TRASFORMATA DI FOURIER DI DISTRIBUZIONI

Tutte le proprietà viste per la trasformata di Fourier sono applicabili alle funzioni dello spazio $\mathcal{S}$.

Questo permette di trasferire le stesse proprietà alle distribuzioni di $\mathcal{S}$' e quindi, in particolare, ai segnali che possono essere visti come distribuzioni di $\mathcal{S}$'.

Ricordiamo che ogni φ di $\mathcal{S}$ è assolutamente integrabile in s.g. su $\mathbb{R}$ e dunque ha trasformata di Fourier:

$$\Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft}\varphi(t)\,dt \qquad \forall f \in \mathbb{R}$$

Per φ e per la sua trasformata Φ valgono ovviamente tutte le proprietà elementari viste in precedenza (linearità, traslazione in *t* e in *f*, cambiamento scala). Inoltre:

se $\varphi \in \mathcal{S}$ e $\varphi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi(f)$

ricordando che se $\varphi \in \mathcal{S}$ anche $(t\,\varphi) \in \mathcal{S}$ (e dunque $(t\,\varphi)$ è F trasformabile) vale:

$$t\,\varphi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\Phi(f)$$

(derivata della trasformata)

$$\varphi \in \mathcal{S} \quad \text{e} \quad \varphi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi(f)$$

ricordando che, se $\varphi \in \mathcal{S}$:

- φ è derivabile, e $\varphi' \in \mathcal{S}$ (e dunque φ' è F trasformabile)
- $\varphi(t) \to 0$ per $t \to \pm\infty$

vale: $$\varphi'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi f\,\Phi(f)$$

(trasformata della derivata)

Poiché si dimostra che, se $\varphi \in \mathcal{S}$

e $\varphi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi(f)$

anche $\Phi \in \mathcal{S}$ e vale:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} \Phi(f)\, df$$

allora anche il segnale $\Phi(t)$ è F trasformabile e vale:

$$\Phi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \varphi(-f)$$

(dualità)

Sia ora $T \in \mathcal{S}'$.

Si definisce *trasformata di Fourier* di *T* e si indica con $\mathcal{F}T$:

$$\left(\mathcal{F}T\right)\left(\varphi\right) = T\left(\Phi\right) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

dove $\Phi \in \mathcal{S}$ e

$$\Phi\left(f \right) = \left(\mathcal{F}\varphi\right)\left(f \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} \varphi\left(t\right) dt$$

(Si dimostra che) anche $\left(\mathcal{F}T\right) \in \mathcal{S}'$

<u>Esempio 38</u>.

Consideriamo la distribuzione $\delta \in \mathcal{S}'$
Per determinarne la trasformata di Fourier applichiamo la definizione appena data:

$\forall \varphi \in \mathcal{S}$

$$\left(\mathcal{F}\delta\right)\left(\varphi\right) = \delta\left(\Phi\right)$$

Per definizione di δ :

$$\delta\left(\Phi\right) = \Phi\left(0\right)$$

con

$$\Phi(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\cdot 0\cdot t}\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} 1\varphi(t)\,dt$$

Poiché l'ultimo integrale può essere interpretato come l'espressione che definisce la distribuzione di $\mathcal{S}'$ associata alla funzione costante 1, otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1\varphi(t)\,dt=1(\varphi)$$

Riassumendo: $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ vale

$$\left(\mathcal{F}\delta\right)\left(\varphi\right) = \delta\left(\Phi\right) = \Phi\left(0\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\cdot 0\cdot t}\varphi\left(t\right)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1\varphi\left(t\right)dt = 1\left(\varphi\right)$$

e ciò significa che

$$\mathcal{F}\delta = 1 \qquad \text{in } \mathcal{S}'$$

La definizione di trasformata di Fourier che abbiamo dato per le distribuzioni *T* di $\mathcal{S}$':

$$\left(\mathcal{F}T\right)\left(\varphi\right)=T\left(\Phi\right) \qquad \forall\varphi\in\mathcal{S}$$

$$\text{con}\quad \varphi\left(t\right)\xrightarrow{\mathcal{F}}\Phi\left(f\right)$$

permette di trasferire ad $\mathcal{S}$' tutte le buone proprietà valide per la trasformata di Fourier nello spazio $\mathcal{S}$ attraverso un opportuno "calcolo simbolico".

Per esempio:
se $T \in \mathcal{S}'$ allora:

- $T(t - t_o) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_o} \mathcal{F}T$ (traslaz. in *t*)
- $e^{j2\pi f_o t}\, T \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathcal{F}T)(f - f_o)$ (variaz. *f*)
- $T(\alpha t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1}{|\alpha|}(\mathcal{F}T)\left(\dfrac{f}{\alpha}\right)$ (c. scala)

ed anche: $T \in \mathcal{S}'$

- $tT \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{j}{2\pi} D(\mathcal{F}T)$ (deriv. trasf.)
- $DT \xrightarrow{\mathcal{F}} j2\pi f(\mathcal{F}T)$ (trasf. deriv.)
- $(\mathcal{F}T) \xrightarrow{\mathcal{F}} T(-f)$ (dualità)

dove la derivata è da intendersi nel senso delle distribuzioni.

Esempio 38bis.

Si è visto che: $\mathcal{F}\delta = 1 \quad \text{in } \mathcal{S}'$

Applicando alcune delle proprietà appena viste, si ottengono i seguenti risultati:

- $1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(-f) = \delta(f)$ (dualità)
- $\delta(t - t_o) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f t_o} 1 = e^{-j2\pi f t_o}$ (traslaz. in *t*)
- $e^{j2\pi f_o t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f - f_o)$ (variaz. *f*)

Esempio 39.

Consideriamo il segnale

$$x(t) = \cos(2\pi f_o t) \qquad (f_0 \in \mathbb{R})$$

Tale segnale (continuo e limitato) non è trasformabile nel senso delle funzioni, ma lo è se lo vediamo come distribuzione di $\mathcal{S}$'.

Per determinarne la trasformata di Fourier ricordiamo la formula di Eulero:

$$\cos\left(2\pi f_o t\right) = \frac{e^{j2\pi f_o t} + e^{-j2\pi f_o t}}{2}$$

Per le proprietà di linearità e di variazione di fase otteniamo:

$$\cos\left(2\pi f_o t\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\Big(\delta\left(f - f_o\right) + \delta\left(f + f_o\right)\Big)$$

Una distribuzione di $\mathcal{S}'$ la cui trasformata di Fourier è molto importante per le successive applicazioni è

$$\mathrm{pf}\,\frac{1}{t}$$

che, come abbiamo visto, può essere associata, se intesa nel modo opportuno, alla funzione $\frac{1}{t}$

Si può dimostrare che:

$$\left(\mathrm{pf}\,\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\pi j\,\mathrm{sgn}(f)$$

o, scritto impropriamente,

$$\frac{1}{t} \xrightarrow{\mathcal{F}} -\pi j\,\mathrm{sgn}(f)$$

Da questa trasformata se ne possono ottenere alcune altre.
Per esempio, per dualità, da:

$$\frac{1}{t} \xrightarrow{\mathcal{F}} -\pi j \operatorname{sgn}(f)$$

$$-\pi j \operatorname{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{-f}$$

ovvero

$$\operatorname{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi j f}$$

Esempio 40.

Consideriamo il segnale $u(t)$

Tale segnale non è trasformabile nel senso delle funzioni, ma lo è se lo vediamo come distribuzione di $\mathcal{S}'$.

Per determinarne la trasformata di Fourier osserviamo che:

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}(t) + 1\right)$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sgn}(t) + 1\right)$$

dunque, tenendo conto che

$$\operatorname{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\pi j f}$$

otteniamo:

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi j f} + \delta(f)\right)$$

Esempio 41.

Consideriamo il pettine di Dirac di passo $T > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

Possiamo vederla come periodicizzazione della δ di Dirac; ; applicando la prima formula di Poisson otteniamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$$

Se ora applichiamo la trasformata di Fourier:

$$1 \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

dalla

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

otteniamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

Dunque:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T} \right)$$

cioè:
la trasformata di Fourier di un pettine di Dirac (di passo T nei tempi) è ancora un pettine di Dirac (di passo $\frac{1}{T}$ in frequenza)

(*PRODOTTO DI*) *CONVOLUZIONE*

Siano *x*(*t*) e *y*(*t*) due segnali definiti in $\mathbb{R}$.
Si definisce (*prodotto di*) *convoluzione* di *x* con *y*

$$(x*y)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$$

per i $t\in\mathbb{R}$ per cui tale integrale converge.
Spesso, invece di $(x*y)(t)$ si scrive $x(t)*y(t)$

1. Se la convoluzione è definita allora è commutativa, cioè

$$(x * y)(t) = (y * x)(t)$$

Infatti:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \underset{\substack{t-\tau=u \\ d\tau=-du}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y(u)\, x(t-u)\, du = (y * x)(t)$$

2. *Proprietà regolarizzante*.

Siano $x(t)$ e $y(t)$ due segnali $\mathcal{C}$-tratti e sia $y(t)$ a durata limitata.

Allora la convoluzione: $(x * y)(t)$

è definita e continua per ogni $t \in \mathbb{R}$

2bis. *Proprietà regolarizzante*.

Caso particolare.

Sia *x*(*t*) segnale $\mathcal{C}$-tratti e sia

$$y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad (T > 0)$$

Allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) * \mathrm{rect}(t/T) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\, d\tau$$

Infatti: $y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

è $\mathcal{C}$-tratti, e a durata limitata.

