Prima di fare qualche esempio di calcolo, osserviamo alcune proprietà dei coefficienti di Fourier. Poiché

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{-j2k\pi f_o t} x(t)\, dt \qquad k \in \mathbb{Z} \quad T_0 f_0 = 1$$

è anche

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \left(\cos\left(2k\pi f_o t\right) - j \sin\left(2k\pi f_o t\right)\right) x(t)\, dt$$

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \left( \cos\left(2k\pi f_o t\right) - j \sin\left(2k\pi f_o t\right) \right) x(t)\, dt$$

Cosicché ricordando che:

$$X_k = \alpha_k - j\beta_k$$

vale:

$$\mathrm{Re}\left(X_k\right) = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \cos\left(2k\pi f_o t\right) x(t)\, dt = \alpha_k$$

$$\mathrm{Im}\left(X_k\right) = -\frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \sin\left(2k\pi f_o t\right) x(t)\, dt = -\beta_k$$

1. Se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti e <u>pari</u>:

$$\operatorname{Im}(X_k) = -\frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} \sin(2k\pi f_o t)\, x(t)\, dt = 0$$

perché $\sin(2k\pi f_o t)\, x(t)$ è dispari.

Ne segue che i coefficienti:

$$X_k = \alpha_k$$

sono tutti reali

Perciò

se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti, periodico *e pari,* la serie di Fourier ad esso associata è una *serie di soli coseni*.

$$x(t) \sim \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(2k\pi f_0 t)$$

con

$$\alpha_k = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o/2} \cos(2k\pi f_o t)\, x(t)\, dt$$

perché $\cos(2k\pi f_o t)\, x(t)$ è pari.

2. Se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti e dispari:

$$\mathrm{Re}\left(X_k\right) = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \cos\left(2k\pi f_o t\right) x\left(t\right) dt = 0$$

perché $\cos\left(2k\pi f_o t\right) x\left(t\right)$ è dispari.

Ne segue che i coefficienti:

$$X_k = -j\ \beta_k$$

sono immaginari puri.

2. Se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti e <u>dispari</u>:

$$\operatorname{Re}\left(X_k\right)=\frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2}\cos\left(2k\pi f_o t\right)x\left(t\right)dt=0$$

perché $\cos\left(2k\pi f_o t\right)x\left(t\right)$ è dispari.

Perciò

se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti, periodico *e dispari* la serie di Fourier ad esso associata è una *serie di soli seni*.

Perciò
se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti, periodico *e dispari,* la serie di Fourier ad esso associata è una *serie di soli seni*.

$$x(t) \sim 2\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \sin(2k\pi f_0 t)$$

con

$$\beta_k = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o/2} \sin(2k\pi f_o t)\, x(t)\, dt$$

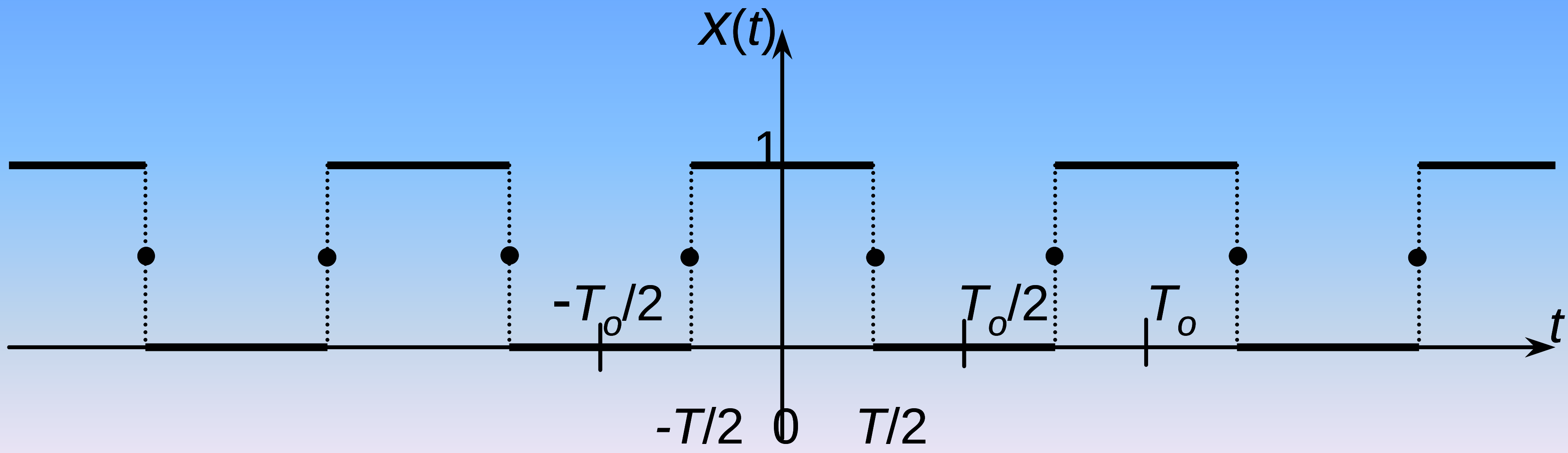
perché $\sin(2k\pi f_o t)\, x(t)$ è pari.

