PROPRIETA' ELEMENTARI

Se $x(t)$ è un segnale periodico di periodo T_0 di classe $\mathcal{C}^1$-tratti *e normalizzato*, le equazioni di analisi e di sintesi stabiliscono una corrispondenza fra $x(t)$ e la sequenza X_k dei suoi coefficienti di Fourier.

Tale corrispondenza è espressa nel seguito mediante la scrittura:

$$x(t) \rightleftarrows X_k$$

1. Linearità.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono entrambi periodici di periodo T_0 e

$$x_1(t) \rightleftarrows X_k^1 \quad \text{e} \quad x_2(t) \rightleftarrows X_k^2$$

allora per ogni $A, B \in \mathbb{R}$ vale:

$$Ax_1(t) + Bx_2(t) \rightleftarrows AX_k^1 + BX_k^2$$

2. Traslazione (nel tempo).

Se $x(t)$ è periodico di periodo T_0 con

$$x(t) \rightleftarrows X_k$$

allora per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ il segnale $x(t-t_0)$ è ancora periodico di periodo T_0 e vale :

$$x(t-t_0) \rightleftarrows e^{-j2k\pi f_0 t_0} X_k$$

Poiché :

$$\left|e^{-j2k\pi f_0 t_0} X_k\right| = \left|X_k\right|$$

$$\arg\left(X_k e^{-j2k\pi f_0 t_0}\right) = \arg X_k - 2k\pi f_0 t_0 + 2m\pi$$

$$= \arg X_k - 2\pi\left(k f_0 t_0 - m\right)$$

$$k, m \in \mathbb{Z}$$

possiamo dedurre che:

Una traslazione nei tempi di $x\left(t\right)$ non modifica l'ampiezza delle armoniche che lo rappresentano ma ne produce uno sfasamento

3. Cambiamento di scala.

Se $x(t)$ è periodico di periodo T_0 con

$$x(t) \rightleftarrows X_k$$

allora per ogni $\alpha \neq 0$ il segnale $x(\alpha t)$ è periodico di periodo $T_0 / |\alpha|$ e vale :

$$x(\alpha t) \rightleftarrows X_k$$

ovvero, se

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

allora:

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi|\alpha| f_0 t}$$

Un cambiamento di scala nei tempi non modifica l'ampiezza né la fase delle armoniche mentre ne modifica la frequenza

Un risultato importante è:

<u>Teorema</u> <u>(di Parseval)</u>.
Sia $x(t)$ segnale periodico di periodo T_0 .

Se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti e $x(t) \rightleftarrows X_k$
allora:

$$\frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \left| x(t) \right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| X_k \right|^2$$

Da esso si ottengono:

1. Tenendo conto che, se $x(t)$ è un segnale $\mathcal{C}$-tratti periodico di periodo T_0

$$P_x = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \left| x(t) \right|^2 dt$$

indica la *potenza* di $x(t)$, l'uguaglianza precedente ha la seguente interessante interpretazione:

Se $$x(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

allora la *k*-esima armonica della serie:

$$x_k(t) = X_k e^{j2k\pi f_o t}$$

è anche essa un segnale di periodo T_0 la cui potenza è:

$$P_{x_k} = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \left| x_k(t) \right|^2 dt = \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \left| X_k e^{j2k\pi f_o t} \right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{T_o} \int_{-T_o/2}^{T_o/2} \left| X_k \right|^2 dt = \frac{1}{\cancel{T_o}} \left| X_k \right|^2 \cancel{T_o} = \left| X_k \right|^2$$

Dunque l'uguaglianza del Teorema di Parseval

$$\frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2}\left|x(t)\right|^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|X_k\right|^2$$

può essere anche scritta:

$$P_x=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}P_{x_k}$$

Ovvero: *la potenza del segnale* $x(t)$ *è uguale alla somma delle potenze delle armoniche che lo compongono*

2. Lemma di Riemann-Lebesgue

Poiché $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti l'integrale

$$\frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2}\left|x(t)\right|^2 dt$$ è convergente.

Il Teorema di Parseval assicura dunque che la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|X_k\right|^2$$ è anch'essa convergente.