Vale:

$$x(t) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) d\tau =$$

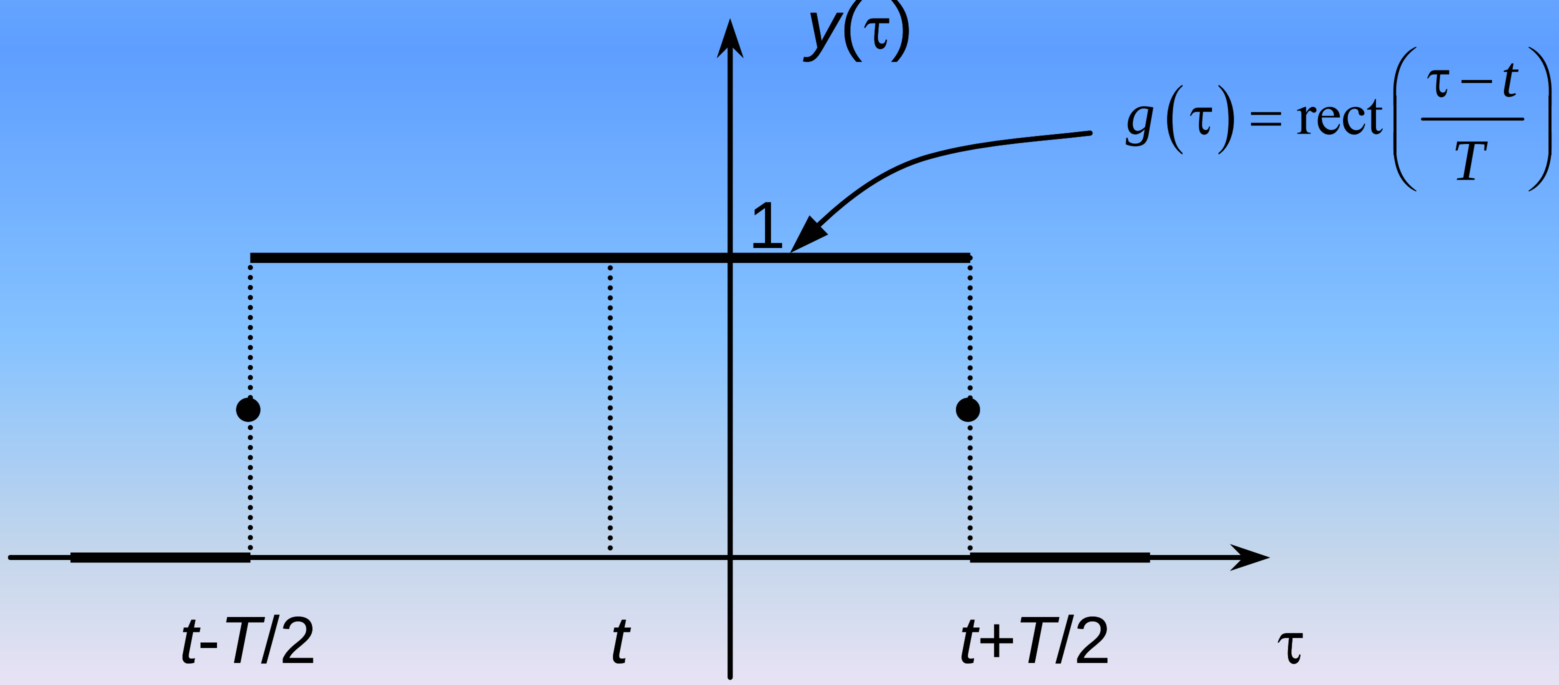
(rect è *pari*)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\mathrm{rect}\left(\frac{\tau-t}{T}\right) d\tau$$

Poiché la funzione

$$g(\tau) = \mathrm{rect}\left(\frac{\tau - t}{T}\right)$$ è come in figura

(la base è centrata in *t* e lunga *T*),



otteniamo:

$$x(t) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,\mathrm{rect}\left(\frac{\tau - t}{T}\right) d\tau =$$

$$= \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\, d\tau$$

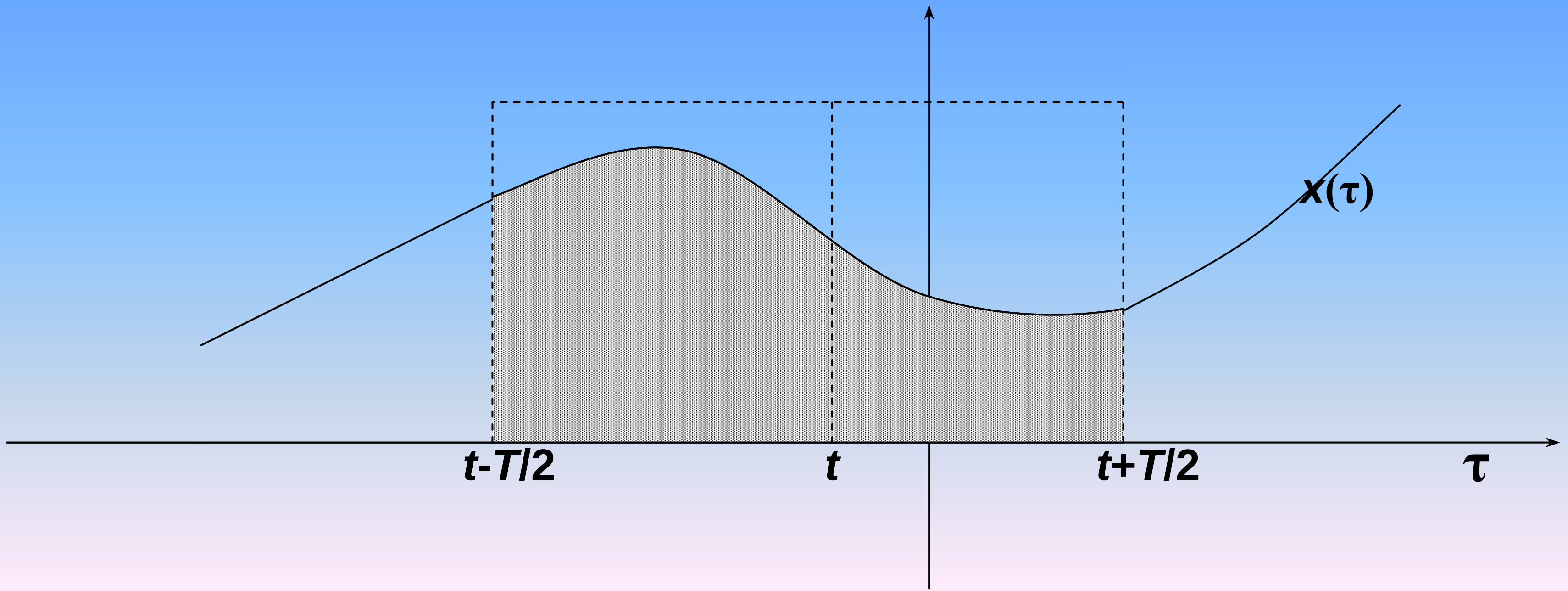
Si osservi che:

$x(t) * \mathrm{rect}(t/T)$ è continua,

poiché è funzione integrale di $x(\tau)$ che è $\mathcal{C}$-tratti

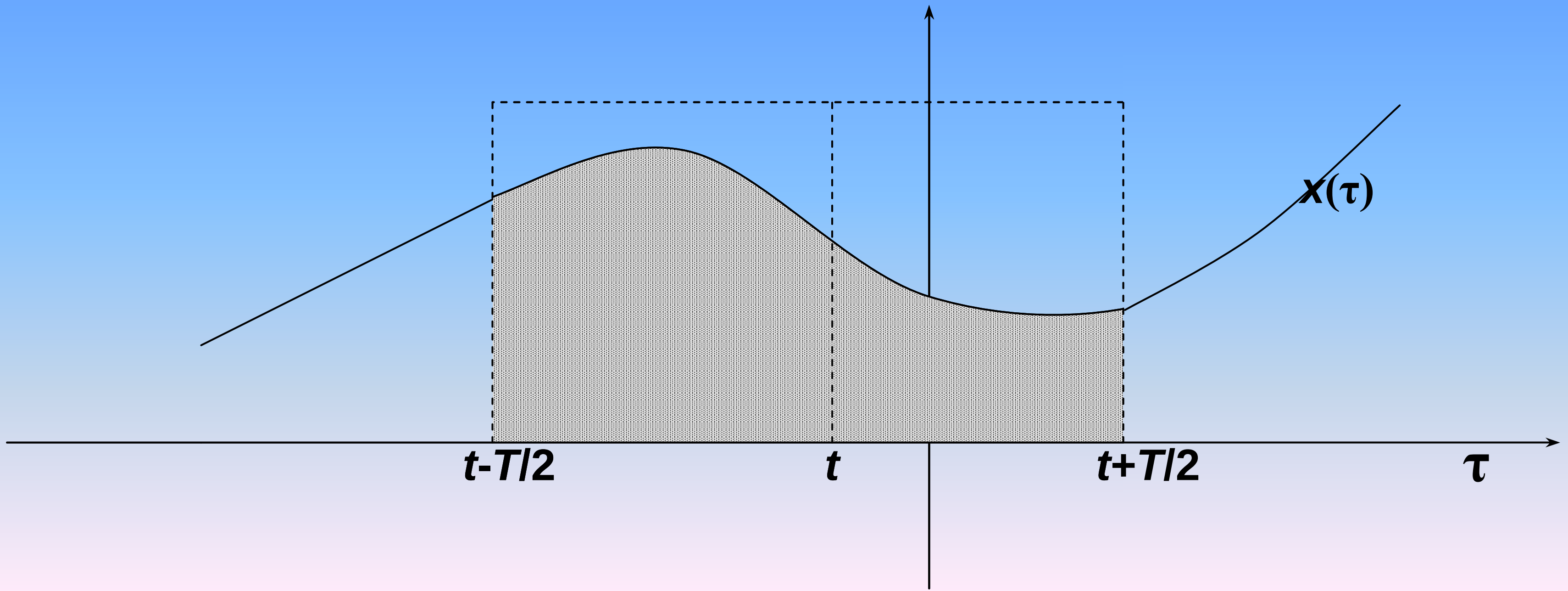
$$x(t) * \mathrm{rect}(t/T) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\, d\tau$$

Se $x(t) > 0$
la convoluzione $x(t) * \mathrm{rect}(t/T)$ è l'area sottesa dalla porzione del grafico di $x(\tau)$ "vista" attraverso il $\mathrm{rect}((\tau - t)/T)$



$$x(t) * \mathrm{rect}(t/T) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(\tau)\, d\tau$$

Far variare t in $\mathbb{R}$ è come “far scorrere” il rettangolo sull’asse orizzontale.



