Abbiamo visto che
- condizione sufficiente affinché un segnale sia F-trasformabile è che sia assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$.

Un’altra classe di segnali che ammettono trasformata di Fourier (purché intesa opportunamente) sono i

segnali a energia finita.

Definizione.

Si dice che un segnale $x(t)$ definito su $\mathbb{R}$ è a energia finita se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt < +\infty$$

In tal caso

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt$$

è detta *Energia del segnale*

Osserviamo innanzitutto che:
se un segnale $x(t)$ definito su $\mathbb{R}$ è $\mathcal{C}$-tratti e ad energia finita,
per ogni fissato *r* >0, possiamo definire il segnale

$$x_r(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \le r \\ 0 & |t| > r \end{cases}$$

Tale segnale è non solo a energia finita ma anche assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$

$$x_r(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \le r \\ 0 & |t| > r \end{cases}$$

Per ogni *r>0* il segnale $x_r(t)$ ammette quindi trasformata di Fourier che vale:

$$X_r(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x_r(t)\,dt = \int_{-r}^{r} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt$$

Teorema.

Sia $x(t)$ un segnale a *energia finita*;
allora esiste $X(f)$ (che chiameremo trasformata di Fourier di $x(t)$) verificante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|X(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt$$

tale che

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|X(f) - X_r(f)\right|^2 df = 0$$

Dove $X_r(f)$ è la funzione definita sopra si ha inoltre:

<u>Proposizione.</u>
Sia $x(t)$ un segnale ad energia finita.
Se $x(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti e <u>se</u> esiste finito

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}x(t)\,dt$$

allora la trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t)$ vale

$$X(f)=v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}x(t)\,dt$$

Osserviamo che:
se esiste finito il $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt$
poiché

$$X_r(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x_r(t)\,dt = \int_{-r}^{r} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt$$

si ha che:

$$X(f) = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt =$$

$$= \lim_{r\to+\infty} X_r(f)$$

Esempio 23.

Il segnale: $x(t) = \mathrm{sinc}(At)$ $\quad A > 0$

non è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$
Però è a energia finita. Infatti:

$$|x(t)|^2 = |\mathrm{sinc}(At)|^2$$

- é integrabile in $[-1,1]$ perché ivi continuo;

- per $|t| \geq 1$

$$|x(t)|^2 = |\mathrm{sinc}(At)|^2 = \frac{\sin^2(\pi At)}{(\pi At)^2} \leq \frac{1}{(\pi A)^2}\frac{1}{t^2}$$

e dunque, per il criterio del confronto, è assolutamente integrabile in s. g. anche in $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$

Ne segue che $x(t) = \mathrm{sinc}(At) \qquad A > 0$

è un segnale a energia finita.

Il Teorema precedente assicura allora che esso ammette trasformata di Fourier, ma non fornisce strumenti atti a determinarla.

La Proposizione precedente ci può dare una possibilità se esiste, finito,

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{sinc}\left(At\right)dt$$

Per valutare tale integrale, osserviamo che abbiamo precedentemente ottenuto (Esempio 21) che:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} T \operatorname{sinc}(fT)\, df = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad \begin{matrix} \forall t \in \mathbb{R} \\ T > 0 \end{matrix}$$

In tale uguaglianza scambiamo f con t . Otteniamo:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} T \operatorname{sinc}(Tt)\, dt = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft}T\,\mathrm{sinc}(Tt)\,dt = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

da cui, sostituendo f con $-f$:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{sinc}(Tt)\,dt = \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{-f}{T}\right)$$

ed essendo $\mathrm{rect}(f)$ funzione pari:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{sinc}(Tt)\,dt = \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

In tal modo abbiamo dimostrato non solo che l'integrale

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{sinc}(Tt)\,dt$$

è convergente, ma anche che esso assume il valore :

$$\frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

Per il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}(Tt)$
sono dunque verificate le seguenti ipotesi:

- è a energia finita
- è continuo
- $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}\mathrm{sinc}(Tt)\,dt$ converge

e vale : $\frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$

La Proposizione precedentemente enunciata assicura allora che:

$$x(t) = \mathrm{sinc}(Tt) \qquad T > 0$$

è F trasformabile e:

$$\mathrm{sinc}(Tt) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{f}{T}\right)$$

PROPRIETA' ELEMENTARI

1. Linearità.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono entrambi F trasformabili

$$x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(f) \text{ e } x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_2(f)$$

allora per ogni $A, B \in \mathbb{C}$ vale:

$$Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} AX_1(f) + BX_2(f)$$

2. Traslazione (nel tempo).

Se $x(t)$ è F trasformabile con

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

allora per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ il segnale $x(t-t_0)$ è ancora F trasformabile e vale :

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

Infatti, per definizione di trasformata:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f(u+t_o)} x(u)\,du =$$

$$t - t_0 = u$$

$$= e^{-j2\pi ft_o} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fu} x(u)\,du =$$

$$= e^{-j2\pi ft_o} X(f)$$

A una traslazione nei tempi corrisponde, in frequenza, una variazione di fase.

3. Cambiamento di scala.

Se $x(t)$ è F trasformabile con

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

allora per ogni α reale, $\alpha \neq 0$, il segnale $x(\alpha t)$
è ancora F trasformabile e vale :

$$x(\alpha t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Infatti, per definizione di trasformata,

- se $\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(\alpha t)\, dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \frac{u}{\alpha}} x(u)\, du =$$

$$\alpha t = u \Rightarrow dt = \frac{1}{\alpha} du$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} u} x(u)\, du = \frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

- se $\alpha < 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} x(\alpha t)\, dt = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f \frac{u}{\alpha}} x(u)\, du =$$

$$\alpha t = u \Rightarrow dt = \frac{1}{\alpha} du$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi \frac{f}{\alpha} u} x(u)\, du =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

ovvero, per ogni $\alpha \neq 0$

$$x(\alpha t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Un cambiamento di scala nei tempi modifica la frequenza

Se $|\alpha| > 1$ si ha una compressione in *t* a cui corrisponde una dilatazione in *f*

se $|\alpha| < 1$ si ha una dilatazione in *t* a cui corrisponde una compressione in *f*, In particolare, per $\alpha = -1$ otteniamo

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-f) = X^*(f)$$

da cui:

$$x(t) + x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) + X^*(f) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,X(f)$$

$$x(t) - x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) - X^*(f) =$$

$$= 2j\,\mathrm{Im}\,X(f)$$

4. Variazione di fase.

Se $x(t)$ è F trasformabile con

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

allora per ogni $f_0 \in \mathbb{R}$ il segnale $e^{j2\pi f_0 t} x(t)$ è ancora F trasformabile e vale :

$$e^{j2\pi f_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f - f_0)$$

Infatti, per definizione di trasformata:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} e^{j2\pi f_0 t} x(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_o)t} x(t)\, dt =$$

$$= X\left(f - f_0\right)$$

Ad una variazione di fase nel dominio dei tempi corrisponde una traslazione in frequenza.

Ne discende il cosiddetto

Teorema di modulazione:

Se $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$ allora

$$x(t)\cos(2\pi f_o t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\left(X(f-f_o)+X(f+f_o)\right)$$

Infatti:

$$x(t)\cos(2\pi f_o t) = x(t)\left(\frac{e^{j2\pi f_o t}+e^{-j2\pi f_o t}}{2}\right)$$