# Esempio 14.

Il segnale:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT_o}{T}\right)$$

$$\text{con } 0 < T < T_o$$



è periodico di periodo $T_0$, $\mathcal{C}^1$-tratti, ed è normalizzato.
Poiché è pari, la serie di Fourier ad esso associata è del tipo:

$$x(t) = \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(2k\pi f_o t) \qquad T_0 f_0 = 1$$

dove

$$\alpha_k = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o/2} \cos(2k\pi f_o t)\, x(t)\, dt$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Poiché $\quad x(t)=1 \text{ per } t\in(0,T/2)$

mentre $\quad x(t)=0 \text{ per } t\in(T/2,T_o/2)$

risulta:

$$\alpha_k=\frac{2}{T_o}\int_0^{T/2}\cos(2k\pi f_o t)\,dt$$

Se $k\neq 0$

$$\alpha_k=\frac{2}{T_o}\left[\frac{\sin(2k\pi f_o t)}{2k\pi f_o}\right]_{t=0}^{t=T/2}=$$

$$=\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}k\pi f_o T_o}\sin\left(\cancel{2}k\pi f_o\frac{T}{\cancel{2}}\right)$$

$$\alpha_k = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2} k\pi f_o T_o} \sin\left(\cancel{2} k\pi f_o \frac{T}{\cancel{2}}\right) = \qquad (k \neq 0)$$

$$= \frac{T}{T_o} \frac{1}{k\pi f_o T} \sin\left(k\pi f_o T\right) = T f_0 \operatorname{sinc}\left(k f_o T\right)$$

$$T_0 f_0 = 1$$

Se $k = 0$

$$\alpha_0 = \frac{2}{T_o} \int_0^{T/2} \cos\left(2 \cdot 0 \cdot \pi f_o t\right) dt = \frac{\cancel{2}}{T_o} \frac{T}{\cancel{2}} = T f_0 =$$

$$= T f_0 \sin c\left(0 \cdot f_o T\right)$$

Per ogni $k = 0, 1, 2, ....$ risulta dunque

$$\alpha_k = T f_0 \operatorname{sinc}\left(k f_o T\right)$$

In conclusione possiamo scrivere che:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t - kT_o}{T}\right) = T f_o + 2 T f_o \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(k f_o T\right) \cos\left(2 k \pi f_o t\right)$$

$$0 < T < T_0 \qquad T_0 f_0 = 1$$

La convergenza è da intendersi nel senso precisato dal teorema di Dirichlet.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT_o}{T}\right) = Tf_o + 2Tf_o \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(kf_oT\right)\cos\left(2k\pi f_o t\right)$$

Nel caso particolare $2T = T_0$ diventa:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-kT_0}{T_0/2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\cos\left(2k\pi f_o t\right)$$

valutiamo $\quad \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{\sin\left(k\pi/2\right)}{k\pi/2}$

Se $k$ è pari, $\quad k = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$

$$\sin\left(\frac{2m\pi}{2}\right) = \sin\left(m\pi\right) = 0$$

cosicché:

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) = 0 \qquad k \ \text{ pari}$$

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)=\frac{\sin\left(k\pi/2\right)}{k\pi/2}$$

Se $k$ è dispari, $k=2m-1$ con $m\in\mathbb{N}$

$$\sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{2}\right)=\sin\left(m\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{m-1}$$

cosicché:

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)=\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\frac{k\pi}{2}}=(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{2}{k\pi}$$

Lo sviluppo:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t-kT_0}{T_0/2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\cos\left(2k\pi f_o t\right)$$

diventa:

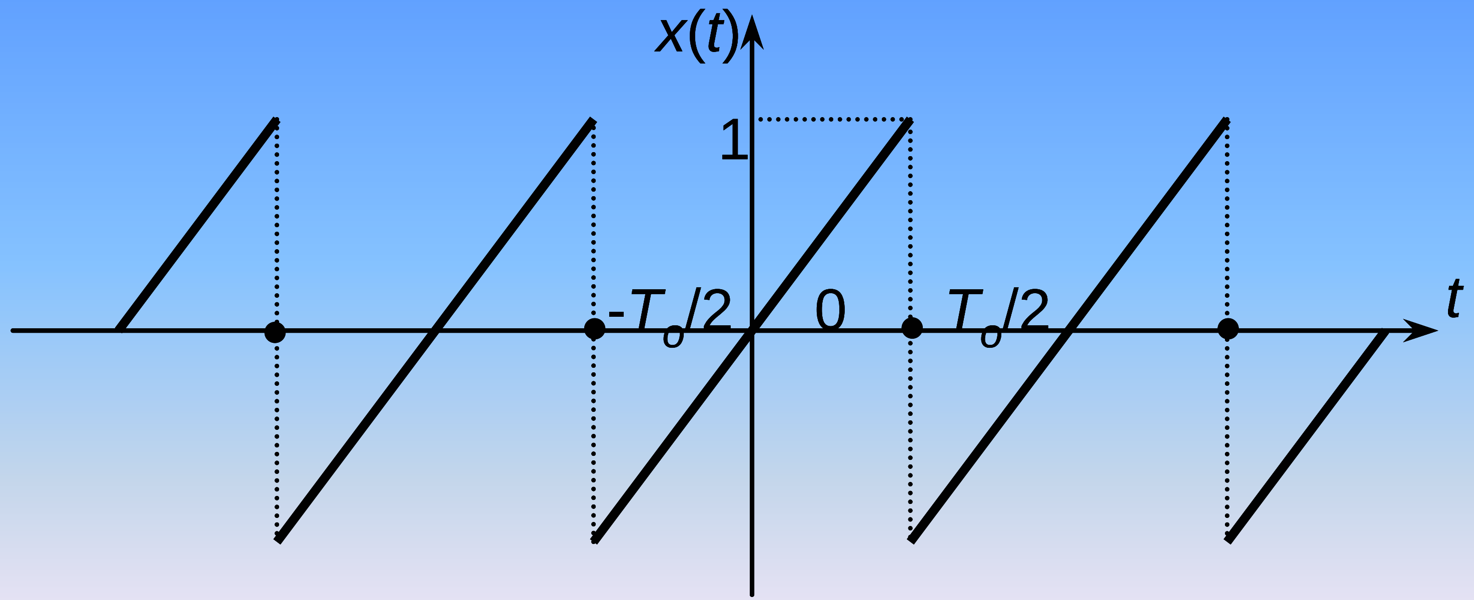
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t-kT_0}{T_0/2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k\ dispari}}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^{\frac{k-1}{2}}}{k}\cos\left(2k\pi f_o t\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\left(-1\right)^{m-1}}{2m-1}\cos\left(2\left(2m-1\right)\pi f_o t\right)$$

# Esempio 15.

Il segnale:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t-kT_o}{T_o/2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t-kT_o}{T_o}\right)$$



è periodico di periodo $T_0$, $\mathcal{C}^1$-tratti , ed è normalizzato.
Poiché è dispari, la serie di Fourier ad esso associata è del tipo:

$$x(t) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \sin(2k\pi f_o t) \qquad T_0 f_0 = 1$$

dove

$$\beta_k = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o/2} \sin(2k\pi f_o t)\, x(t)\, dt \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Poiché

$$x(t) = \frac{t}{T_o/2} \qquad \text{per} \qquad t \in (0, T_o/2)$$

risulta:

$$\beta_k = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_0/2} \frac{t}{T_o/2} \sin(2k\pi f_o t)\, dt$$

integrando per parti:

$$= \frac{4}{T_o^{\,2}} \left( \left[ -t \frac{\cos(2k\pi f_o t)}{2k\pi f_o} \right]_{t=0}^{t=T_0/2} + \frac{1}{2k\pi f_o} \int_0^{T_0/2} \cos(2k\pi f_o t)\, dt \right)$$

$$T_0 f_0 = 1$$

$$\beta_k = \frac{4}{2k\pi f_0 T_0^2}\left(-\frac{T_0}{2}\cos\left(2k\pi f_o \frac{T_0}{2}\right) + \left[\frac{\sin\left(2k\pi f_o t\right)}{2k\pi f_o}\right]_0^{\frac{T_0}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{k\pi T_0}\left(-\frac{T_0}{2}\cos\left(k\pi\right) + \frac{1}{2k\pi f_0}\sin\left(2k\pi f_o \frac{T_0}{2}\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{k\pi}\left(-1\right)^k + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin\left(k\pi\right) =$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(-1\right)^{k+1}$$