Per tale motivo, la condizione necessaria di convergenza implica che:

$$\left|X_k\right|^2 \xrightarrow[k\to\pm\infty]{} 0$$

ovvero:

$$\alpha_k^{\,2} + \beta_k^{\,2} \xrightarrow[k\to\pm\infty]{} 0$$

e quindi,

$$\alpha_k = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t)\cos\left(2k\pi f_0 t\right)dt \xrightarrow[k\to\pm\infty]{} 0$$

$$\beta_k = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} x(t)\sin\left(2k\pi f_0 t\right)dt \xrightarrow[k\to\pm\infty]{} 0$$

TRASFORMATA DI FOURIER

Permette di analizzare in frequenza segnali non periodici.

Se $x(t)$ è un segnale definito su $\mathbb{R}$ a valori reali o complessi, la trasformata di Fourier di $x(t)$ è definita formalmente da:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\, x(t)\, dt$$

per gli $f \in \mathbb{R}$ per cui tale integrale converge.

L’integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\, x(t)\, dt$ è detto:

integrale di Fourier relativo a $x(t)$

Se <u>converge</u>, definisce la funzione di variabile reale $X(f)$ che assume in genere valori complessi.

Se $$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(t)\, dt$$

la funzione $X(f)$ è detta:

Trasformata di Fourier di $x(t)$

(o F-trasformata di $x(t)$)

e si scrive

$$X(f) = (Fx)(f)$$
$$= \hat{x}(f)$$

Se $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt$ è convergente

si dice anche che:

$x(t)$ *è trasformabile secondo Fourier*

(oppure che è *F-trasformabile)*

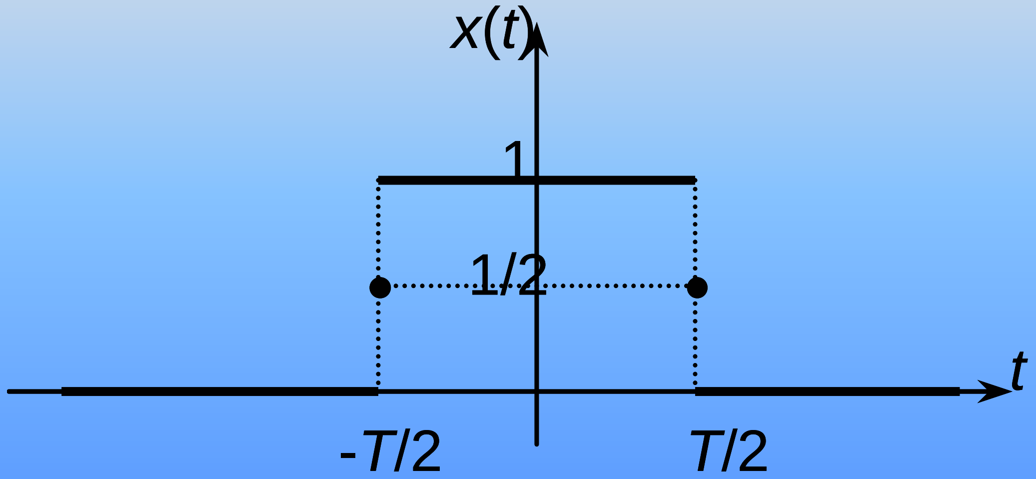
e si scrive $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$

Esempio 18.

Il segnale:

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

T>0



è F-trasformabile per ogni $f \in \mathbb{R}$. Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f\, t}\, x(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

che è convergente per ogni $f \in \mathbb{R}$.

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt$$

Se $f \neq 0$:

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft} dt = \left[-\frac{e^{-j2\pi ft}}{j2\pi f} \right]_{t=-T/2}^{t=T/2} =$$

$$= \frac{1}{\pi f} \left(\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j} \right) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} =$$

$$= T \operatorname{sinc}(fT)$$

Se $f = 0$: $$X(0) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi 0t} dt = T = T \operatorname{sinc}(0T)$$

In conclusione possiamo scrivere che:

se

$$x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$ allora

$$X(f) = T \operatorname{sinc}(fT)$$ per ogni $f \in \mathbb{R}$

o anche:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} T \operatorname{sinc}(fT)$$

Vale il seguente: Teorema
(Condizione sufficiente per F-trasformabilità):

Sia $x(t)$ un segnale assolutamente integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$. Allora:

- $X(f)$ è definita per ogni $f \in \mathbb{R}$
- $X(f)$ è continua su $\mathbb{R}$;
- $X(f)$ è limitata in $\mathbb{R}$ (cioè $\sup\limits_{f \in \mathbb{R}} \left| X(f) \right| \leq \mathrm{cost}$)
- $\lim\limits_{f \to \pm\infty} X(f) = 0$ (Lemma di Riemann-Lebesgue)

