DISTRIBUZIONI TEMPERATE

Una distribuzione *T* è un'applicazione *lineare* e *continua* definita su un "opportuno" spazio di funzioni $\mathcal{T}$ (i cui elementi sono chiamati *funzioni test*) e a valori in $\mathbb{C}$, cioè:

$$T : \mathcal{T} \to \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}$$

$$\varphi \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{C}$$

$$T : \mathcal{T} \to \mathbb{C} \quad \text{t.c. } \forall \varphi \in \mathcal{T} \quad \varphi \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{C}$$

In generale gli elementi di $\mathcal{T}$ sono funzioni definite in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{C}$ e $\mathcal{T}$ ha la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Dire quindi che *T* è lineare significa:

$$T(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = \alpha T(\varphi_1) + \beta T(\varphi_2)$$
$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{T} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$T:\mathcal{T} \to \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \varphi \mapsto T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}$$

Il significato della proprietà di continuità richiesta per l'applicazione *T* dipende fortemente dallo spazio $\mathcal{T}$ su cui T è definita.

In questo corso faremo per lo più riferimento allo *spazio delle funzioni test di Schwartz* indicato con $\mathcal{S}$ (cioè $\mathcal{T} = \mathcal{S}$).

Lo *spazio* $\mathcal{S}$ *di Schwartz* è costituito dalle funzioni φ definite in $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{C}$ tali che:

- $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}$

- esiste $c > 0$ tale che

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m \varphi^{(k)}(t) \right| < c \quad \forall m, k \in \mathbb{N}$$

Una funzione di tale tipo è la funzione gaussiana

$$\varphi(t) = e^{-t^2}$$

Infatti:

ovviamente $e^{-t^2} \in \mathcal{C}^{\infty}$;

inoltre, osservato che:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2}\right)=-2te^{-t^2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{-t^2}\right)=e^{-t^2}\left(-2+4t^2\right)$$

e, più in generale:

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{-t^2}\right)=P_k\left(t\right)e^{-t^2}$$

$P_k\left(t\right)$ polinomio in *t* di ordine *k* vale:

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{-t^2}\right)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(P_k(t)\,e^{-t^2}\right)=0\qquad\forall k\in\mathbb{N}$$

così come:

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left(t^m\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{-t^2}\right)\right)=\lim_{t\to\pm\infty}\left(P_{k+m}(t)\,e^{-t^2}\right)=0$$

$$\forall m,k\in\mathbb{N}$$

Ne segue che, poiché $\forall m,k \in \mathbb{N}$

$$t^m \frac{d^k}{dt^k}\left(e^{-t^2}\right) = P_{k+m}(t)\, e^{-t^2}$$

è funzione continua in $\mathbb{R}$ e convergente a *0* per $t \to \pm\infty$, essa è limitata:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m \frac{d^k}{dt^k}\left(e^{-t^2}\right) \right| < c \quad \forall m,k \in \mathbb{N}$$

$$\forall m,k \in \mathbb{N}$$

Ritornando al caso generale:

$$\varphi \in \mathcal{S} \iff$$

$$\varphi \in \mathcal{C}^{\infty} \quad \text{e} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m \varphi^{(k)}(t) \right| < c \quad \forall m,k \in \mathbb{N}$$

Se quindi $\varphi \in \mathcal{S}$ e $|t| > 1$ vale:

$$\left| \varphi^{(k)}(t) \right| < \frac{c}{|t|^m} \quad \forall m,k \in \mathbb{N}$$

$$\left|\varphi^{(k)}(t)\right| < \frac{c}{|t|^m} \quad \forall m,k \in \mathbb{N} \qquad |t| > 1$$

cosicché

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi^{(k)}(t) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Per l'arbitrarietà di $m,k \in \mathbb{N}$,

se $\varphi \in \mathcal{S}$:

φ e tutte le sue derivate convergono a *0* per $t \to \pm\infty$ più velocemente di una qualunque potenza di $1/|t|$

Per questo motivo lo spazio $\mathcal{S}$ di Schwartz è anche detto spazio delle *funzioni a decrescenza rapida all'infinito.*

Dalle osservazioni precedenti segue pure che: se $\varphi \in \mathcal{S}$ allora

- $\varphi^{(i)}(t) \in \mathcal{S} \quad \forall i \in \mathbb{N}$
- $P_n(t)\varphi(t) \in \mathcal{S} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Un’altra importante proprietà delle funzioni di $\mathcal{S}$ è:

ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ è *assolutamente integrabile in s. g. su* $\mathbb{R}$

Infatti, poiché φ è continua, è ovviamente integrabile in ogni intervallo limitato ed in particolare anche in $[-1,1]$

Inoltre, poiché per $|t| > 1$ vale:

$$\left|\varphi^{(k)}(t)\right| < \frac{c}{|t|^m} \qquad \forall m, k \in \mathbb{N}$$

se in tale disuguaglianza scegliamo

$$k = 0 \text{ e } m = 2$$

otteniamo

$$|\varphi(t)| < \frac{c}{|t|^2} \qquad |t| > 1$$

$$\left|\varphi(t)\right| < \frac{c}{|t|^2} \qquad\qquad |t| > 1$$

Per il Teorema del confronto φ è dunque assolutamente integrabile in s. g. anche per $|t|>1$ e, in definitiva, su tutto $\mathbb{R}$

Definizione.

Se $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi di $\mathcal{S}$, diremo che

φ_n *converge a 0 in* $\mathcal{S}$, e scriveremo

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} 0$$

se:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|t^m\varphi_n^{(k)}(t)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall m,k\in\mathbb{N}$$

Ovviamente: $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} \varphi \qquad \varphi\in\mathcal{S}$

se $\left(\varphi_n-\varphi\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} 0$

Si osservi che, la richiesta

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m \varphi_n^{(k)}(t) \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall m,k \in \mathbb{N}$$

per $m = 0$ indica che la successione $\left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e le successioni $\left(\varphi_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ di tutte le sue derivate $(\forall k \in \mathbb{N})$ devono convergere uniformemente a 0

La convergenza appena definita in $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ permette di chiarire che cosa si intende per continuità riferita ad un'applicazione lineare

$$T : \boldsymbol{\mathcal{S}} \to \mathbb{C} \quad \text{t.c.} \quad \varphi \mapsto T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$$

<u>Definizione.</u>

Un'applicazione lineare $T : \boldsymbol{\mathcal{S}} \to \mathbb{C}$

è detta *continua su* $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ se:

$$\forall \left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ di } \boldsymbol{\mathcal{S}} \text{ t.c. } \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} 0 \text{ si ha}$$

$$T\left(\varphi_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{C}} 0$$

Se T è una distribuzione su $\mathcal{S}$

(cioè un'applicazione lineare e continua su $\mathcal{S}$ nel senso appena precisato)

diciamo che

T è una *distribuzione temperata*

e scriviamo $T \in \mathcal{S}'$

Esempio 28.

L'applicazione: $\delta : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$

definita da $$\delta\Big(\varphi(t)\Big) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

è una distribuzione temperata denominata

δ di Dirac

$$\delta \in \mathcal{S}'$$

Infatti:

- δ è lineare:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \text{vale:}$$

$$\delta\left(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\right) = \left(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\right)\left(0\right) =$$
$$= \alpha\varphi_1\left(0\right) + \beta\varphi_2\left(0\right) = \alpha\delta\left(\varphi_1\right) + \beta\delta\left(\varphi_2\right)$$

- δ è continua su $\mathcal{S}$:

$$\forall \left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ di } \mathcal{S} \text{ t.c. } \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} 0$$

$$\left(\text{cioè} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| t^m \varphi_n^{(k)}(t) \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall m,k \in \mathbb{N} \right)$$

vale :

$$\left|\delta\left(\varphi_n\right)\right| = \left|\varphi_n(0)\right| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\varphi_n(t)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(basta scegliere $m = k = 0$)

cioè $\delta\left(\varphi_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Esempio 28 bis.