$$\sin\left(k\pi\right) = 0$$

In conclusione possiamo scrivere che:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t-kT_o}{T_o/2}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t-kT_o}{T_o}\right)=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(2k\pi f_o t)$$

$$T_0 f_0 = 1$$

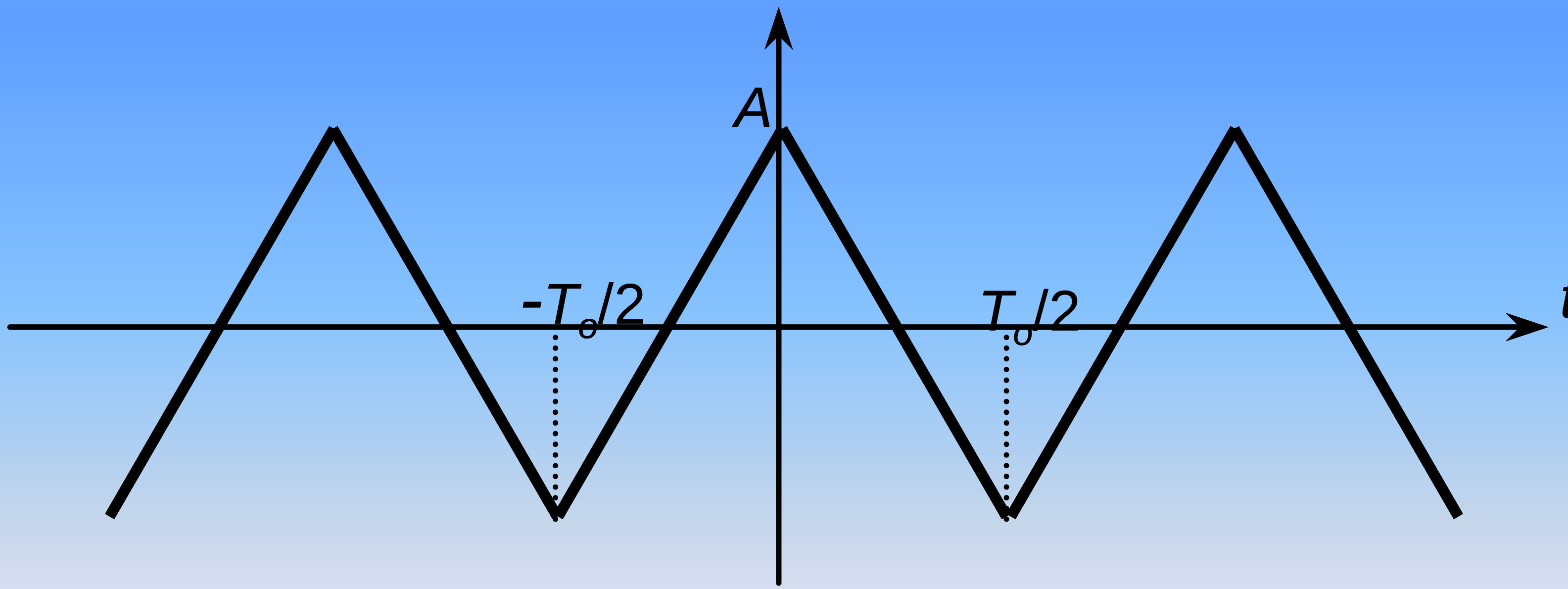
dove la convergenza è da intendersi nel senso precisato dal teorema di Dirichlet.

# Esempio 16.

Dato il segnale:

$$x(t) = A\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k \operatorname{triang}\left(\frac{t-(kT_0)/2}{T_o/4}\right)$$

$$A > 0$$



è periodico di periodo $T_0$, $\mathcal{C}^1$-tratti e continuo.
Poiché è pari, la serie di Fourier ad esso associata è del tipo:

$$x(t) = \alpha_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(2k\pi f_o t) \qquad T_0 f_0 = 1$$

dove

$$\alpha_k = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o/2} \cos(2k\pi f_o t)\, x(t)\, dt$$

$$k = 0, 1, 2, ....$$

Poiché

$$x(t) = A\left(1 - \frac{t}{T_o/4}\right) \quad \text{per} \quad t \in (0, T_o/2)$$

risulta:

$$\alpha_k = \frac{2}{T_o}\int_0^{T_0/2} A\left(1 - \frac{t}{T_o/4}\right)\cos(2k\pi f_o t)\,dt$$