Ricordiamo che:

$x(t)$ segnale definito su $\mathbb{R}$ è assolutamente integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right| dt \quad \text{è convergente}$$

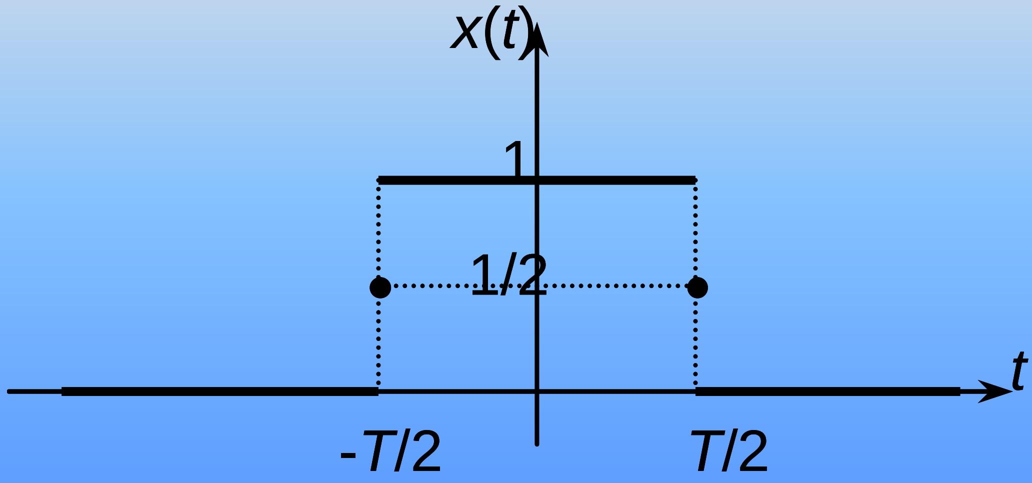
si scrive anche: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right| dt < +\infty$

Esempio 18bis.

Il segnale:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

T>0



è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$ essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| rect\left(\frac{t}{T}\right) \right| dt = T$$

Il Teorema assicura quindi che esso è F-trasformabile per ogni $f \in \mathbb{R}$.

Non solo:
Assicura pure che $X(f)$ è continua e limitata in $\mathbb{R}$ e che $\lim_{f \to \pm\infty} X(f) = 0$

Infatti la funzione $X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$ determinata nell'Esempio 18 verifica tutte queste proprietà.

Prima di fare qualche altro esempio di calcolo, osserviamo alcune proprietà della trasformata di Fourier. Poiché

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\, x(t)\, dt$$

è anche

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi f)\right) x(t)\, dt$$

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\cos(2\pi ft)-j\sin(2\pi f)\right)x(t)\,dt$$

Cosicché

$$\mathrm{Re}\left(X(f)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi ft)\,x(t)\,dt$$

$$\mathrm{Im}\left(X(f)\right)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(2\pi ft)\,x(t)\,dt$$

1. Se $x(t)$ è F-trasformabile e pari:

$$\mathrm{Im}\big(X(f)\big) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi f t)\, x(t)\, dt = 0$$

dunque

$$X(f) = 2\int_{0}^{+\infty} \cos(2\pi f t)\, x(t)\, dt$$

è reale.

2. Se $x(t)$ è F-trasformabile e dispari:

$$\mathrm{Re}\big(X(f)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi ft)\,x(t)\,dt = 0$$