A partire dalla distribuzione δ di Dirac, comunque fissato un $t_0 \in \mathbb{R}$ possiamo definire

$$\delta_{t_0}\left(\varphi(t)\right) = \varphi(t_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Le δ_{t_0} sono anch'esse distribuzioni temperate $\left(\delta_{t_0} \in \mathcal{S}'\right)$

Evidentemente $\delta = \delta_{t_0 = 0}$

Esempio 29.

Sia f una funzione $\mathcal{C}$-tratti e limitata.
Ad essa è possibile associare l'applicazione

$$T_f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$$

definita da

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

T_f è una distribuzione temperata

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Mostriamo innanzitutto che l’integrale scritto è convergente $\forall \varphi \in \mathcal{S}$

Poiché f è limitata: $\exists M > 0$ per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t)\varphi(t) \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) \right| \left| \varphi(t) \right| dt \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \varphi(t) \right| dt$$

Basta ora ricordare che ogni φ di $\mathcal{S}$ è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$

Mostriamo ora che:

- T_f è lineare:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \text{vale:}$$

$$T_f\left(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2\right)(t)\,dt =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_1(t)\,dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_2(t)\,dt =$$

$$= \alpha T_f\left(\varphi_1\right) + \beta T_f\left(\varphi_2\right)$$

- T_f è continua su $\mathcal{S}$:

$$\forall \left(\varphi_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ di } \mathcal{S} \text{ t.c. } \varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} 0$$

vale (f è limitata):

$$\left|T_f\left(\varphi_n\right)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right| \cdot \left|\varphi_n(t)\right| dt \le M \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_n(t)\right| dt$$

E' poi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_n(t)\right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_n(t)\right| \frac{1+t^2}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(1+t^2\right)\left|\varphi_n(t)\right|\right) \frac{1}{1+t^2}\, dt \leq$$

$$\leq \left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\left(1+t^2\right)\varphi_n(t)\right|\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

Ricordando che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\left[\arctan t\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \cancel{2}\,\frac{\pi}{\cancel{2}} = \pi$$

abbiamo che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_n(t)\right| dt \le \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\left(1+t^2\right)\varphi_n(t)\right| \right) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt}_{=\pi}$$

cosicché :

$$\left|T_f\left(\varphi_n\right)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)\varphi_n\left(t\right)dt\right| \leq$$

$$\leq M\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\varphi_n\left(t\right)\right|dt \;\leq$$

$$\leq M\pi\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\left(1+t^2\right)\varphi_n\left(t\right)\right|\right)$$

Ricordando che

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{S}} 0$$

$$\left(\text{cioè} \quad \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|t^m \varphi_n^{(k)}(t)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall m,k\in\mathbb{N}\right)$$

vale anche:

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\left(1+t^2\right)\varphi_n(t)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$(m=2,k=0)$$

Possiamo concludere che:

$$\left|T_f\left(\varphi_n\right)\right| \leq M\pi\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\left(1+t^2\right)\varphi_n\left(t\right)\right|\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

cioè

$$T_f\left(\varphi_n\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Quindi

$$T_f \in \mathcal{S}'$$

Poiché ad ogni funzione f $\mathcal{C}$-tratti e limitata è possibile associare la distribuzione $T_f \in \mathcal{S}'$, d'ora in poi potremo considerare, anche se impropriamente, ogni funzione $\mathcal{C}$-tratti e limitata come una distribuzione di $\mathcal{S}'$

Perciò scriveremo

$$f \in \mathcal{S}' \qquad \text{e}$$

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Esempio 30

La funzione, definita $\forall t \in \mathbb{R}$ da:

$$f(t) = \mathrm{rect}(t)$$

è $\mathcal{C}$-tratti e limitata; perciò scriveremo:

$$\mathrm{rect}(t) \in \mathcal{S}'$$

e, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\mathrm{rect}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \varphi(t)\,dt$$

Esempio 31

La funzione, definita $\forall t \in \mathbb{R}$ da:

$$f(t) = u(t)$$

è $\mathcal{C}$-tratti e limitata; perciò scriveremo:

$$u(t) \in \mathcal{S}'$$

e, per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\varphi(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

Altre funzioni $\mathcal{C}$-tratti a cui (si può dimostrare che) resta associata una distribuzione temperata sono:

- funzioni di tipo polinomiale

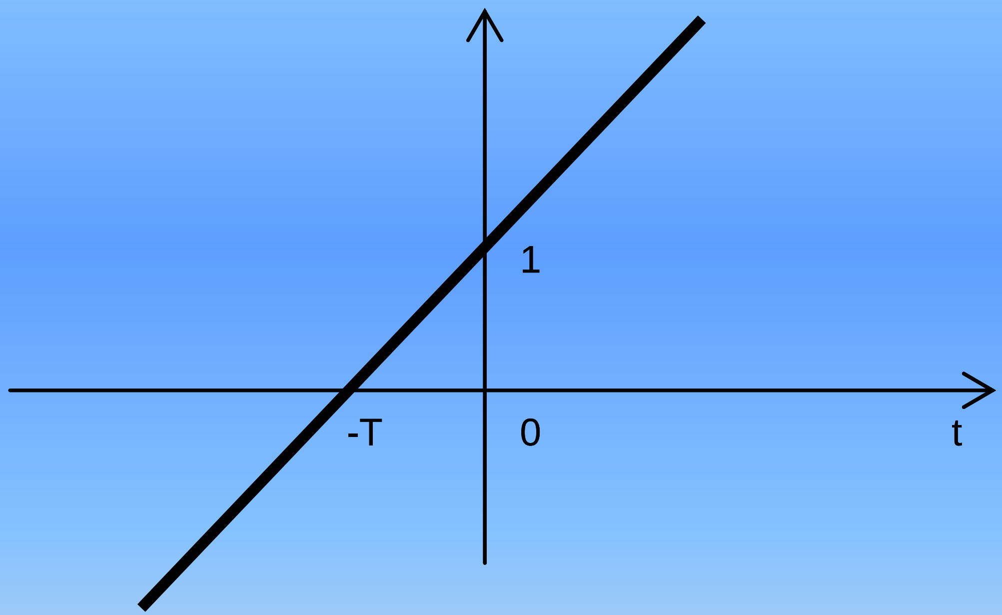
- funzioni dominate da funzioni polinomiali

L'espressione che le definisce è ancora

$$f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\,dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Esempio 32.