Se $k = 0$

ovvie considerazioni di tipo geometrico permettono di affermare subito che :

$$\alpha_0 = 0$$

Se $k \neq 0$, integrando per parti:

$$\alpha_k = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_0/2} A\left(1 - \frac{t}{T_o/4}\right) \cos\left(2k\pi f_o t\right) dt =$$

$$= \frac{2A}{T_o} \left[ \left(1 - \frac{t}{T_o/4}\right) \frac{\sin\left(2k\pi f_o t\right)}{2k\pi f_o} \right]_0^{T_0/2} +$$

$$+ \frac{2A}{T_o} \int_0^{T_0/2} \frac{1}{T_o/4} \frac{\sin\left(2k\pi f_o t\right)}{2k\pi f_o} dt$$

$$\alpha_k = \frac{2A}{T_o}\left[\left(1-\frac{t}{T_o/4}\right)\frac{\sin\left(2k\pi f_o t\right)}{2k\pi f_o}\right]_0^{T_0/2} +$$

$$+\frac{2A}{T_o}\int_0^{T_0/2}\frac{1}{T_o/4}\frac{\sin\left(2k\pi f_o t\right)}{2k\pi f_o}dt =$$

$$T_0 f_0 = 1$$

$$= 2A\left(1-2\right)\frac{\sin\left(k\pi\right)}{2k\pi} +$$

$$\sin\left(k\pi\right) = 0$$

$$+\frac{4A}{k\pi T_0}\left[\frac{-\cos\left(2k\pi f_o t\right)}{2k\pi f_o}\right]_0^{T_0/2}$$

$$\alpha_k = \frac{4A}{k\pi T_0}\left[\frac{-\cos\left(2k\pi f_o t\right)}{2k\pi f_o}\right]_0^{T_0/2} =$$

$$= \frac{2A}{k^2\pi^2}\left(1-\cos\left(k\pi\right)\right) =$$

$$T_0 f_0 = 1$$

$$\cos\left(k\pi\right) = \left(-1\right)^k$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ \dfrac{4A}{k^2\pi^2} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Poiché

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ \dfrac{4A}{k^2\pi^2} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases} \qquad \alpha_0 = 0$$

possiamo scrivere :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \operatorname{triang}\left( \frac{t-(kT_0)/2}{T_o/4} \right) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ dispari}}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \cos(2k\pi f_o t)$$

$$T_0 f_0 = 1$$

La convergenza è totale.

# *ANALISI IN FREQUENZA*

Se $x(t)$ è un segnale periodico di periodo $T_0$ di classe $\mathcal{C}^1$-tratti *e normalizzato*, le espressioni integrali che indicano i suoi coefficienti di Fourier

$$X_k = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} e^{-j2k\pi f_o t} x(t)\, dt \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{con} \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

sono dette *equazioni di analisi*

mentre la sua rappresentazione mediante la serie di Fourier ad esso relativa

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

è detta:

*equazione di sintesi.*

Essa permette di scrivere il segnale come “somma” delle sue armoniche.

Le equazioni di analisi permettono di determinare, per ogni armonica, ampiezza e fase, cioè di effettuare la cosiddetta *analisi in frequenza* del segnale.

La rappresentazione grafica della successione complessa $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ avviene per lo più attraverso la rappresentazione delle due successioni reali $\left(A_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\left(\vartheta_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ :

$$A_k = \left|X_k\right| \qquad \vartheta_k = \arg X_k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

poiché per $k \geq 1$

$$\left| X_{-k} \right| = \left| X_k \right| \qquad A_k = \left| X_k \right|$$

$$\arg X_{-k} = -\arg X_k \qquad \vartheta_k = \arg X_k$$

possiamo concludere che:

- la successione $\left( A_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ è pari rispetto a $k$
- la successione $\left( \vartheta_k \right)_{k \in \mathbb{Z}}$ è dispari rispetto a $k$

(e quindi ci basta valutarne i valori solo per $k \geq 0$

Per le rappresentazioni grafiche delle successioni $\left(A_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ e $\left(\vartheta_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ sono di solito utilizzati segmenti verticali;

vengono perciò denominate

*spettro di ampiezza* e *spettro di fase*

del segnale $x\left(t\right)$

Esempio 17.