Esempio 42.

Calcoliamo la convoluzione di un rettangolo con se stesso:

$$h(t) = \mathrm{rect}(t/T) * \mathrm{rect}(t/T)$$

Per quanto appena visto:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} \mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) d\tau$$

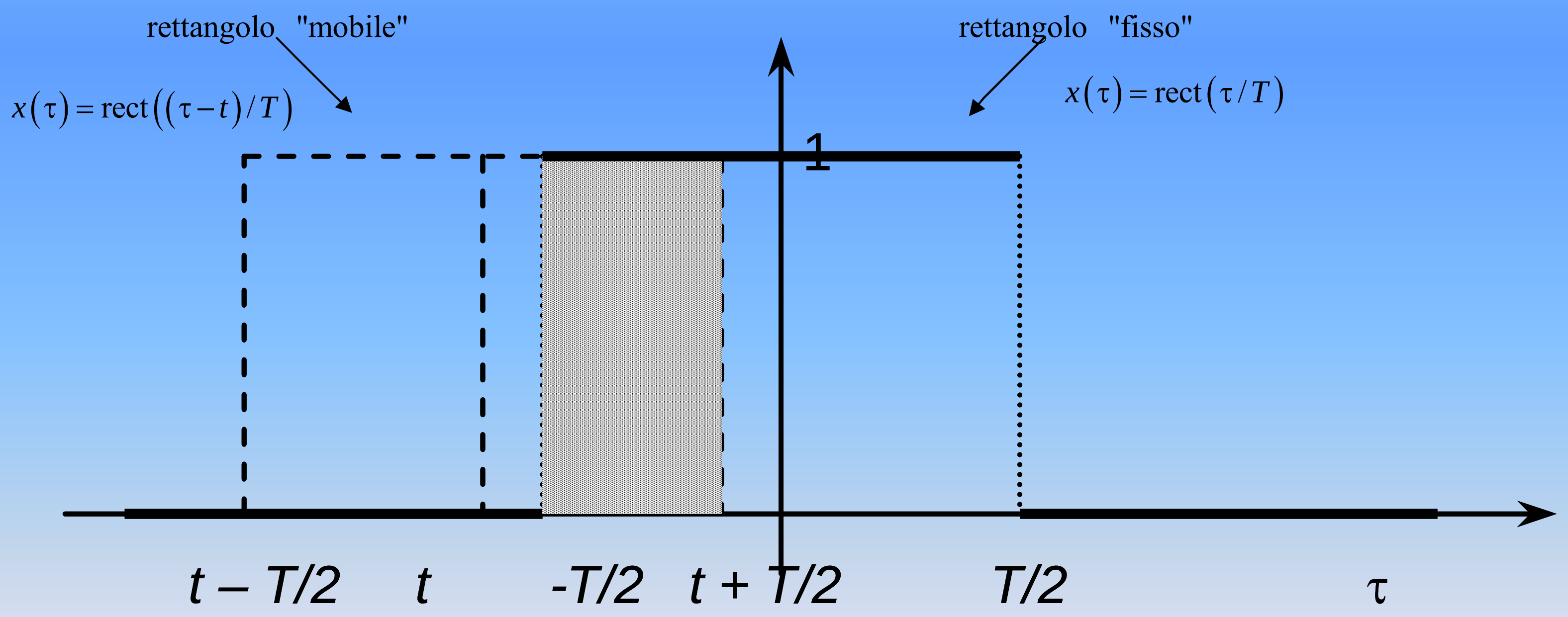
$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right)\overbrace{\mathrm{rect}\left(\frac{\tau-t}{T}\right)}^{**}d\tau$$

Per calcolarlo possiamo immaginare che il rettangolo “mobile” con base centrata in *t* ed lunga *T* determinato da

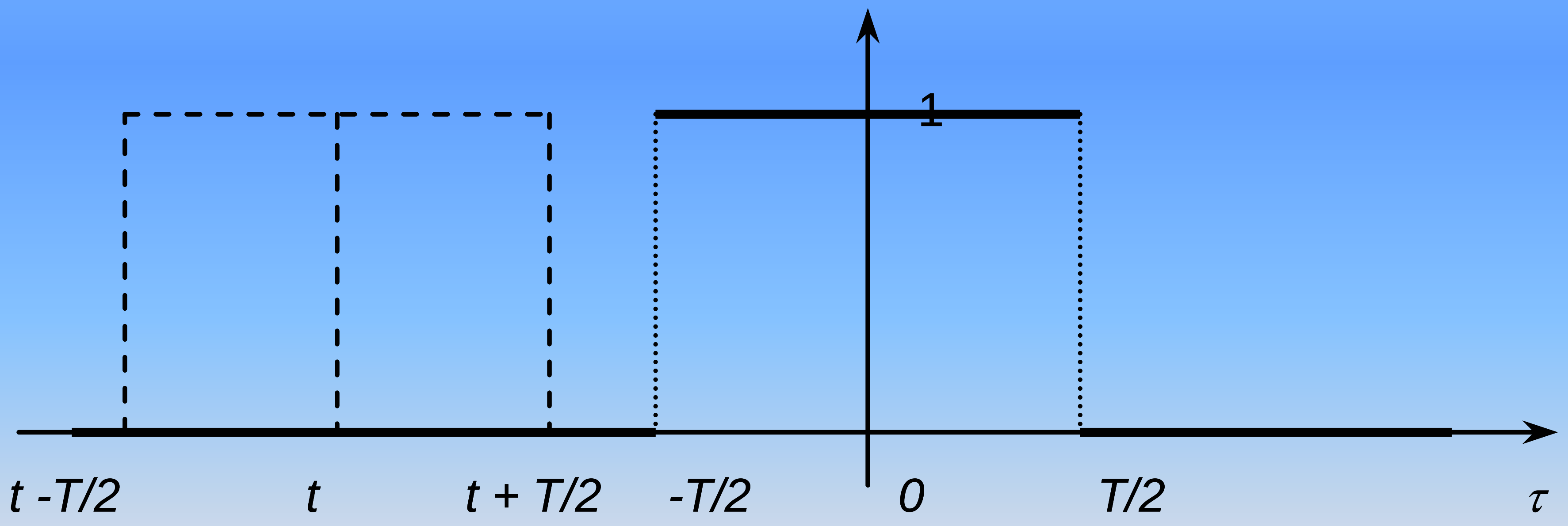
$$\mathrm{rect}\left(\frac{\tau-t}{T}\right)$$

scorra sull’asse orizzontale τ

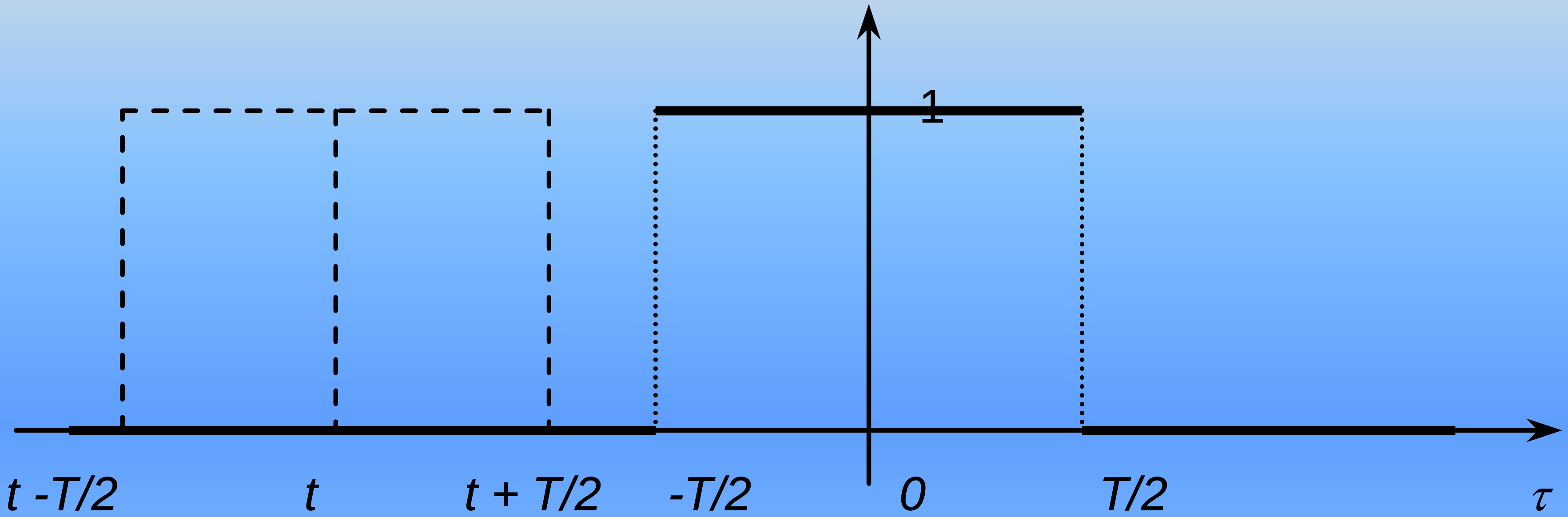
il valore della convoluzione corrisponde alla porzione di area intercettata dal rettangolo “mobile” sul rettangolo “fisso” determinato da $x(\tau) = \mathrm{rect}(\tau / T)$



