posto poi

$$X_0 = A_0 \cos \vartheta_0 = e^{j\vartheta_0} \text{ (poiché } \vartheta_0 = 0 \text{ o } \vartheta_0 = \pi\text{)}$$

possiamo scrivere:

$$P_n\left(x\right) = A_o \cos \vartheta_o + 2\sum_{k=1}^{n} A_k \cos\left(kx + \vartheta_k\right) =$$

$$= X_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(X_k e^{jkx} + X_{-k} e^{-jkx} \right) =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} X_k e^{jkx}$$

FORMA ESPONENZIALE

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} X_k e^{jkx}$$

dove i *coefficienti* X_k sono tali che:

$$|X_k| = |X_{-k}| = A_k \qquad k \geq 1$$

$$\arg X_k = -\arg X_{-k} = \vartheta_k$$

cosicché $X_{-k} = X_k^* \qquad k \geq 1$

Riassumendo:

$$P_n(x) = \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right) =$$

$$= A_o \cos\vartheta_o + 2\sum_{k=1}^{n} A_k \cos\left(kx + \vartheta_k\right) =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} X_k e^{jkx}$$

con

$$X_0 = A_0 \cos\vartheta_0 = \alpha_0$$

$$X_k = \alpha_k - j\beta_k \qquad k \geq 1$$

$$\left|X_k\right| = A_k = \sqrt{\alpha^2{}_k + \beta^2{}_k}$$

Fissato ora $T_0 > 0$, ponendo $x = 2\pi f_o t$, $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$

otteniamo polinomi trigonometrici di periodo T_0

$$\alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k \cos\left(2k\pi f_o t\right) + \beta_k \sin\left(2k\pi f_o t\right)\right) =$$

$$= A_o \cos\vartheta_o + 2\sum_{k=1}^{n} A_k \cos\left(2k\pi f_o t + \vartheta_k\right) =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

SERIE TRIGONOMETRICHE

Definizione.

Si dice *serie trigonometrica* una serie di funzioni avente dei polinomi trigonometrici come ridotte n-esime.

Nella forma esponenziale sono quindi del tipo:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

È una serie trigonometrica le cui ridotte sono periodiche di periodo $T_0 = \dfrac{1}{f_0}$

<u>Esempio 13.</u>

La serie $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jkt}$$

È una serie trigonometrica di periodo 2π

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jkt}$$

ha coefficienti $X_k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Poiché

$$X_k = \alpha_k - j\beta_k \qquad k \geq 1 \qquad X_0 = \alpha_0$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jkt} = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \cos kx$$

Tale serie non converge in alcun punto essendo

$$\left| e^{jkt} \right| = 1 \text{ per ogni } t$$

Ricordando che:

Se una serie di funzioni, continue in un intervallo I, converge uniformemente in I, allora la funzione somma della serie è essa stessa continua in I

possiamo concludere che:

Se la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$

è uniformemente convergente in $\mathbb{R}$, allora la funzione somma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

è continua in $\mathbb{R}$.

Inoltre, per la periodicità di $e^{j2k\pi f_o t}$

$x(t)$ è periodica di periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$

Di più:

Teorema.
Data la serie $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

se essa è uniformemente convergente in $\mathbb{R}$ e

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

è la funzione somma, allora i coefficienti della serie sono legati alla $x(t)$ dalle relazioni:

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{-j2k\pi f_o t} x(t)\,dt \qquad k \in \mathbb{Z} \qquad T_0 = \frac{1}{f_0}$$

I coefficienti

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{-j2k\pi f_o t} x(t)\,dt \qquad k \in \mathbb{Z}$$

sono detti

coefficienti di Fourier di $x(t)$

Osservazione.
Se la serie numerica $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|$

è convergente, allora la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$

è totalmente e quindi anche uniformemente convergente in $\mathbb{R}$.

Dunque la convergenza della serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X_k|$ è *condizione sufficiente* per la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

Poniamoci ora il problema inverso:

data la funzione $x(t)$ periodica di periodo T_0 per cui sia possibile scrivere i coefficienti di Fourier:

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{-j2k\pi f_o t} x(t)\,dt \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(per esempio $x(t)$ $\mathcal{C}$-tratti)

Se, a partire da tali coefficienti, costruiamo la serie :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t} \qquad \text{con} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

essa è detta *serie di Fourier* associata a $x(t)$ e si scrive:

$$x(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

- tale serie converge?
- e *se* converge, converge a $x(t)$?

Se $x(t)$ è periodica, la sola condizione che sia $\mathcal{C}$-tratti **non è** sufficiente a ciò.

Occorre un'ipotesi più forte: che $x(t)$ sia

$$\mathcal{C}^1\text{-tratti}$$

Definizione:

$x(t)$ si dice $\mathcal{C}^1$ *a tratti* se:

- $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti
- $x(t)$ è $\mathcal{C}^1$ in ogni intervallo limitato in cui è continua tranne al più un numero finito di punti in cui la derivata $x'(t)$ presenta discontinuità di tipo salto.

Teorema (di Dirichlet).
Sia $x(t)$ segnale periodico di periodo T_0.
Se $x(t)$ è $\mathcal{C}^1$-tratti allora la serie di Fourier ad esso associata

$$x(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t} \qquad \text{con} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

converge *puntualmente* $\forall t \in \mathbb{R}$ e

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t} = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$$

Il Teorema dice che:
per ogni t_0 reale, la serie di Fourier associata a $x(t)$ converge a:

- $x(t_0)$ se t_0 è un punto nel quale $x(t)$ è continuo;

- $\dfrac{x(t^{+}{}_{0})+x(t^{-}{}_{0})}{2}$ se t_0 è un punto nel quale

  $x(t)$ ha una discontinuità di tipo salto.

Si *conviene* allora di *normalizzare* i segnali $\mathcal{C}$-tratti nei punti di discontinuità definendo

$$x(t_i) = \frac{x(t_i^+) + x(t_i^-)}{2}$$

in ogni punto t_i di discontinuità per $x(t)$

Con tale convenzione, il Teorema precedente permette di affermare che:

Se $x(t)$ è un segnale periodico di periodo T_0 di classe $\mathcal{C}^1$-tratti *e normalizzato*, allora la serie di Fourier ad esso associata, cioè la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t} \qquad \text{con} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

e

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{-j2k\pi f_o t} x(t)\,dt \qquad k \in \mathbb{Z}$$

converge puntualmente a $x(t)$ cioè

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t} = x(t)$$

Un altro importante

Teorema:

Sia $x(t)$ segnale periodico di periodo T_0 .
Se $x(t)$ è $\mathcal{C}^1$-tratti *e continuo*, allora la serie di Fourier ad esso associata

$$x(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t} \quad \text{con} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

converge *totalmente* in $\mathbb{R}$