Per il segnale:

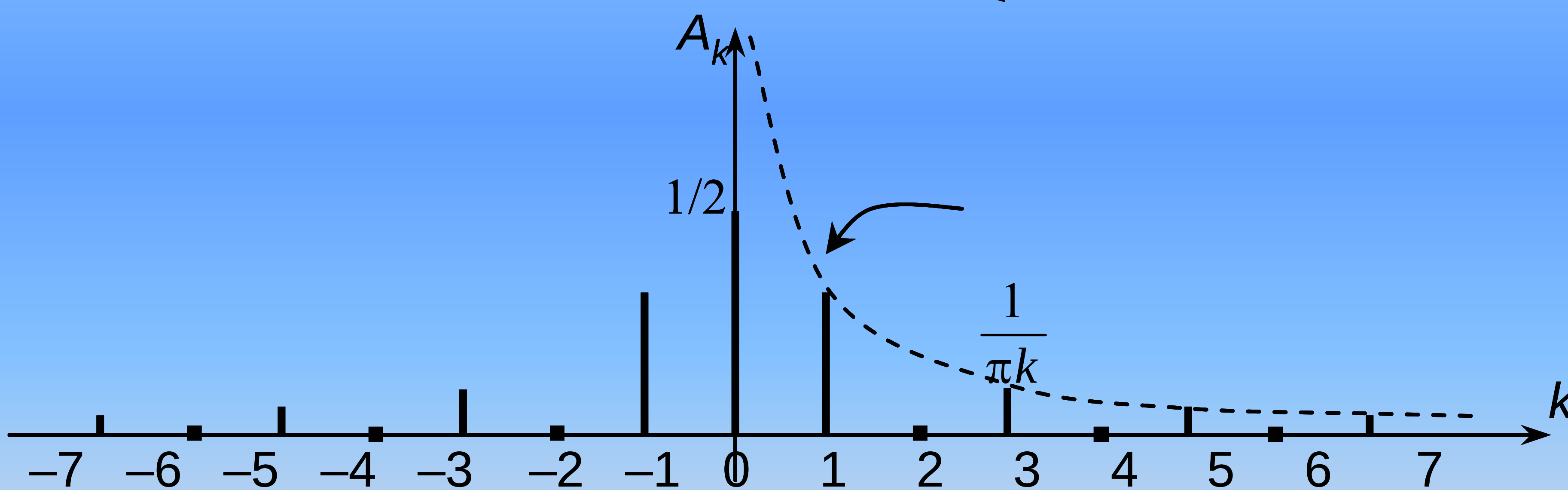
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left( \frac{t - kT_0}{T_0 / 2} \right)$$

abbiamo già determinato i coefficienti di Fourier nell'Esempio 14:

$$X_0 = \frac{1}{2} \qquad X_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ pari} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi k} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Abbiamo allora che:

$$A_0 = |X_0| = \frac{1}{2} \qquad A_k = |X_k| = \begin{cases} 0 & k \geq 2 \text{ pari} \\ \dfrac{1}{\pi k} & k \geq 1 \text{ dispari} \end{cases}$$




Spettro di ampiezza

Inoltre:

poiché $X_k$ sono tutti reali ($x(t)$ è pari!):

per $k \geq 0$

$$\vartheta_k = \arg X_k = \begin{cases} 0 & \text{se } X_k > 0 \\ \pi & \text{se } X_k < 0 \end{cases}$$