a) Se $t + T/2 \leq -T/2$
(ovvero $t \leq -T$) il rettangolo mobile è esterno a quello fisso:



$$t \le -T$$

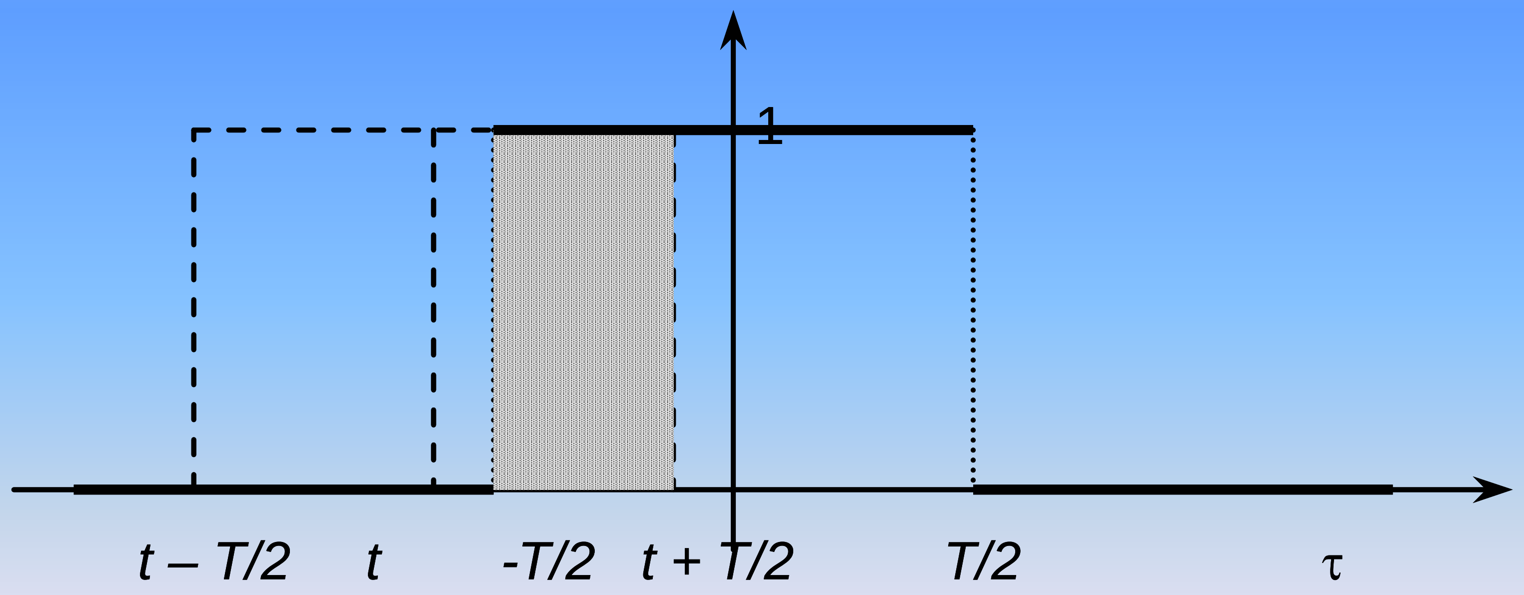


L'area intercettata dal rettangolo "mobile" su quello fisso è nulla, quindi

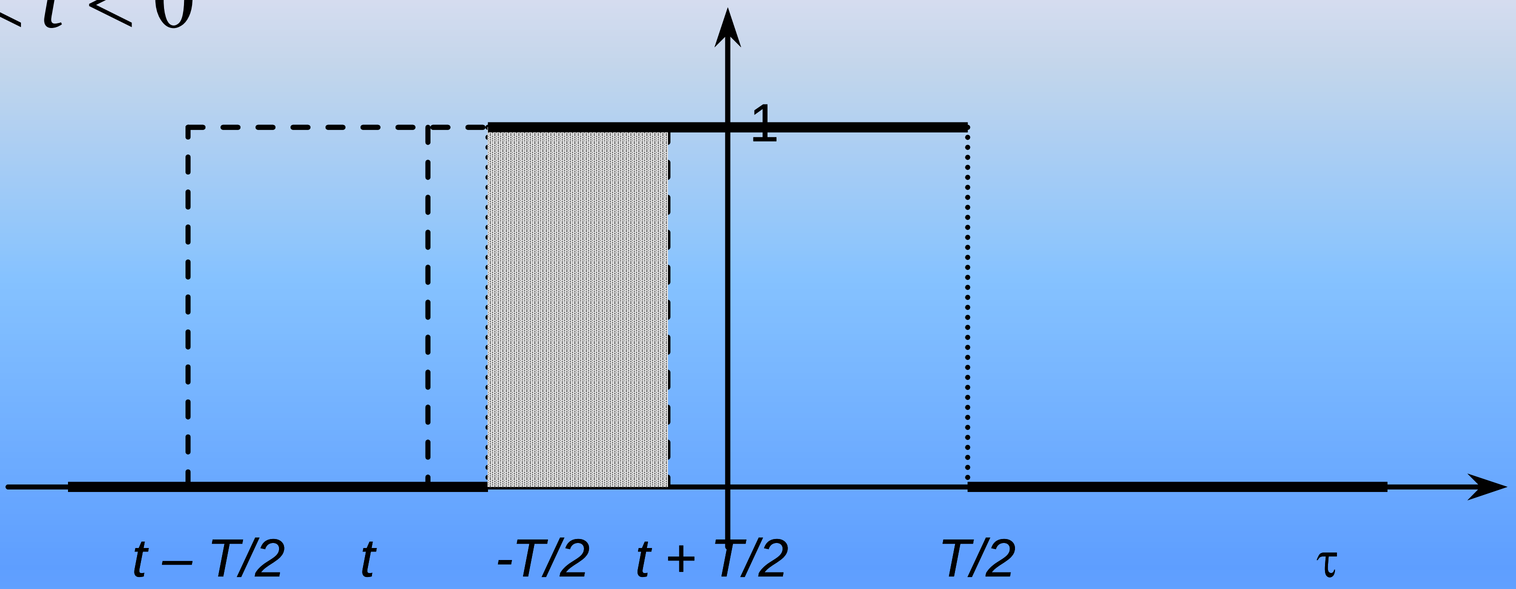
$$h(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \le -T$$

b) Se $$-\frac{T}{2} < t + \frac{T}{2} < \frac{T}{2}$$

(ovvero $-T < t < 0$) il rettangolo mobile comincia a sovrapporsi a quello fisso:



$$-T < t < 0$$



L’area intercettata (ombreggiata) misura

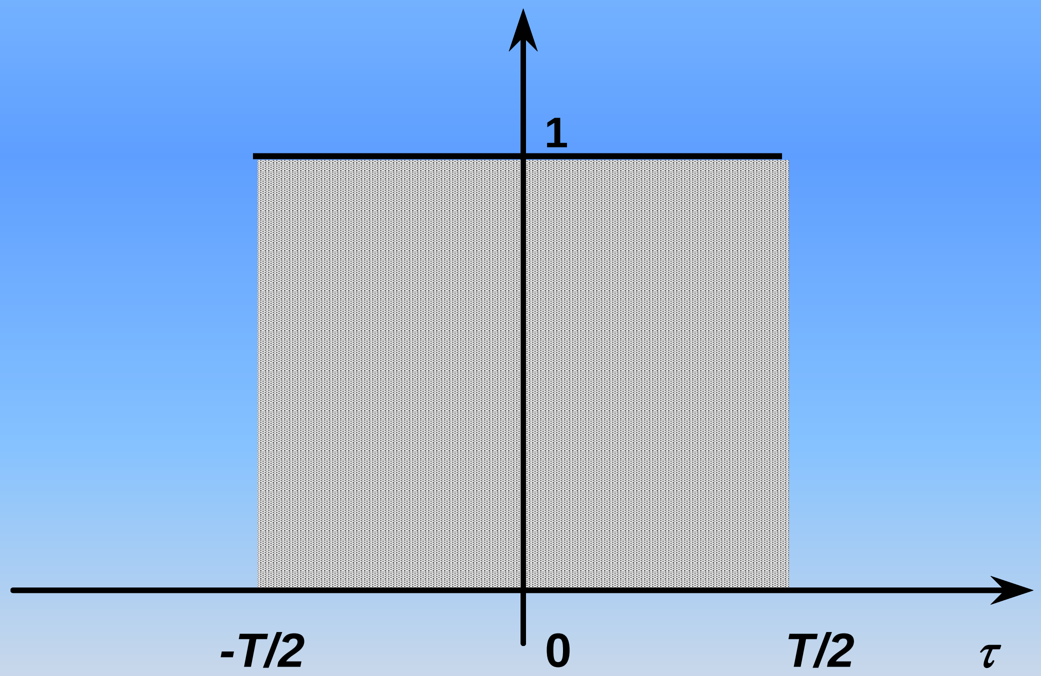
$$\underbrace{\left(t + T/2 - \left(-T/2\right)\right)}_{base} \cdot 1 = t + T$$