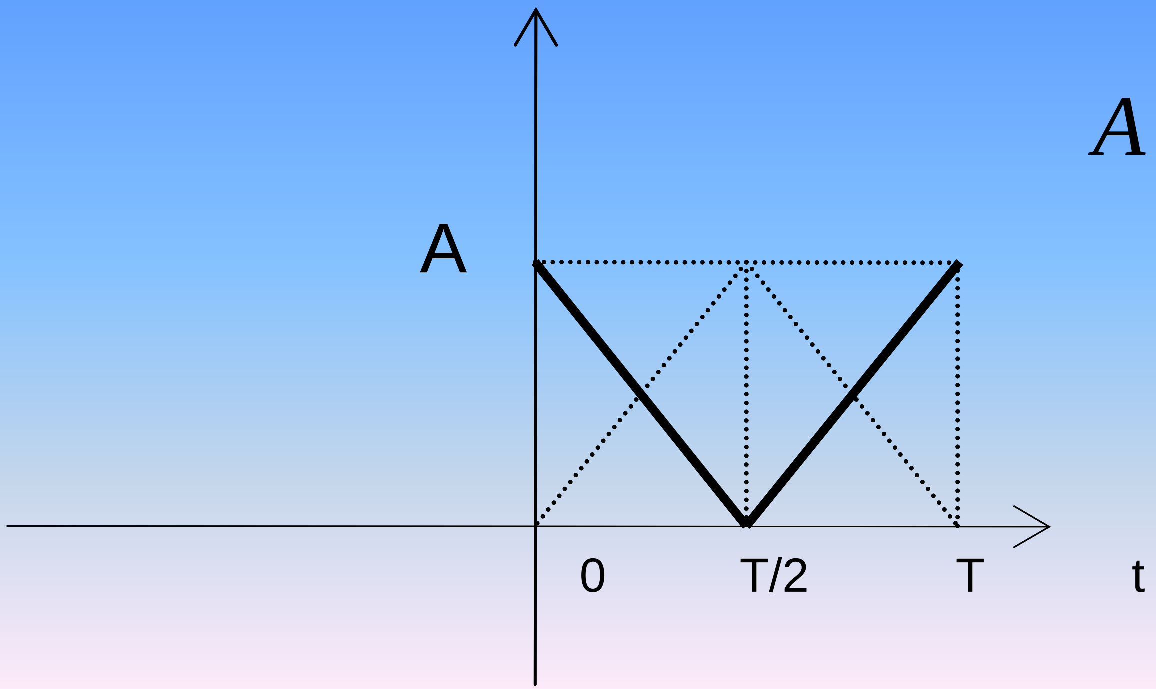
$$x(t)\cos(2\pi f_o t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\left(X(f-f_o)+X(f+f_o)\right)$$

Esempio 24.

Calcolare la F trasformata del segnale:

$$y(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) - A\,\mathrm{triang}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right)$$

$$A > 0,\ T > 0$$



Applicando le proprietà di linearità, traslazione in t e cambiamento di scala, otteniamo che la F trasformata di:

$$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)-A\,\mathrm{triang}\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right)$$

vale:

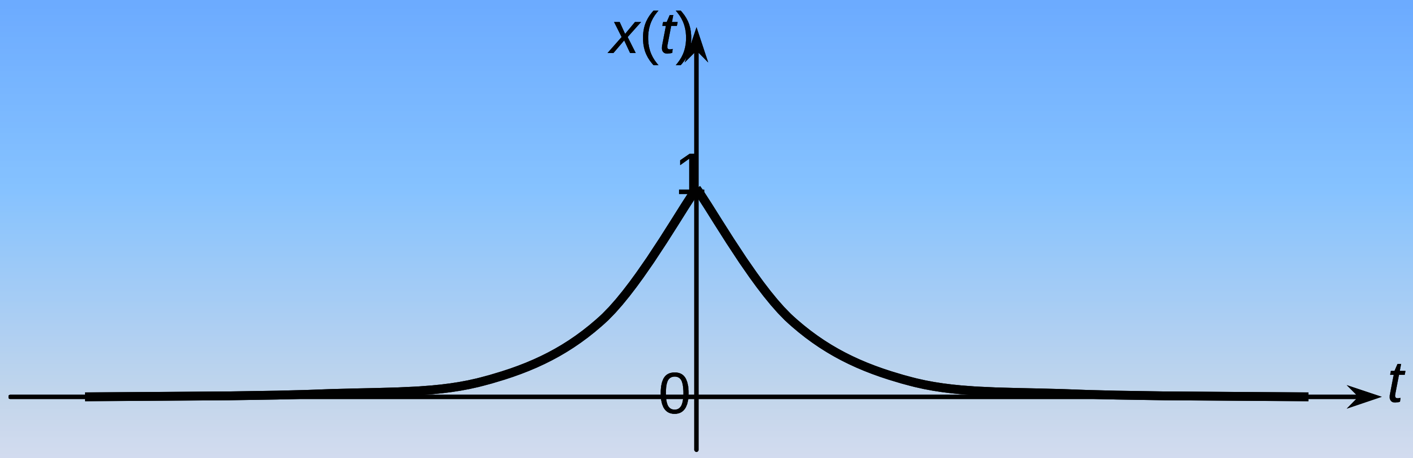
$$AT\,\mathrm{sinc}(fT)\,e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}-A\frac{T}{2}\mathrm{sinc}^2\left(f\frac{T}{2}\right)e^{-j\cancel{2}\pi f\frac{T}{\cancel{2}}}=$$

$$=ATe^{-j\pi fT}\left(\mathrm{sinc}(fT)-\frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right)\right)$$

Esempio 25.

Calcoliamo la F trasformata $Y(f)$ del segnale:

$$y(t) = e^{-|t|/T} \qquad T > 0$$



Indicato con $x(t) = u(t)e^{-t/T}$ il segnale già studiato nell'Esempio 20 e la cui trasformata vale

$$X(f) = \frac{1}{1/T + j2\pi f} = \frac{T}{1 + j2\pi fT} = \frac{T(1 - j2\pi fT)}{1 + (2\pi fT)^2}$$

osservato che

$$y(t) = x(t) + x(-t)$$

otteniamo:

$$Y(f) = 2\,\mathrm{Re}\,X(f) = \frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$$

Vengono ora elencate alcune altre proprietà della trasformata di Fourier.

Nell’ambito delle funzioni esse necessitano di ipotesi più forti di quelle viste in precedenza e di dimostrazioni più delicate.

Ne verrà qui data solo qualche giustificazione.

Molte limitazioni e difficoltà saranno superate nell’ambito delle distribuzioni.

5. Dualità.

Sia $x(t)$ F trasformabile con

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

Si supponga inoltre che $x(t)$ sia l' anti - trasformata di $X(f)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} X(f)\, df$$

Allora anche il segnale $X(t)$ è F trasformabile e vale :

$$X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$$

La trasformata di $X(t)$ è:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(-f)t} X(t)\,dt$$

Dall'ipotesi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi t f} X(f)\,df = x(t)$$

segue:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} X(t)\,dt = x(-f)$$

6. Derivata della trasformata.

Sia $x(t)$ F trasformabile con $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$

Se anche $t\,x(t)$ è F trasformabile allora:

$X(f)$ è derivabile e vale:

$$\frac{d}{df}X(f) = -2\pi j\, F\big(t\,x(t)\big)(f)$$

o, equivalentemente:

$$t\,x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{1}{2\pi j}\frac{d}{df}X(f)$$

Infatti: $$\frac{d}{df}X(f)=\frac{d}{df}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi ft}x(t)\,dt$$

Supponendo di poter derivare sotto il segno di integrale:

$$\frac{d}{df}X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{df}\left(e^{-j2\pi ft}x(t)\right)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi ft}(-j2\pi t)\,x(t)\,dt=$$

$$=-2\pi j\,F\left(t\,x(t)\right)(f)$$

<u>6. Trasformata della derivata</u>.