Sia $f(t)=\dfrac{t}{T}+1 \qquad (T>0)$



E' funzione di tipo polinomiale di grado 1;
è continua, non limitata.

$$f\left(t\right)=\frac{t}{T}+1 \qquad \left(T>0\right)$$

Ad essa resta associata la distribuzione temperata definita in $\mathcal{S}$ da:

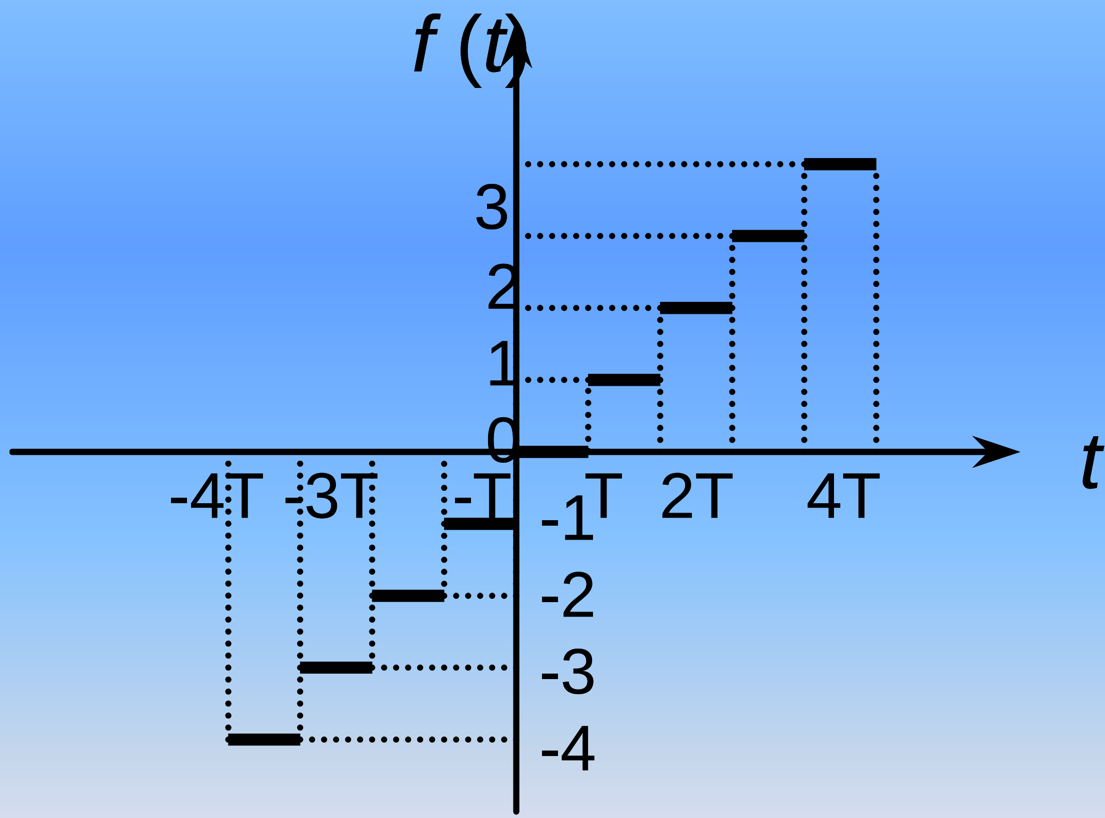
$$f\left(\varphi\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t}{T}+1\right)\varphi\left(t\right)dt \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}$$

Questa distribuzione è chiamata anch’essa

$$\frac{t}{T}+1 \qquad \Rightarrow\left(\frac{t}{T}+1\right)\in\mathcal{S}'$$

Esempio 33.

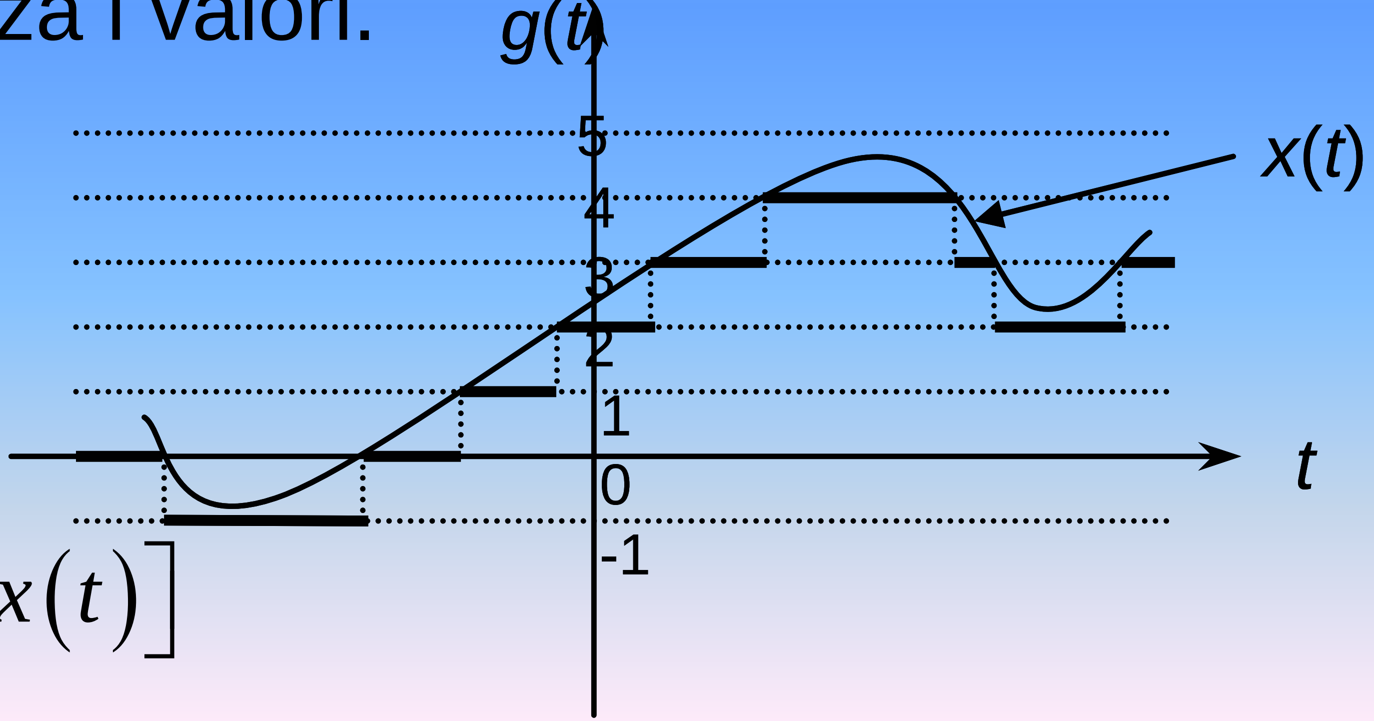
Sia $f(t) = \left[\dfrac{t}{T} \right] \qquad (T > 0)$



dove $\left[\dfrac{t}{T} \right]$ indica: il più grande intero minore o uguale a $\dfrac{t}{T}$

La funzione $f(t)=\left[\dfrac{t}{T}\right] \qquad (T>0)$

viene chiamata "*quantizzatore di passo T* " poiché quando se ne effettua la composizione con un segnale *x(t)*, ne discretizza i valori.



$$g(t)=\left[x(t)\right]$$

Poiché:

$$\frac{t}{T}-1<\left[\frac{t}{T}\right]\le\frac{t}{T}\qquad \forall t\in\mathbb{R}$$

anche ad essa resta associata una distribuzione temperata:

$$f(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{t}{T}\right]\varphi(t)\,dt\quad \forall\varphi\in\mathcal{S}$$

denominata ancora $\left[\frac{t}{T}\right] \Rightarrow \left[\frac{t}{T}\right]\in\mathcal{S}'$

Esempio 34.

Sia $f(t)=\dfrac{1}{t} \qquad t\in\mathbb{R},\ t\neq 0$

Non rientra fra i tipi elencati sopra.
Può comunque essere vista come una distribuzione di $\mathcal{S}'$ se si definisce la seguente *pseudofunzione*:

$$\left(\mathrm{pf}\,\frac{1}{t}\right)(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{1}{t}\varphi(t)\,dt \qquad \forall\varphi\in\mathcal{S}$$

spesso ancora indicata $\dfrac{1}{t}$

Poiché per le distribuzioni-funzione si continua ad utilizzare la “vecchia” scrittura di funzione, anche per la δ di Dirac viene adottata la notazione

$$\delta(t)$$

che la assimila ad una funzione.