quindi

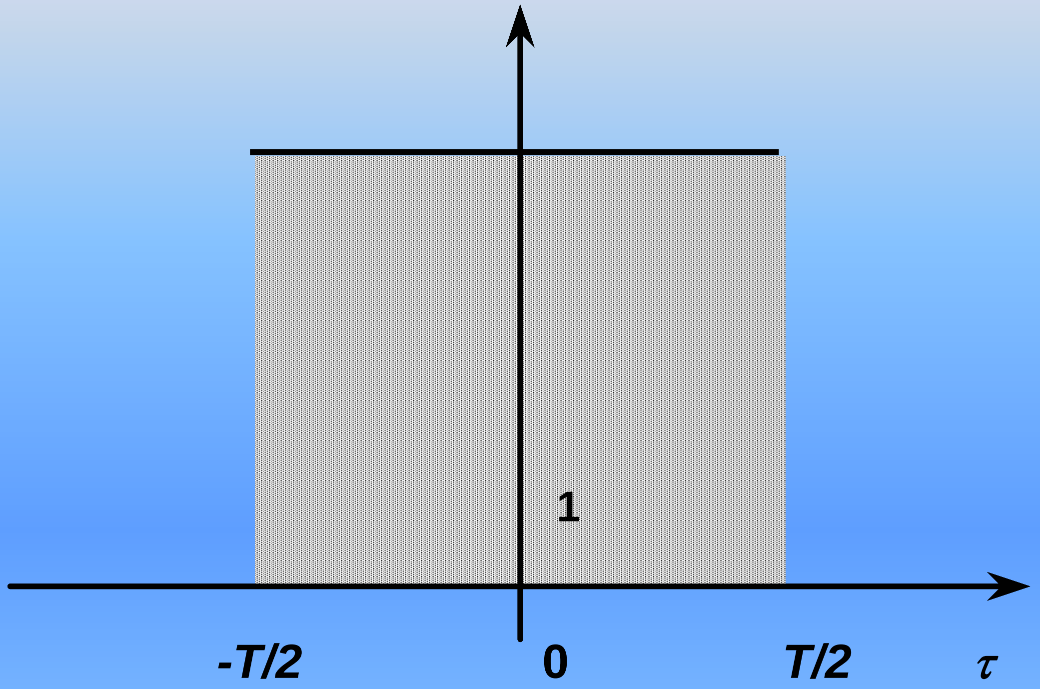
$$h(t) = t + T \qquad -T < t \leq 0$$

c) Se $t = 0$

il rettangolo mobile e quello fisso sono esattamente sovrapposti:



$$t = 0$$

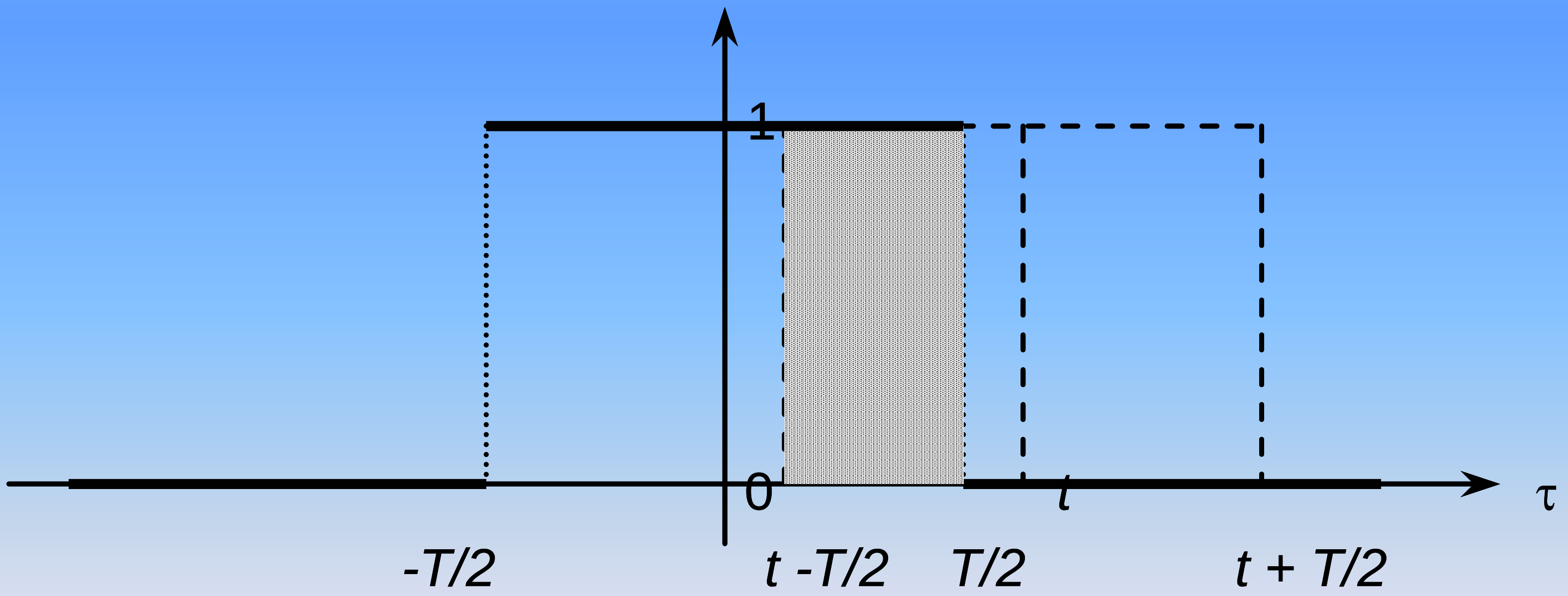


L'area ombreggiata misura *T* quindi

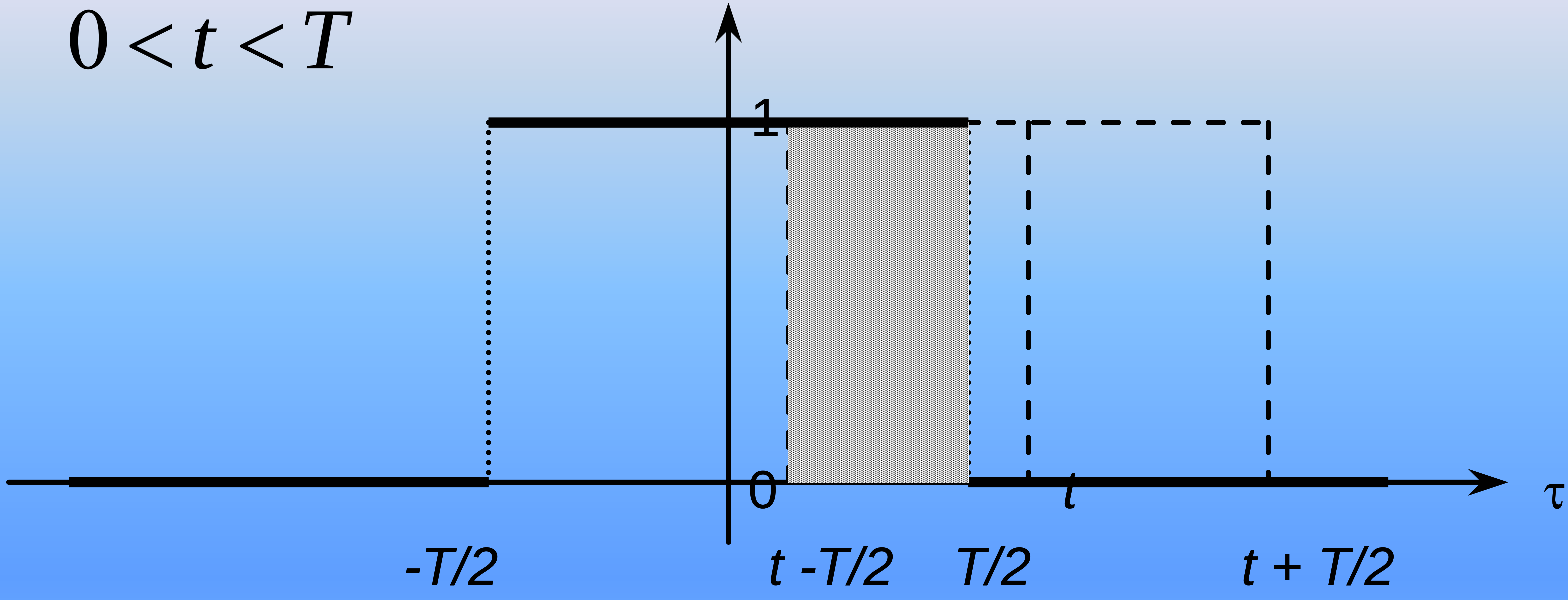
$$h(0) = T$$

d) Se $-\frac{T}{2} < t - \frac{T}{2} < \frac{T}{2}$

(ovvero $0 < t < T$) il rettangolo mobile comincia ad abbandonare quello fisso:



$$0 < t < T$$

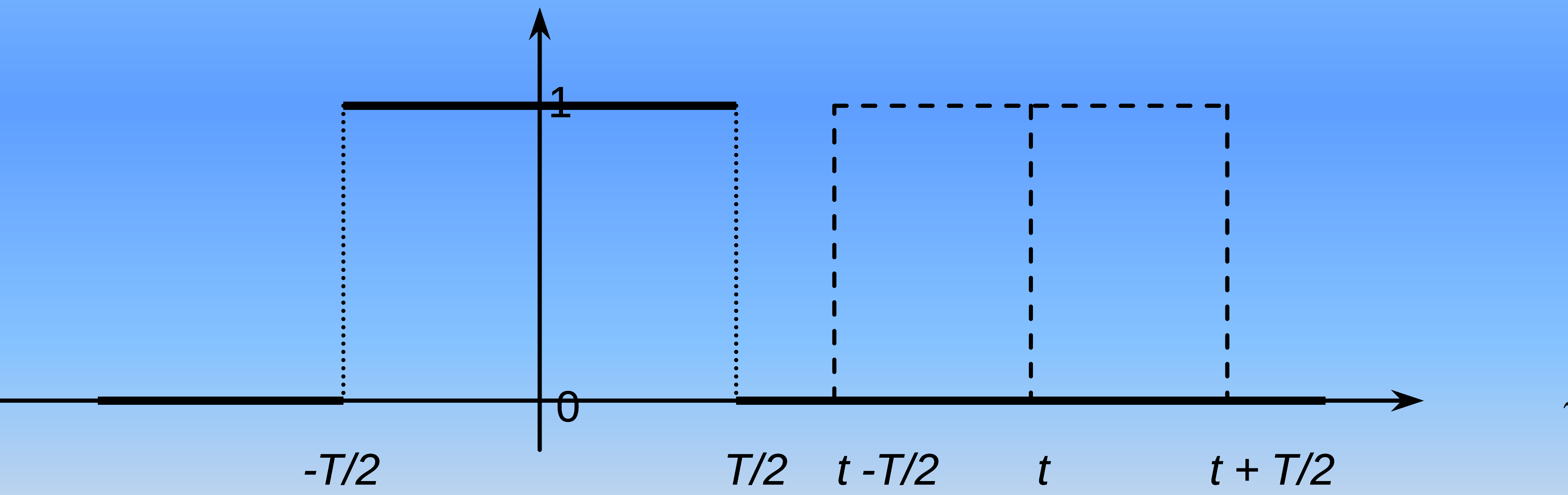


L’area intercettata (ombreggiata) misura

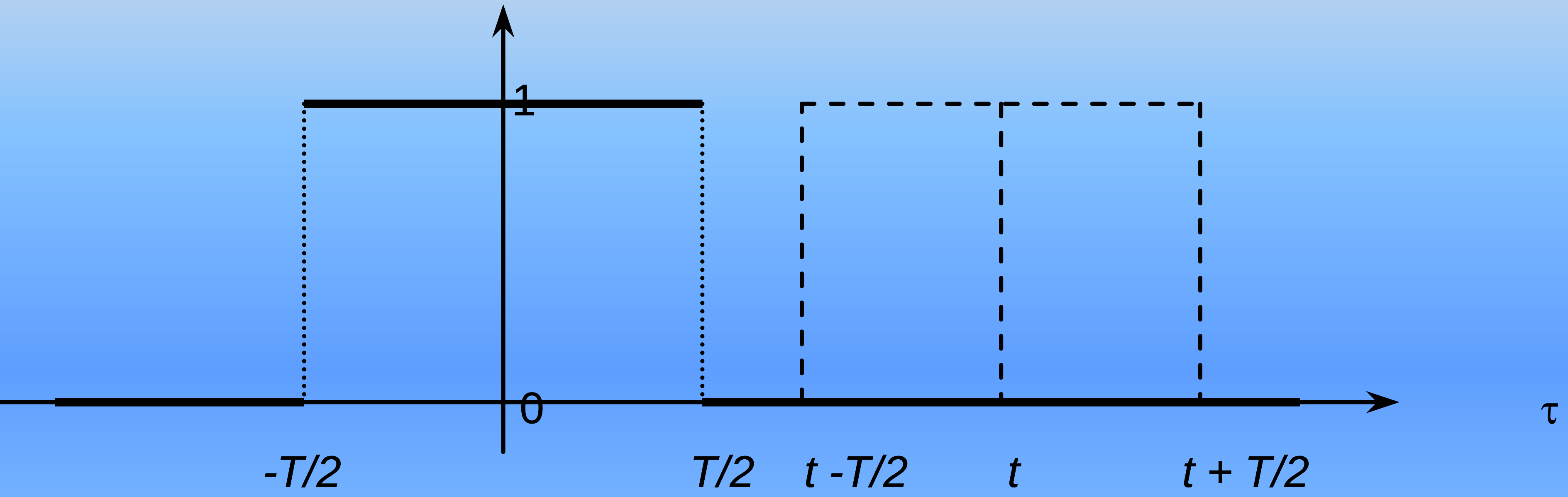
$$\underbrace{\left(T/2-\left(t-T/2\right)\right)}_{base}\cdot 1 = -t+T$$

quindi $$h\left(t\right) = -t+T \qquad 0 < t < T$$

e) Se $t - T/2 \geq T/2$ (ovvero $t \geq T$) il rettangolo mobile ha abbandonato quello fisso:



$t \geq T$



L’area intercettata dal rettangolo “mobile” su quello fisso è di nuovo nulla, quindi

$$h(t) = 0 \quad \text{per} \quad t \geq T$$

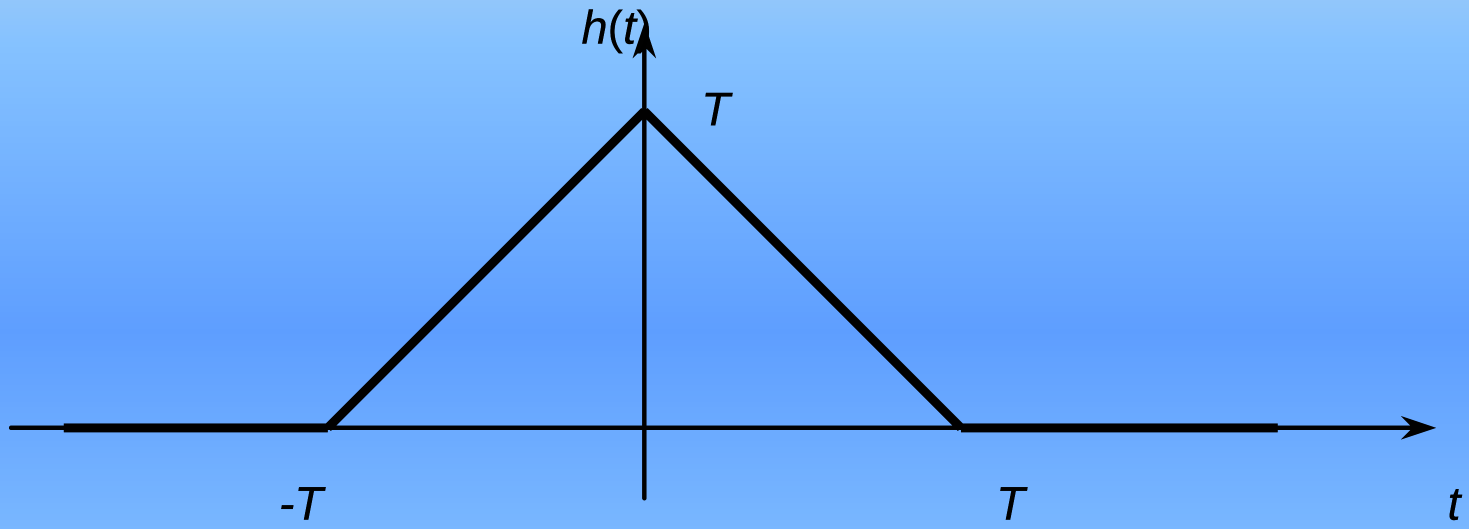
Riassumendo:

$$h(t)=\begin{cases} 0 & \text{se} \quad |t|\geq T \\ t+T & \text{se} \quad -T<t\leq 0 \\ -t+T & \text{se} \quad 0<t<T \end{cases}$$

ovvero:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)*\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)=\begin{cases} 0 & |t|\geq T \\ -|t|+T & |t|<T \end{cases}$$

$$h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 0 & |t| \geq T \\ -|t| + T & |t| < T \end{cases}$$



In definitiva, $h(t) = T\,\mathrm{triang}(t/T)$

Si noti che i segnali da cui siamo partiti sono discontinui, mentre *h*(*t*) è un segnale continuo.

3. *Convoluzione di segnali causali.*

Siano *x*(*t*) e *y*(*t*) due segnali $\mathcal{C}$-tratti e causali.

Allora: $\left(x*y\right)\left(t\right)$ è definito per ogni $t\in\mathbb{R}$ ed è esso stesso causale:

$$\left(x*y\right)\left(t\right)=\begin{cases}0 & t<0\\ \displaystyle\int_0^t x\left(\tau\right)y\left(t-\tau\right)d\tau & t\geq 0\end{cases}$$

Infatti,

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

Poiché $x(t)$ è causale, $x(\tau) = 0$ per $\tau < 0$

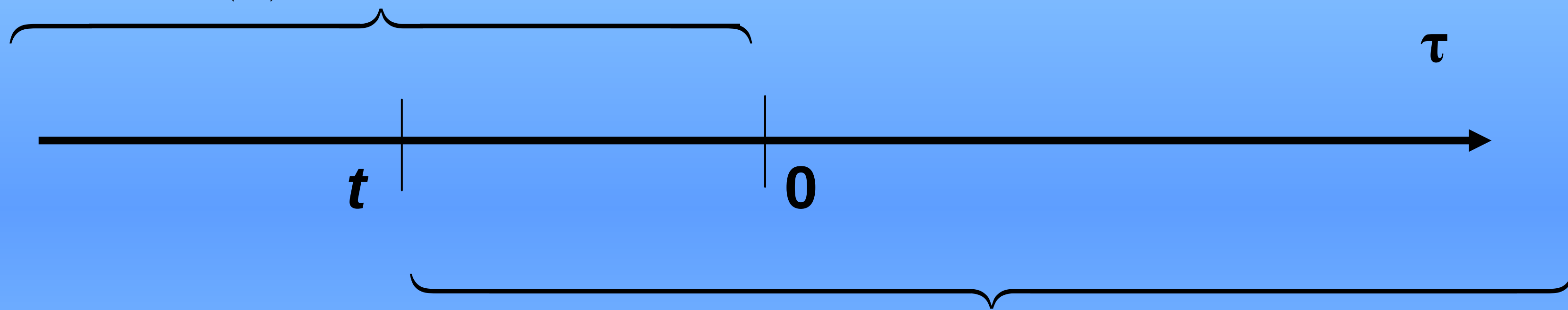
Anche $y(t)$ è causale, perciò $y(t-\tau) = 0$

per $t - \tau < 0$, cioè quando $\tau > t$

Se $t < 0$:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t - \tau)\, d\tau$$