Sia $x(t)$ F trasformabile con

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

Se:

- $x(t)$ è derivabile in $\mathbb{R}$ con anche $x'(t)$

F trasformabile,

- $x(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$

Allora vale:

$$x'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi j\, f\, X(f)$$

La trasformata di $x'(t)$ è: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x'(t)\,dt$

Supponendo di poter integrare per parti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x'(t)\,dt = \left[e^{-j2\pi ft} x(t)\right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} +$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} (j2\pi f)\, e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt$$

Poiché $\left|e^{-j2\pi ft} x(t)\right| = \left|x(t)\right| \to 0 \quad \text{se} \quad t \to \pm\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (j2\pi f)\, e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt =$$

$$= 2\pi jf \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt =$$

$$= 2\pi jf\; X(f)$$

Esempio 26.

Calcoliamo la F trasformata $X(f)$ del segnale:

$$x(t) = e^{-t^2} \qquad \text{(segnale gaussiano)}$$

$x(t)$ è F-trasformabile perché è assolutamente integrabile in s. g. in $\mathbb{R}$.

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Ne segue subito che $X(0) = \sqrt{\pi}$

Il calcolo diretto di

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f t} e^{-t^2} dt$$

non è però possibile.

La determinazione di $X(f)$ può avvenire utilizzando i Teoremi di derivazione.

Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim_{t\to\pm\infty} e^{-t^2} = 0$$

Inoltre $x(t)$ è derivabile in $\mathbb{R}$:

$$x'(t) = -2t\, e^{-t^2}$$

e $x'(t)$ è F- trasformabile perché anche esso assolutamente integrabile in s. g. in $\mathbb{R}$

Infatti:

$$\int_0^{+\infty} 2t\, e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \left[-e^{-u} \right]_{u=0}^{u \to +\infty} = 1$$

$$t^2 = u$$

$$2tdt = du$$

cosicché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x'(t) \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 2|t| e^{-t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} 2t\, e^{-t^2} = 2$$

Poiché $$x'(t) = -2t\, e^{-t^2} = -2t\, x(t)$$

anche $t\, x(t)$ è F- trasformabile

Trasformando i due membri dell'uguaglianza, da:

$$x'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi j\, f\, X(f)$$

$$t\, x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi j} \frac{d}{df} X(f)$$

si ottiene:

$$2\pi j\, f\, X(f) = -\cancel{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}\pi j}\frac{d}{df}X(f)\right)$$

ovvero:

$$\frac{d}{df}X(f) + 2\pi^2\, f\, X(f) = 0$$

Equazione differenziale lineare omogenea di primo grado nell’incognita $X(f)$.

$$X'(f) + 2\pi^2 f\, X(f) = 0$$

Risolviamo l'equazione con il metodo di separazione delle variabili.

Evidentemente la funzione nulla $X(f) \equiv 0$ è soluzione dell'equazione ma **non** del nostro problema
(si ricordi che deve essere $X(0) = \sqrt{\pi}$).

$$X'(f) = -2\pi^2 f\, X(f)$$

Possiamo perciò dividere per $X(f)$

$$\frac{X'(f)}{X(f)} = -2\pi^2 f$$

da cui l'uguaglianza delle primitive a meno di una costante c:

$$\ln\left|X(f)\right| = -\cancel{2}\pi^2 \frac{f^2}{\cancel{2}} + c$$

$$\ln\left|X(f)\right| = -\pi^2 f^2 + c$$

equivalente a:

$$\left|X(f)\right| = e^{-\pi^2 f^2 + c}$$

e anche:

$$X(f) = k\, e^{-\pi^2 f^2} \qquad k = \pm e^c$$

Resta da determinare k

$$X(f) = k\, e^{-\pi^2 f^2}$$

poiché $X(0) = \sqrt{\pi}$ segue: $\sqrt{\pi} = k$

In definitiva

$$X(f) = \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 f^2}$$

o anche:

$$e^{-t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 f^2}$$

(la trasformata di una gaussiana è ancora una gaussiana)