Si può dimostrare che <u>non esiste</u> alcuna funzione intesa nel senso classico che possa generare la δ.

Proseguendo nell'<u>analogia formale</u> si adotta anche la *scrittura integrale*:

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}$$

dove "l'integrale" è definito dal secondo membro della seguente espressione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt \overset{def}{=} \varphi(0) \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}$$

1. La scrittura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$$

(che altro non è che la definizione stessa della δ)
viene spesso chiamata

proprietà campionatrice della δ

2. Se nella scrittura integrale precedente :

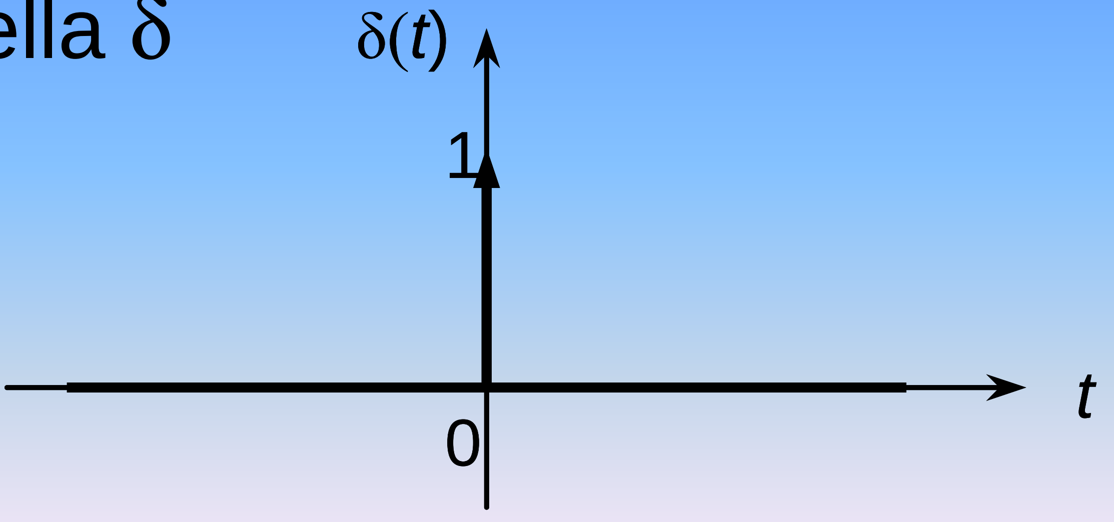
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

si pone $\varphi(t) = 1$ ($1 \notin \mathcal{S}$, ma appartiene comunque ad uno spazio test $\mathcal{T}$ su cui la δ è una distribuzione) si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

La scrittura integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$

viene letta come *proprietà di area* della δ (dicendo "*la* δ *ha area* 1").
Insieme con la proprietà campionatrice, giustifica la convenzionale rappresentazione grafica della δ



3. La notazione tipo funzione adottata per la δ di Dirac:

$$\delta(t)$$

suggerisce di denotare le distribuzioni $\delta_{t_0}\ (t_0 \in \mathbb{R})$ con la scrittura

$$\delta(t - t_0)$$

come si trattasse di usuali traslazioni (*proprietà di traslazione* della δ).

In tal caso la scrittura integrale delle δ_{t_0} diventa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t)\,dt = \varphi(t_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

giustificata formalmente da :

$$\delta_{t_0}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t)\,dt \underset{t-t_0=u}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)\varphi(u+t_0)\,du = \varphi(0+t_0) = \varphi(t_0)$$

4. Se $a \neq 0$ si definisce:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

(*cambiamento di scala*)

ovvero:

$$\delta(at)(\varphi) = \frac{1}{|a|}\delta(t)(\varphi) = \frac{1}{|a|}\varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

In particolare, se $a = -1$,

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

("la δ è *pari*")

In tal caso la giustificazione formale è:

$$\delta(at)(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(at)\varphi(t)\,dt \underset{at=u \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{a}du}{=}$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)\varphi\left(\frac{u}{a}\right)\frac{1}{|a|}du =$$

$$= \frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

5. Se $\psi(t)$ è una funzione opportuna, allora:

$$\psi(t)\delta(t-t_o)=\psi(t_o)\delta(t-t_o)$$

(*proprietà del prodotto*).

In particolare:

- se $\psi(t)=t$ risulta $t\delta(t)=0$
- se $\psi(t)=e^{j\alpha t}$ risulta $e^{j\alpha t}\delta(t)=\delta(t)$

La giustificazione formale: $\forall \varphi \in \mathcal{S}$

$$\psi(t)\delta(t-t_o)(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi(t)\delta(t-t_o)\right)\varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_o)\left(\psi(t)\varphi(t)\right)dt =$$

$$= \psi(t_0)\varphi(t_0) =$$

$$= \psi(t_0)\delta(t-t_o)(\varphi)$$

DERIVATA DEBOLE
(o DISTRIBUZIONALE)

Sia $T \in \mathcal{S}'$.

Si definisce *derivata debole* o *derivata distribuzionale* di *T*, e si indica con DT :

$$\left(DT\right)\left(\varphi\right) = -T\left(\varphi'\right) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

(Si dimostra che) anche $DT \in \mathcal{S}'$

Poiché le funzioni di $\mathcal{S}$ sono derivabili infinite volte, possiamo anche definire:

$$\left(D^2T\right)(\varphi) = T\left(\varphi''\right) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{S}$$

essendo :

$$\left(D^2T\right)(\varphi) = \left(D\left(DT\right)\right)(\varphi) = -\left(DT\right)(\varphi') =$$

$$= -\left(-T\right)\left(\varphi''\right) = T\left(\varphi''\right)$$

Più in generale:

le distribuzioni temperate sono derivabili nel senso delle distribuzioni tutte le volte che si vuole e vale:

se $T \in \boldsymbol{\mathcal{S}}'$

$$\left(D^n T\right)(\varphi) = (-1)^n \, T\left(\varphi^{(n)}\right) \qquad \forall \varphi \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Esempio 35.

Abbiamo già visto (Esempio 31) che il segnale $u(t)$ può essere visto come una distribuzione di $\mathcal{S}$'.

Come funzione ammette derivata

$$u'(t) = 0 \qquad \forall t \neq 0$$

Come distribuzione ammette derivata debole $Du \in \mathcal{S}'$ definita da:

$$Du(\varphi) = -u(\varphi') \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Poiché $\forall \varphi \in \mathcal{S}$:

$$(Du)(\varphi) = -u(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\varphi'(t)\,dt =$$

$$= -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(t)\,dt = -\left[\varphi(t)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} =$$

$$= \varphi(0) - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \varphi(t)}_{=0} = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

(si ricordi che se $\varphi \in \mathcal{S}$ allora $\varphi(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$)

è:

$$Du = \delta \quad \text{in} \quad \mathcal{S}'$$

Osserviamo ora che:
se f è una funzione $\mathcal{C}^1$-tratti , la f' è almeno $\mathcal{C}$-tratti .
Si può dimostrare che, se

sia a f sia a f' resta associata una distribuzione di $\mathcal{S}$' allora vale:

$$DT_f = T_{f'} + \sum_i s_f\left(t_i\right)\delta_{t_i} \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

$$DT_f = T_{f'} + \sum_i s_f(t_i)\delta_{t_i} \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

o, con notazioni di tipo funzione,

$$Df = f' + \sum_i s_f(t_i)\delta(t - t_i) \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