dunque

$$X(f) = -j2\int_{0}^{+\infty} \sin(2\pi ft)\,x(t)\,dt$$

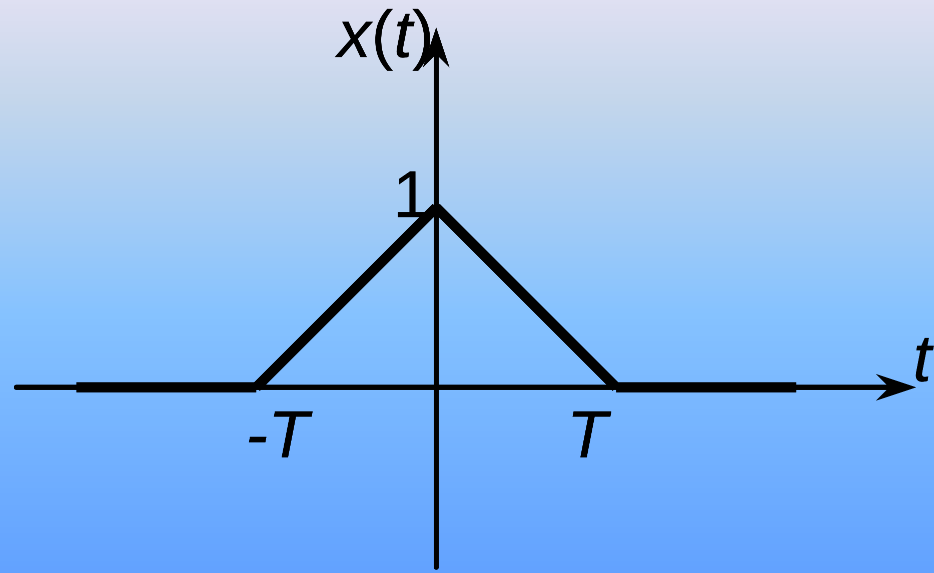
è immaginario puro.

Esempio 19.

Il segnale:

$$x(t) = \text{triang}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$T > 0$$



è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$ essendo, per ovvie considerazioni di tipo geometrico,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \text{triang}\left(\frac{t}{T}\right) \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{triang}\left(\frac{t}{T}\right) dt = T$$

E' quindi F-trasformabile per ogni $f \in \mathbb{R}$.

Se $f = 0$ essendo

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right)dt$$

è

$$X(0) = T$$

Poiché $x(t)$ è pari, la sua trasformata è reale ed è del tipo:

$$X(f) = 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi ft)\, x(t)\, dt$$

Poiché $x(t) = 0 \quad \text{per} \quad t > T$

$$x(t) = 1 - \frac{t}{T} \quad \text{per} \quad t \in (0, T)$$

risulta

$$X(f) = 2\int_0^{T} \cos(2\pi ft)\left(1 - \frac{t}{T}\right) dt$$

Se $f \neq 0$, integrando per parti:

$$X(f) = 2\int_0^T \cos(2\pi f t)\left(1 - \frac{t}{T}\right) dt =$$

$$= 2\left[\left(1 - \frac{t}{T}\right)\frac{\sin(2\pi f t)}{2\pi f}\right]_{t=0}^{t=T} +$$

$$+ \cancel{2}\int_0^T \frac{1}{T}\frac{\sin(2\pi f t)}{\cancel{2}\pi f} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi f T}\int_0^T \sin(2\pi f t)\, dt$$

$$X(f) = \frac{1}{\pi f T}\int_0^T \sin(2\pi f t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi f T}\left[\frac{-\cos(2\pi f t)}{2\pi f}\right]_{t=0}^{t=T} =$$

$$= \frac{1}{\pi f T}\left[\frac{1-\cos(2\pi f T)}{2\pi f}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi f T}\frac{\cancel{2}\sin^2(\pi f T)}{\cancel{2}\pi f}$$

$$1-\cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha$$

$$X(f) = \frac{1}{\pi f T} \frac{\cancel{2}\sin^2(\pi f T)}{\cancel{2}\pi f} =$$

$$= T\left(\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right)^2 = T\mathrm{sinc}^2(fT)$$

Riassumendo:

per ogni $f \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

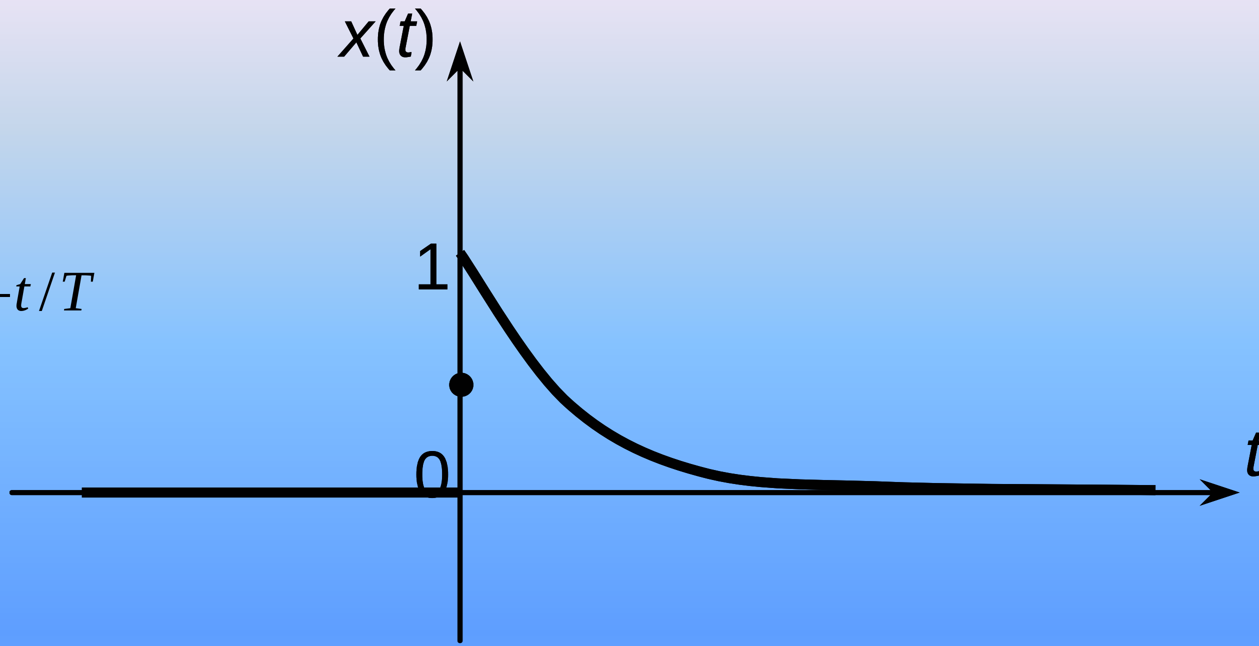
$$T > 0$$

Esempio 20.

Il segnale:

$$x(t) = u(t)e^{-t/T}$$

$$T > 0$$



è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$ essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| u(t)e^{-t/T} \right| dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t/T} dt = \left[-\frac{e^{-t/T}}{1/T} \right]_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= T\left(1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-t/T}\right) = T$$

E' quindi F trasformabile per ogni $f \in \mathbb{R}$.
Osserviamo che se $f = 0,$ essendo:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t/T}\,dt$$

è

$$X(0) = T$$

E' poi:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}x(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}e^{-t/T}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-t(j2\pi f+1/T)}\,dt=\left[-\frac{e^{-t(j2\pi f+1/T)}}{j2\pi f+1/T}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}$$

Poiché

$$\left|e^{-j2\pi ft}e^{-t/T}\right|=e^{-t/T}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

risulta

$$X(f)=\frac{1}{1/T+j2\pi f}$$

cioè

$$u(t)e^{-t/T}\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{1/T+j2\pi f}\qquad \begin{array}{c}\forall f\in\mathbb{R}\\ T>0\end{array}$$

Poniamoci ora il problema inverso:

dato il segnale $x(t)$ definito in $\mathbb{R}$, per cui è possibile scrivere la trasformata di Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\, x(t)\, dt \qquad f \in \mathbb{R}$$

(per esempio $x(t)$ assolutamente integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$)

Se a partire da tale funzione $X(f) = (Fx)(f)$ costruiamo l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t} X(f)\, df$$

- tale integrale converge?
- e *se* converge, converge a $x(t)$?

In generale, la sola condizione che $x(t)$ sia assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$ **non è** sufficiente a ciò.

<u>Esempio 21</u>

Si è visto che, se $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

allora $X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$

ma, in tal caso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t}\, X(f)\, df$$

non è neppure convergente.

Si ha invece:

Teorema (di inversione di Dirichlet).

Sia $x(t)$ segnale assolutamente integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$.

Se $x(t)$ è $\mathcal{C}^1$-tratti allora esiste finito

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} X(f)\,df$$

e vale:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} X(f)\,df = \frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

Ricordiamo che:

per una funzione $\varphi(u)$ definita su $\mathbb{R}$ si definisce

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \varphi(u)\,du$$

(*valor principale* dell'integrale).

Se: $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du$ è convergente, allora

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)\,du$$

Il Teorema dice che, se $x(t)$ soddisfa le ipotesi indicate e $X(f) = (Fx)(f)$ allora

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} X(f)\,df$$ converge a:

- $x(t_0)$ se t_0 è un punto nel quale $x(t)$ è continuo;

- $\dfrac{x(t^{+}{}_{0}) + x(t^{-}{}_{0})}{2}$ se t_0 è un punto nel quale

  $x(t)$ ha una discontinuità di tipo salto.