$x(\tau)=0$ *per* $\tau<0$



$y(t-\tau)=0$ *per* $\tau>t$

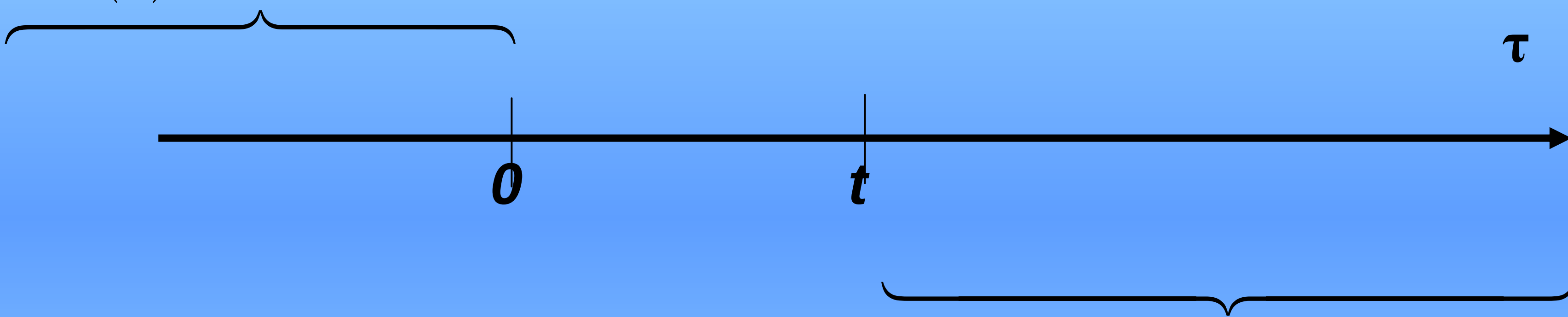
dunque

$$(x * y)(t) = 0 \quad \text{per ogni} \quad t < 0$$

Se $t \geq 0$:

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

$x(\tau)=0 \ per \ \tau<0$



$y(t-\tau)=0 \ per \ \tau>t$

dunque

$$(x * y)(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

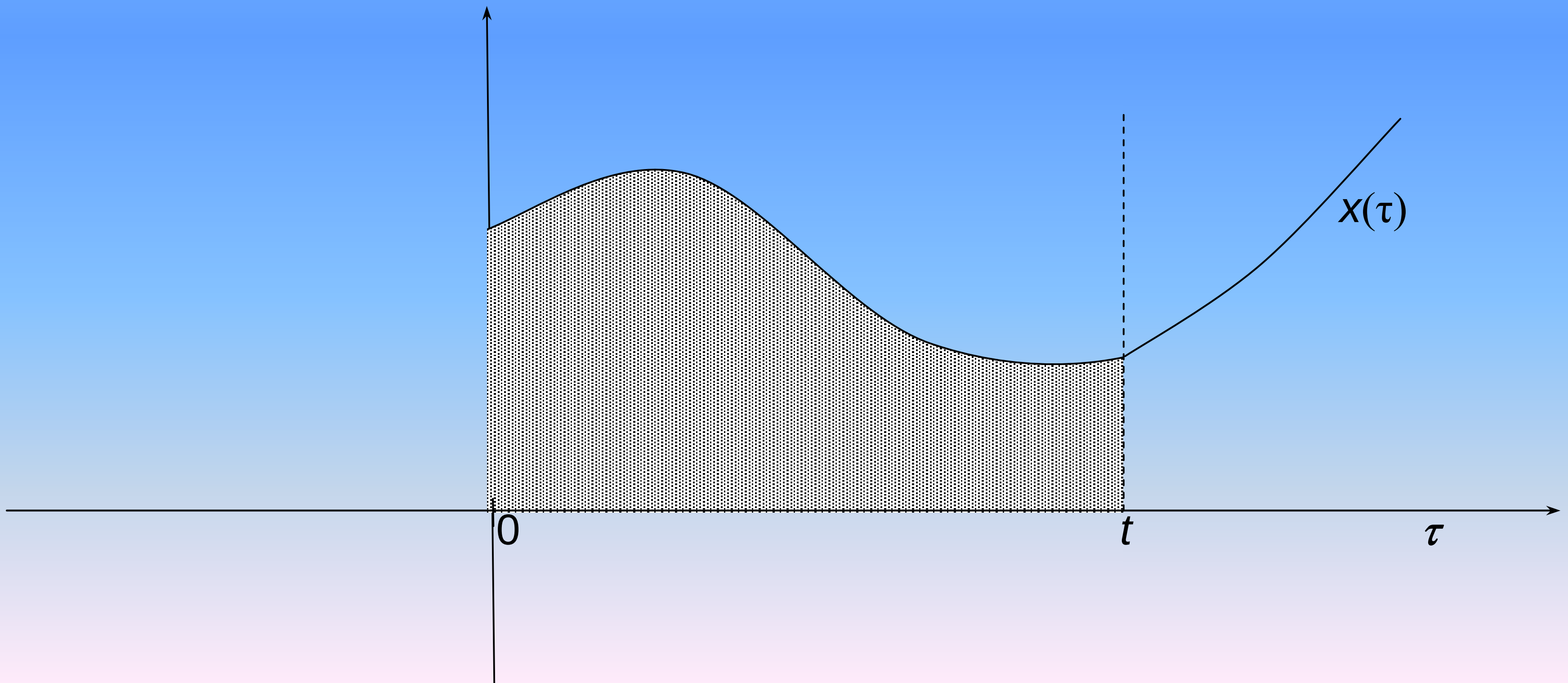
per ogni $t \geq 0$

Esempio 43.

Sia $x(t)$ segnale $\mathcal{C}$-tratti e causale.
Allora, per quanto appena visto :

$$x(t) * u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t x(\tau)\, d\tau & t \geq 0 \end{cases}$$

$$x(t) * u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t x(\tau)\, d\tau & t \geq 0 \end{cases}$$



CONVOLUZIONE E DISTRIBUZIONI

In generale la convoluzione fra distribuzioni è un’operazione non sempre definita.

Vedremo qui alcuni casi particolari di grande importanza nelle applicazioni.

1. Convoluzione e traslazione.

Sia $t_0 \in \mathbb{R}$.

Per ogni distribuzione *T* vale

$$T(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)*T(t)=T(t-t_0)$$

che permette di vedere la traslazione come una convoluzione.

$$T(t) * \delta(t - t_0) = \delta(t - t_0) * T(t) = T(t - t_0)$$

$$(t_0 \in \mathbb{R})$$

è giustificata formalmente da:

$$\delta(t - t_0) * T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0) T(t - \tau) \, d\tau =$$

$$(\tau - t_0 = \omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) T(t - \omega - t_0) \, d\omega =$$

$$= T(t - 0 - t_0) = T(t - t_0)$$

2. *Elemento neutro della convoluzione*.

Dal risultato precedente si ottiene, in particolare, che per ogni distribuzione *T* vale:

$$T * \delta = \delta * T = T$$

in base alle quali possiamo dire che:

la distribuzione δ di Dirac è *l'elemento neutro della convoluzione*

3. *Convoluzione e derivazione* .

Si può dimostrare che per ogni distribuzione *T* vale:

$$DT = D\left(T * \delta\right) = T * D\delta$$

$$T \;=\; T * \delta$$

che presenta la *derivata distribuzionale* come caso particolare di convoluzione.

4. *Convoluzione e integrazione*.

Sia $x(t)$ un segnale $\mathcal{C}$-tratti assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$. Allora:

$$(x*u)(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

e

$$D(x*u)(t)=x(t)$$

che presenta la convoluzione di $x(t)$ con $u(t)$ come una “primitiva” distribuzionale di $x(t)$

Infatti, poiché:

$$(x*u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

e

$$u(t-\tau) = 0 \text{ per } \tau > t$$

$$u(t-\tau) = 1 \text{ per } \tau < t$$

risulta subito

$$(x*u)(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

Inoltre, essendo $x(t)$ assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$, la funzione

$$(x*u)(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

è continua; è anche limitata poiché il limite

$$\lim_{t\to+\infty}(x*u)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,d\tau$$

è finito.

Dunque

$$(x*u)(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

è una distribuzione di $\mathcal{S}$'; per essa vale:

$$D(x*u)(t)=x(t) \qquad \text{in } \mathcal{S}'$$

essendo

$$D(x*u)(t)=x(t)*Du=x(t)*\delta=x(t)$$

$$D(x*u)(t) = x(t) \qquad \text{in } \mathcal{S}'$$

$$(x*u)(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

dunque

$$D\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right) = x(t) \qquad \text{in } \mathcal{S}'$$

$$D\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right) = x(t) \qquad \text{in } \mathcal{S}'$$

ovvero

$$(x * u)(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

è una primitiva (distribuzionale) di $x(t)$

Inoltre, poiché

$$\lim_{t \to -\infty} (x * u)(t) = \lim_{t \to -\infty} \left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \right) = 0$$

possiamo concludere che:

$$(x * u)(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

è la primitiva (distribuzionale) di $x(t)$ che si annulla a $-\infty$.