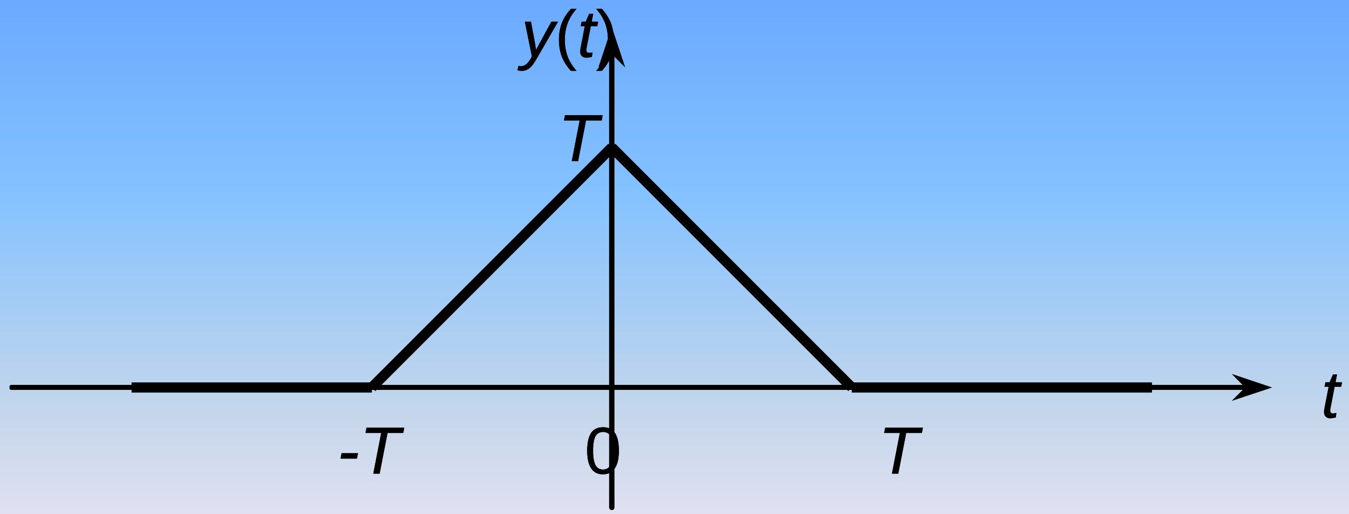
dove:

- t_i sono i punti di salto di $f(t)$
- $s_f(t_i)$ sono i relativi salti.

Esempio 36.

Consideriamo il segnale

$$y(t) = T\,\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad (T > 0)$$



E’ continuo e limitato; non è derivabile in senso classico nei punti

$$t = -T\,,\; t = 0,\; t = T$$

$$y'(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad |t| > T \\ 1 & \text{per} \quad -T < t < 0 \\ -1 & \text{per} \quad 0 < t < T \end{cases}$$

$y'(t)$ è $\mathcal{C}$-tratti e limitata.

Sia $y(t)$ che $y'(t)$ possono dunque essere identificate con le omonime distribuzioni di $\mathcal{S}'$

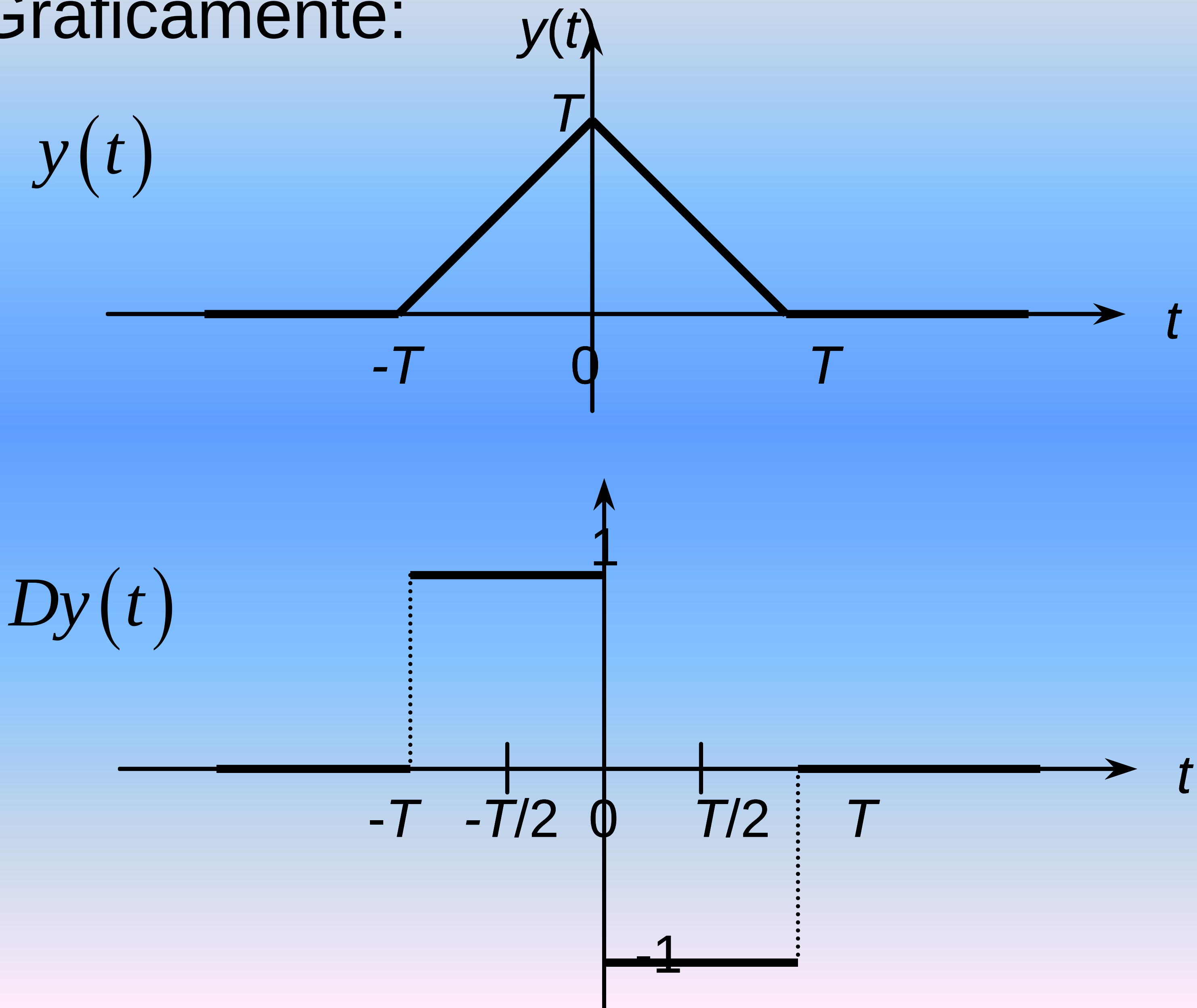
Poiché $y(t)$ non ha salti, la relazione

$$Df = f' + \sum_i s_f(t_i)\,\delta(t - t_i) \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

in questo caso diventa:

$$Dy = y' \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

Graficamente:



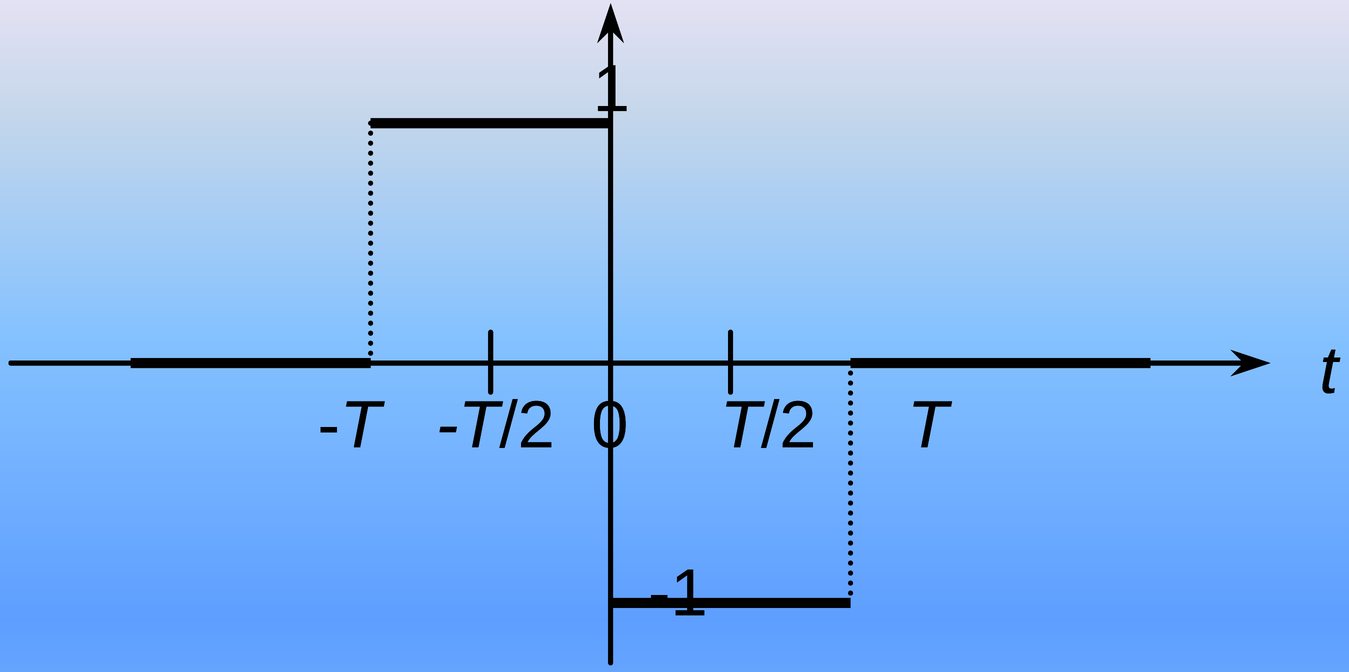
Analiticamente:

$$D\left(T\,\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right)\right)=$$

$$=\mathrm{rect}\left(\frac{t+T/2}{T}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

in $\mathcal{S}$'

(cioè viste come distribuzioni di $\mathcal{S}$').



$y'(t)$, $\mathcal{C}$-tratti e limitata, è discontinua nei punti $t=-T$, $t=0$, $t=T$

I salti in tali punti valgono

$$s_{y'}(-T)=1,\;\; s_{y'}(0)=-2,\;\; s_{y'}(T)=1$$

Negli intervalli in cui esiste, $y''(t) = 0$

Ne segue:

$$D^2 y = Dy' = y'' + \sum_i s_{y'}(t_i)\,\delta(t - t_i) =$$

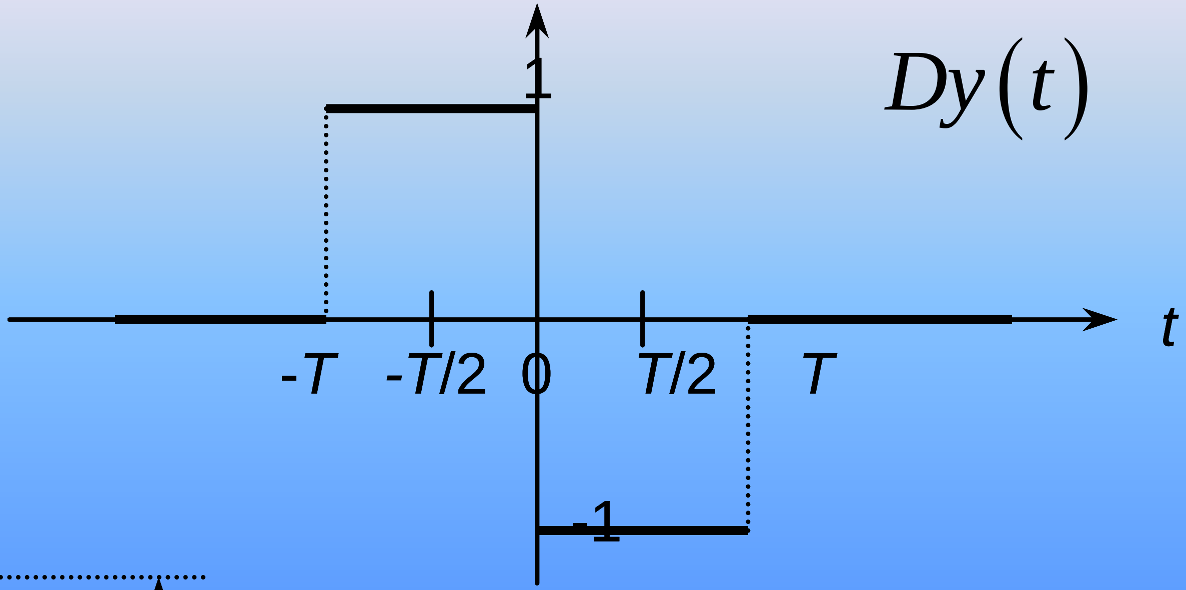
$$= 0 + 1\delta(t - (-T)) - 2\delta(t - 0) + 1\delta(t - T) =$$

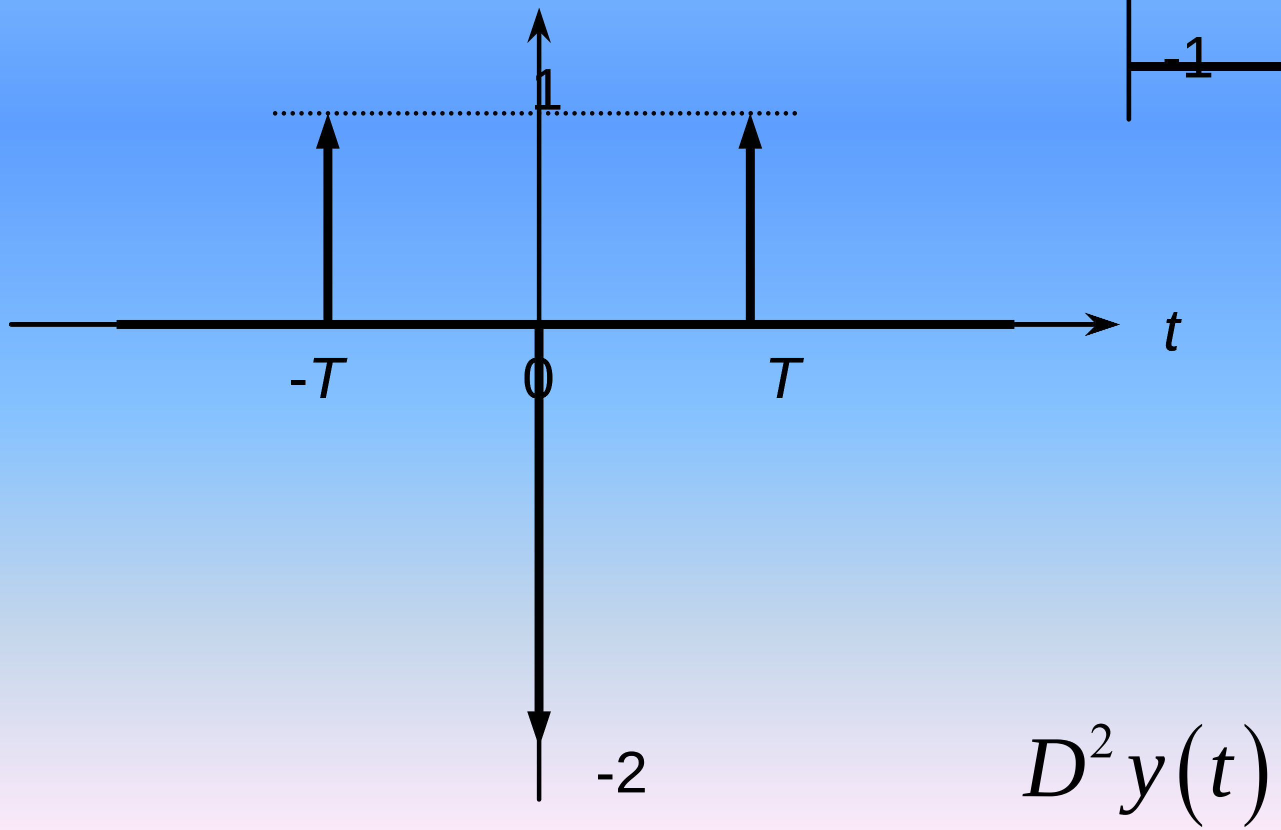
$$= \delta(t + T) - 2\delta(t) + \delta(t - T)$$