Se dunque $x(t)$ è un segnale assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^1$-tratti e *normalizzato*, e

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt$$

è la sua F-trasformata, $X(f) = (Fx)(f)$
Allora

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} X(f)\,df = x(t)$$

Esempio 21bis

Si è visto che, se $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (T > 0)$

allora $X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)$

In questo caso $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t}\, T\,\mathrm{sinc}(fT)\, df$

non è convergente.

Poiché $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ è:

- assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$
- è $\mathcal{C}^1$-tratti
- è normalizzato

il Teorema di Dirichlet permette di concludere che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} T \,\mathrm{sinc}\left(fT\right) df = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Esempio 22

Si è visto che, se $x(t) = \text{triang}\left(\dfrac{t}{T}\right) \quad (T > 0)$

allora $X(f) = T\,\text{sinc}^2(fT)$

In questo caso $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t}\, T\,\text{sinc}^2(fT)\, df$

è convergente.

Infatti:

- $\left|X(f)\right|$ é integrabile in $[-1,1]$ perché ivi continua;

- per $|f| \geq 1$ si ha:

$$\left|X(f)\right| = \left|T\,\mathrm{sinc}^2(fT)\right| = \left|T\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}\right| \leq \frac{T}{(\pi T)^2}\frac{1}{f^2}$$

e dunque, per il criterio del confronto, è assolutamente integrabile in s. g. anche in $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$

Ne segue che:

$X(f)$ è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$

Perciò:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t}\, T\,\mathrm{sinc}^2(fT)\,df = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f t}\, T\,\mathrm{sinc}^2(fT)\,df$$

Poiché inoltre $\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)$ è:

- assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$
- è $\mathcal{C}^1$-tratti
- è continuo

L'assoluta integrabilità di $T\operatorname{sinc}^2(fT)$ ed il Teorema di Dirichlet permettono di concludere che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} T\operatorname{sinc}^2(fT)\,df = \operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)$$

ANALISI IN FREQUENZA

Se $x(t)$ è un segnale assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^1$-tratti e *normalizzato*, l'espressione integrale che indica la sua trasformata di Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t}\, x(t)\, dt \qquad f \in \mathbb{R}$$

è detta *equazione di analisi*

mentre la sua rappresentazione mediante la formula di inversione

$$x(t) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} X(f)\, df$$

è detta:

equazione di sintesi.

(molto spesso nei testi tecnici la scrittura *v.p.* “sparisce”)

L’equazioni di analisi permette di effettuare la cosiddetta *analisi in frequenza* del segnale.

La rappresentazione grafica della funzione a valori complessi $X(f)$ avviene per lo più attraverso la rappresentazione delle due funzioni reali $A(f)$ e $\vartheta(f)$:

$$A(f) = \left| X(f) \right|$$

$$f \in \mathbb{R}$$

$$\vartheta(f) = \arg X(f)$$

Ricordando che:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi f)\right) x(t)\,dt$$

cosicché

$$\mathrm{Re}\left(X(f)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi ft)\,x(t)\,dt$$

$$\mathrm{Im}\left(X(f)\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi ft)\,x(t)\,dt$$

si verifica facilmente che:

$$X(-f) = \mathrm{Re}\,X(-f) + j\,\mathrm{Im}\,X(-f) =$$

$$= \mathrm{Re}\,X(f) - j\,\mathrm{Im}\,X(f) = X^*(f)$$

Ne segue che:

$$A(-f) = \left|X(-f)\right| = \left|X^*(f)\right| = A(f)$$

$$\vartheta(-f) = \arg X(-f) = \arg X^*(f) =$$

$$= -\arg X(f) = -\vartheta(f) \qquad f \in \mathbb{R}$$

Possiamo perciò concludere che:

- la funzione $A(f)$ è pari
- la funzione $\vartheta(f)$ è dispari

(e quindi ci basta valutarne i valori solo per $f \geq 0$)

Ovviamente:

- se $X(f)$ è a valori reali
(come avviene per esempio se il segnale $x(t)$ è pari)

oppure

- se $X(f)$ è a valori immaginari
(come avviene per esempio se il segnale $x(t)$ è dispari)

si preferisce rappresentare $X(f)$ mediante le funzioni $\operatorname{Re} X(f)$ o $\operatorname{Im} X(f)$ (rispettivam.)