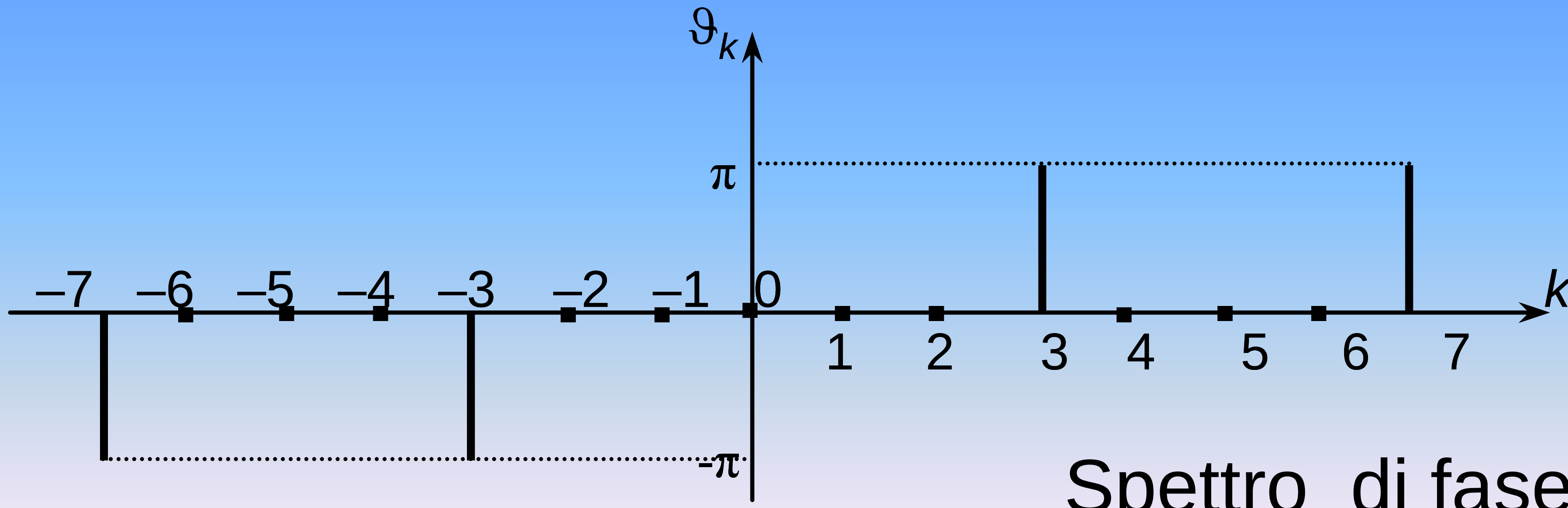
Posto convenzionalmente

$$\arg X_k = 0 \quad \text{se } X_k = 0$$

abbiamo che :

$$\vartheta_0 = \arg\frac{1}{2} = 0 \qquad \vartheta_k = 0 \text{ se } k \geq 1 \text{ pari}$$

$$\vartheta_k = \arg\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\pi k} = \begin{cases} 0 & k = 1, 5, 9, \ldots \\ \pi & k = 3, 7, \ldots \end{cases}$$




Spettro di fase

# Esempio 17bis.

Per il segnale:

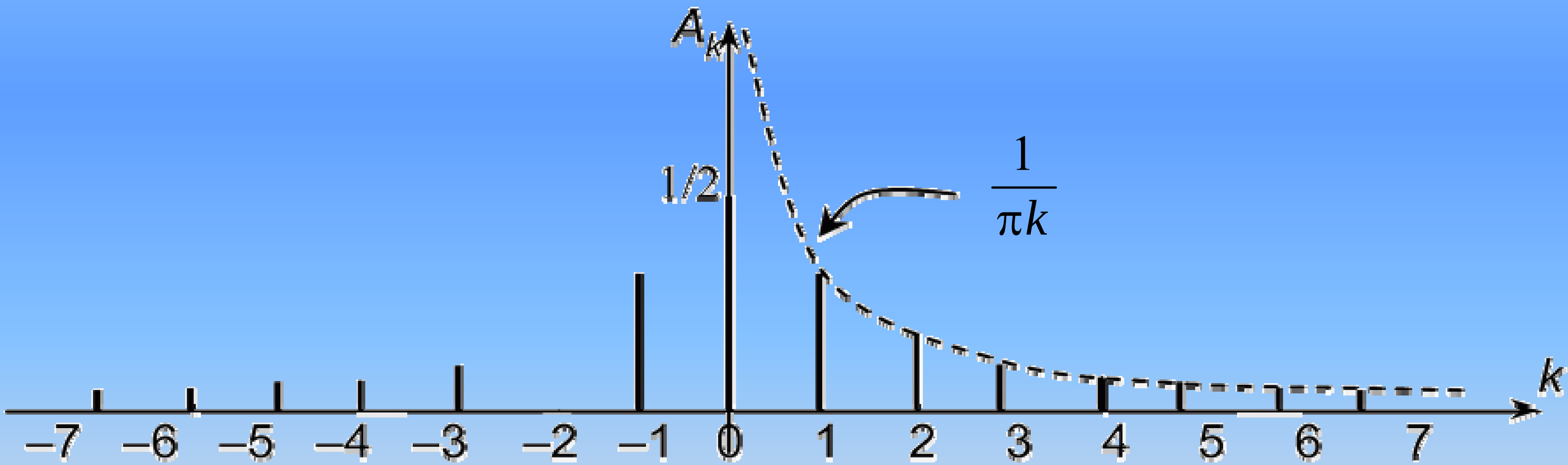
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{t - kT_o}{T_o / 2} \right) \mathrm{rect}\left( \frac{t - kT_o}{T_o} \right)$$

abbiamo già determinato i coefficienti di Fourier nell'Esempio 15:

$$X_k = -j \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \qquad \mathrm{k=1,2,\ \ ....}$$