Riassumendo:

$$D^2 y = \delta(t + T) - 2\delta(t) + \delta(t - T) \;\text{ in } \mathcal{S}'$$

Graficamente:

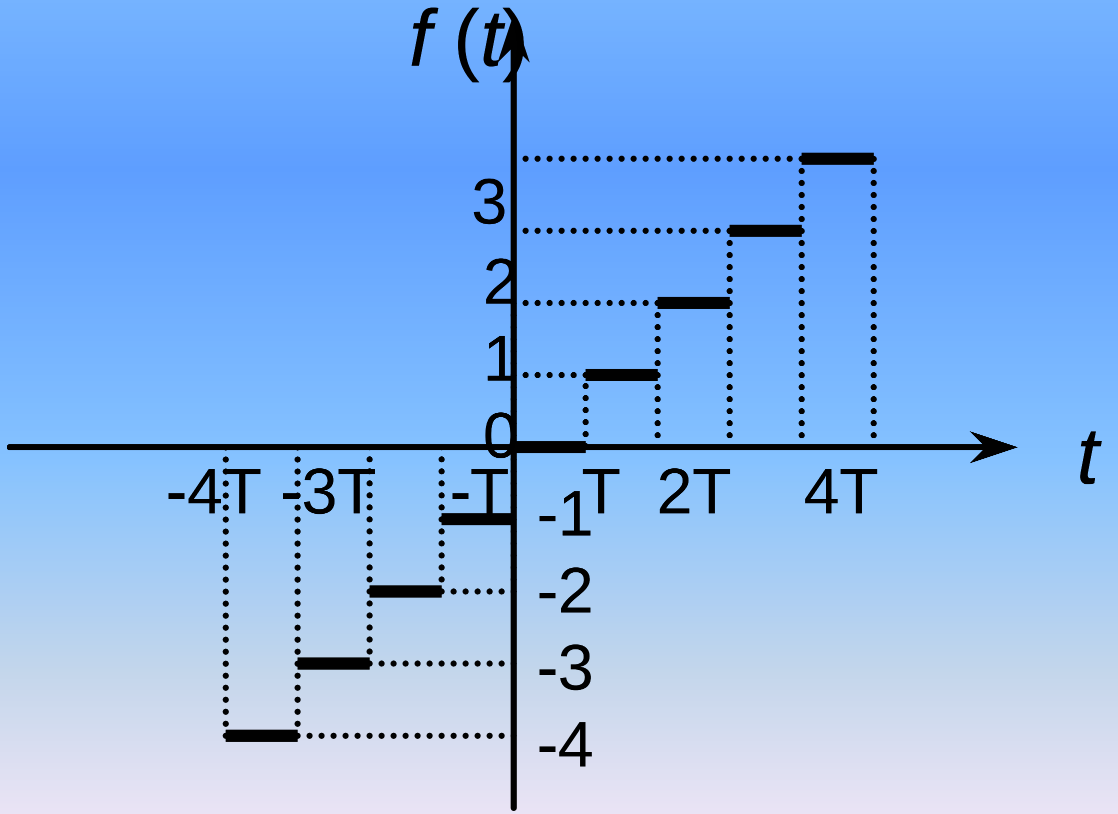




Esempio 37.

Consideriamo il segnale $f(t) = \left[\frac{t}{T} \right]$

$(T > 0)$



Abbiamo già visto (Esempio 33) che tale funzione può essere identificata con l'omonima distribuzione di $\mathcal{S}$'.

E' $\mathcal{C}$-tratti e discontinua in tutti i punti $mT,\ m \in \mathbb{Z}$. I salti in tali punti valgono 1

Negli intervalli in cui esiste, $f'(t) = 0$

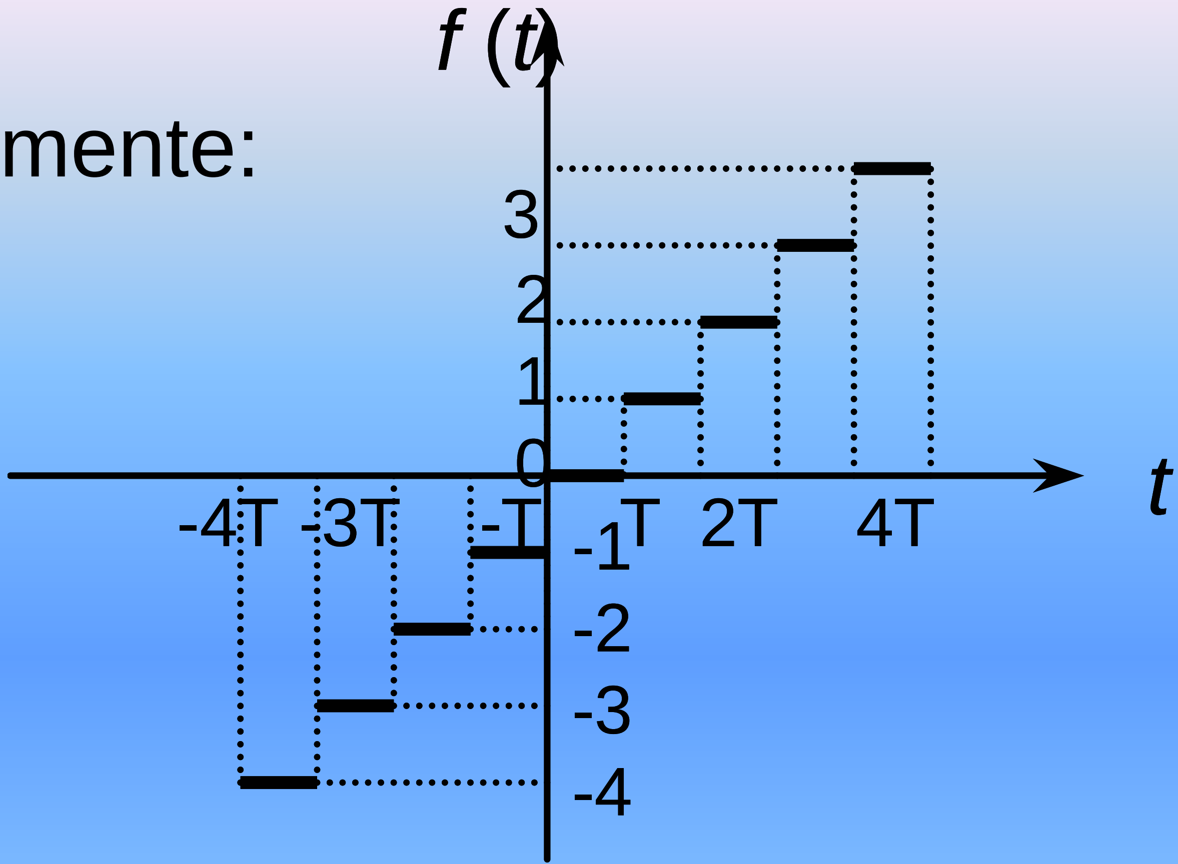
Ne segue:

$$Df = f' + \sum_i s_f(t_i)\,\delta(t - t_i) =$$

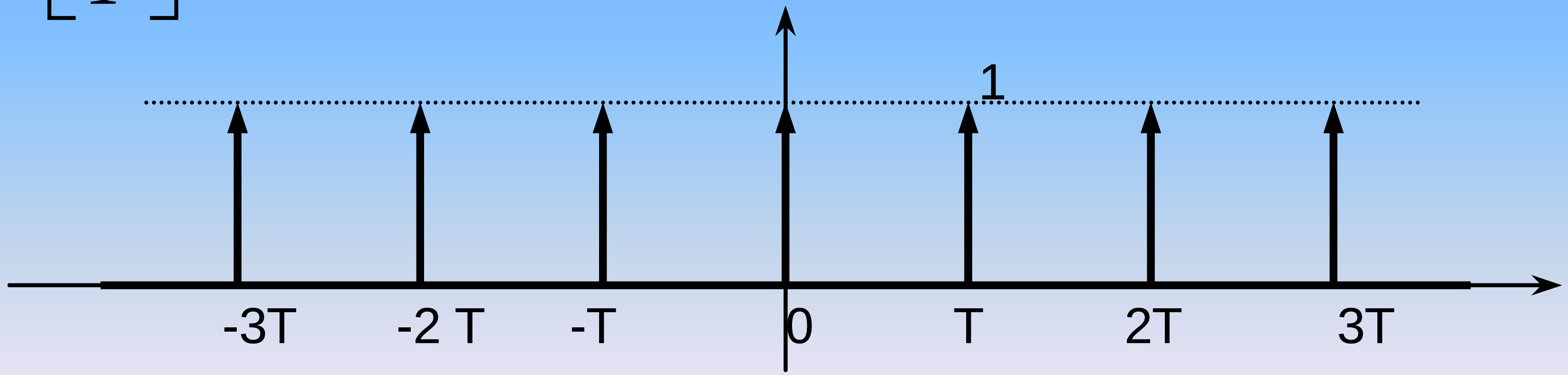
$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta(t - mT)$$

Graficamente:

$$\left[\frac{t}{T}\right]$$



$$D\left[\frac{t}{T}\right]$$



Analiticamente:

$$D\left(\left[\frac{t}{T}\right]\right)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta(t-mT) \qquad \text{in } \mathcal{S}'$$

La distribuzione di $\mathcal{S}'$:

$$\Lambda(t)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta(t-mT)$$

è detta “ *pettine di Dirac di passo T* ”

Valutiamo ora il prodotto tra un opportuno segnale $\psi(t)$ ed il pettine di Dirac.
Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\left(\psi(t)\Lambda\right)\left(\varphi(t)\right) = \Lambda\left(\psi(t)\varphi(t)\right) =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta(t - mT)\left(\psi(t)\varphi(t)\right) =$$

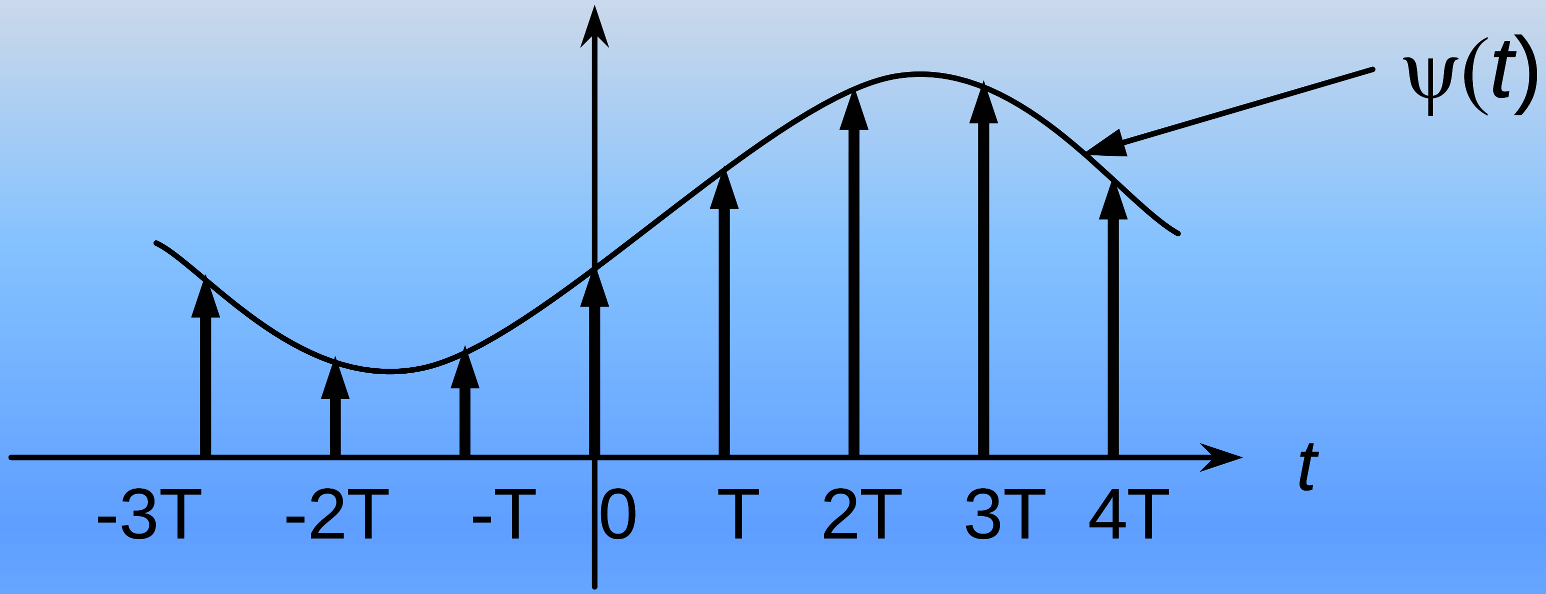
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\psi(mT)\varphi(mT)\right) =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi(mT)\delta(t - mT)\varphi(t)$$

Riassumendo:

$$\psi(t)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta(t-mT)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\psi(mT)\delta(t-mT)$$

Cioè
il prodotto tra un segnale $\psi(t)$ ed il pettine di Dirac produce un pettine (con denti irregolari) in cui l'altezza della freccia corrispondente a mT è uguale a $\psi(mT)$.



$$\psi(t)\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta(t-mT)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\psi(mT)\delta(t-mT)$$

Per tale motivo il pettine di Dirac è detto anche *distribuzione campionatrice.*