Abbiamo allora che:

$$A_k = \left| X_k \right| = \frac{1}{\pi k} \qquad k \geq 1$$




Spettro di ampiezza

Inoltre:

poiché $X_k$ sono tutti immaginari puri:

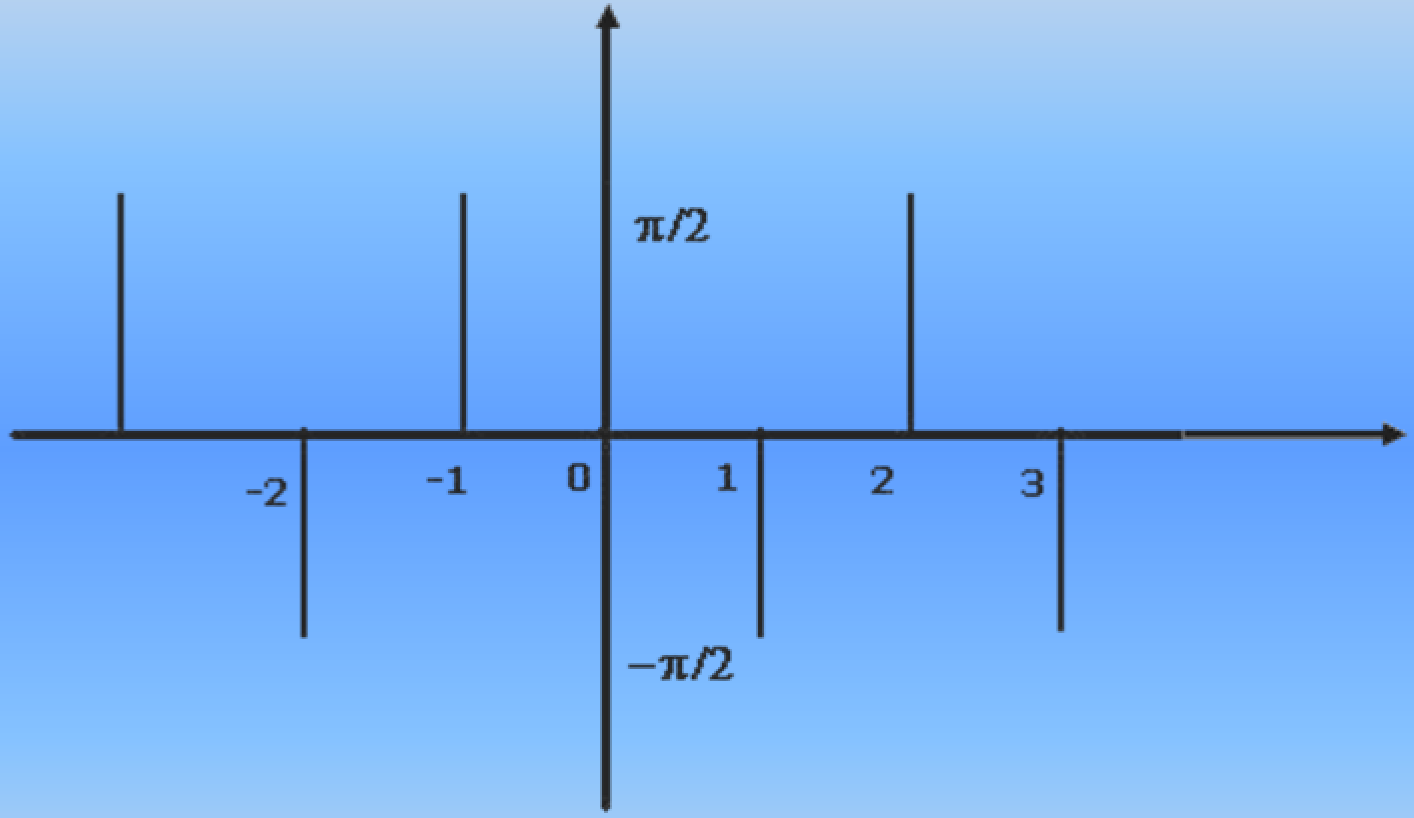
$$X_k = -j\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} = j(-1)^k\frac{1}{\pi k} \qquad k \geq 1$$

$$\vartheta_k = \arg X_k = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } k \text{ pari} \\ -\pi/2 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Posto convenzionalmente

$$\arg X_k = 0 \quad \text{se } X_k = 0$$

abbiamo:




Spettro di fase