CONVOLUZIONE E TRASFORMATA DI FOURIER

Siano *x*(*t*) e *y*(*t*) due segnali F- trasformabili con $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$ e $y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f)$

Supponiamo inoltre che per *x*(*t*) e *y*(*t*) sia definita l’operazione di convoluzione. Allora

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \cdot Y(f)$$

Un risultato analogo al precedente è:

Siano *x*(*t*) e *y*(*t*) due segnali F- trasformabili con

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) \text{ e } y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f)$$

Se *x*(*t*)*y*(*t*) è F- trasformabile e per *X(f)* e *Y(f)* è definita l’operazione di convoluzione, allora

$$x(t)\cdot y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)*Y(f)$$

Esempio 44.

Calcoliamo nuovamente la F- trasformata del segnale

$$\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \left(T > 0\right)$$

(Esempio 19) sfruttando il risultato appena enunciato.

Abbiamo visto infatti (Esempio 42) che

$$T\ \mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Ne segue

$$\mathrm{rect}\left(t/T\right) * \mathrm{rect}\left(t/T\right) \xrightarrow{F} T\mathrm{sinc}\left(fT\right) \cdot T\mathrm{sinc}\left(fT\right)$$

ovvero

$$T\ \mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F} \left(T\,\mathrm{sinc}\left(fT\right)\right)^2$$

da cui ovviamente

$$\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{F} T\,\mathrm{sinc}^2\left(fT\right)$$

Teorema (trasforma di Fourier dell'integrale)

Sia $x(t)$ un segnale $\mathcal{C}$-tratti assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$.

Se

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

e

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

allora

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi j f} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\,\delta(f)$$

Infatti si è visto che

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau = x(t) * u(t)$$

e quindi, ricordando che (Esempio 40)

$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi j f} + \delta(f) \right)$$

otteniamo che

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)\left(\frac{1}{2\pi jf} + \frac{1}{2}\delta(f)\right)$$

Poiché $x(t)$ è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$, cosicché $X(f)$ è continua, e per le proprietà della δ

$$X(f)\delta(f) = X(0)\delta(f)$$

e dunque

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi jf} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$$

$$y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi jf} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$$

Osservazione 1.

Poiché $x(t)$ è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$,

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, d\tau$$

Osservazione 2.

<u>Se</u> pure $y(t)$ è assolutamente integrabile in s. g. su $\mathbb{R}$, la sua trasformata è continua e quindi <u>*in tal caso*</u> *deve* essere

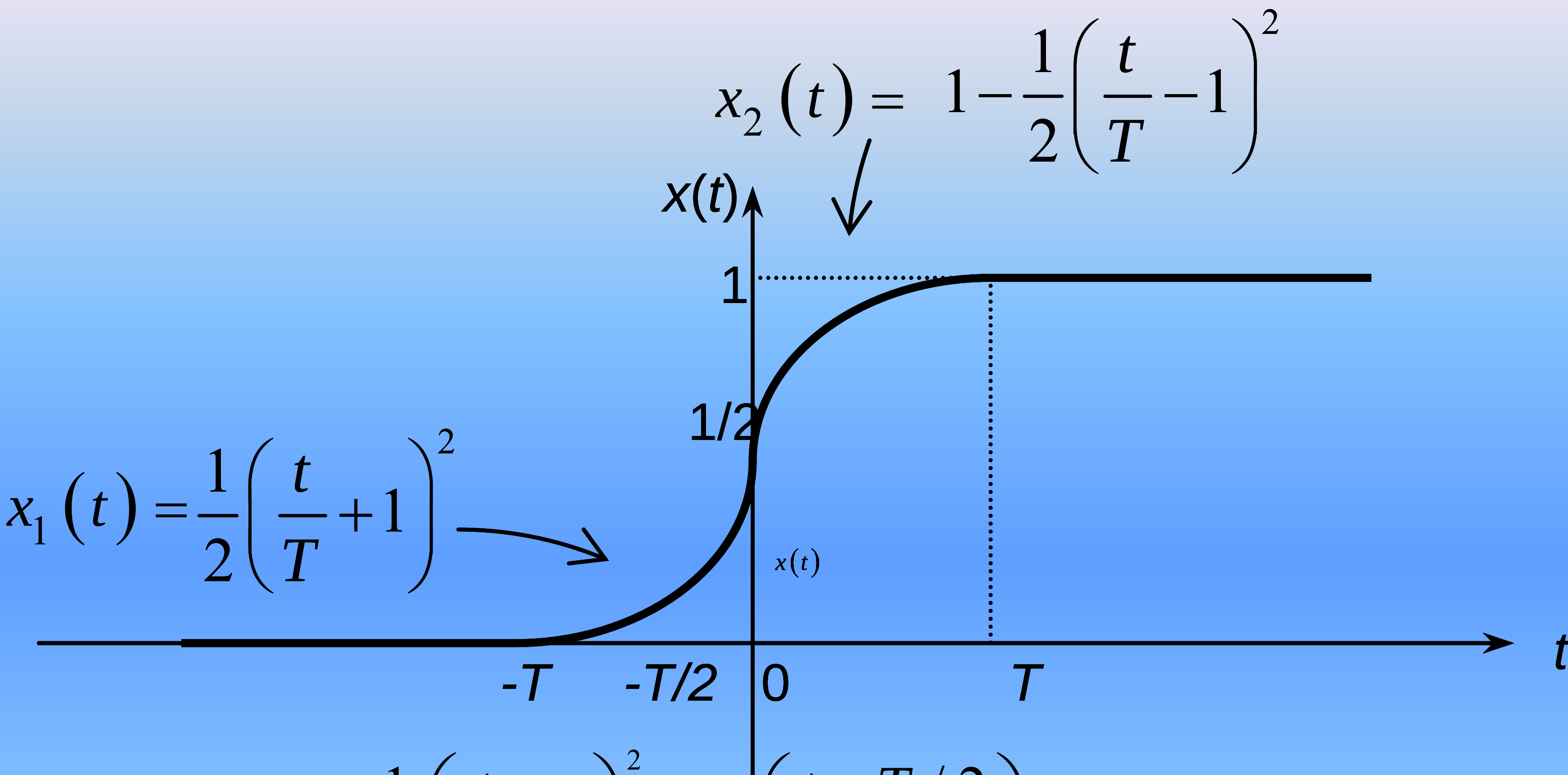
$$X(0) = 0$$

Esempio 45

Fissato *T > 0*, si calcoli la trasformata di Fourier $X(f)$ del segnale definito $\forall t \in \mathbb{R}$ da:

$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}+1\right)^2 \mathrm{rect}\left(\frac{t+T/2}{T}\right)+$$

$$+\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}-1\right)^2\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)+u(t-T)$$



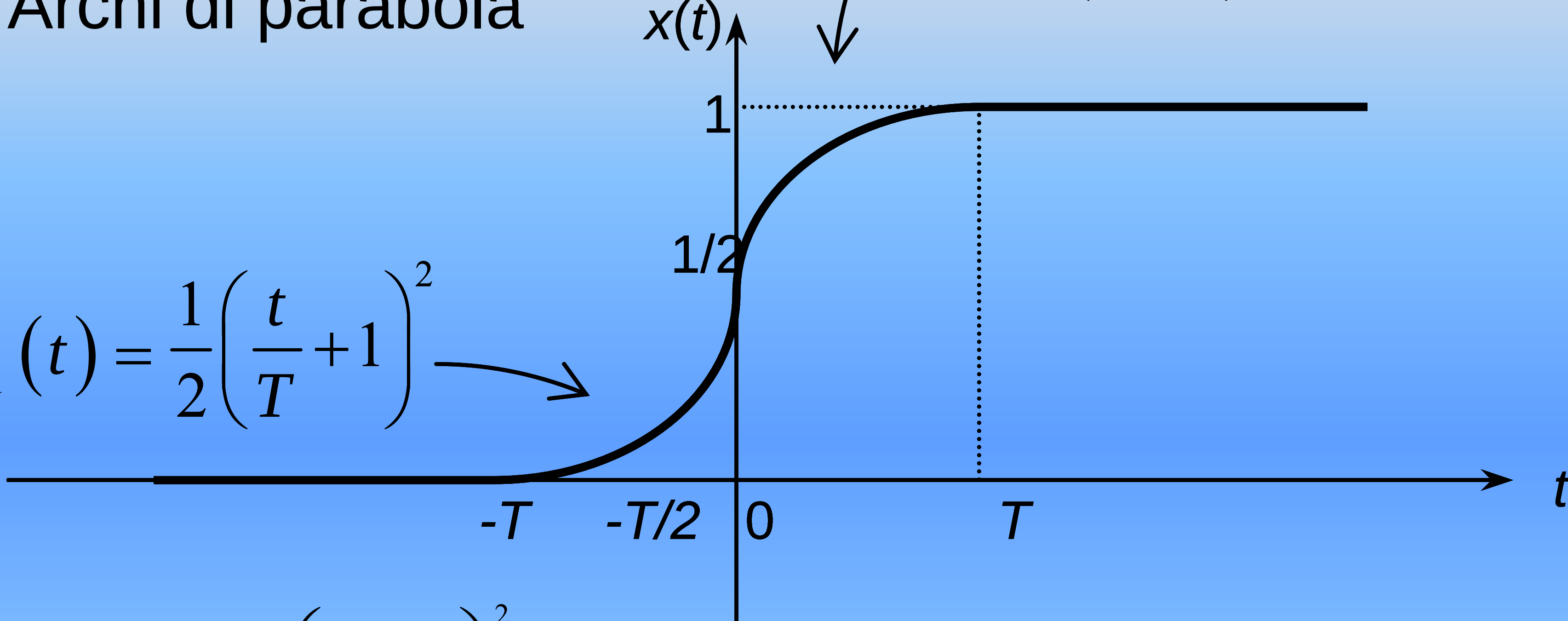
$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}+1\right)^2 \operatorname{rect}\left(\frac{t+T/2}{T}\right)+$$

$$+\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}-1\right)^2\right)\operatorname{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)+u\left(t-T\right)$$

Archi di parabola

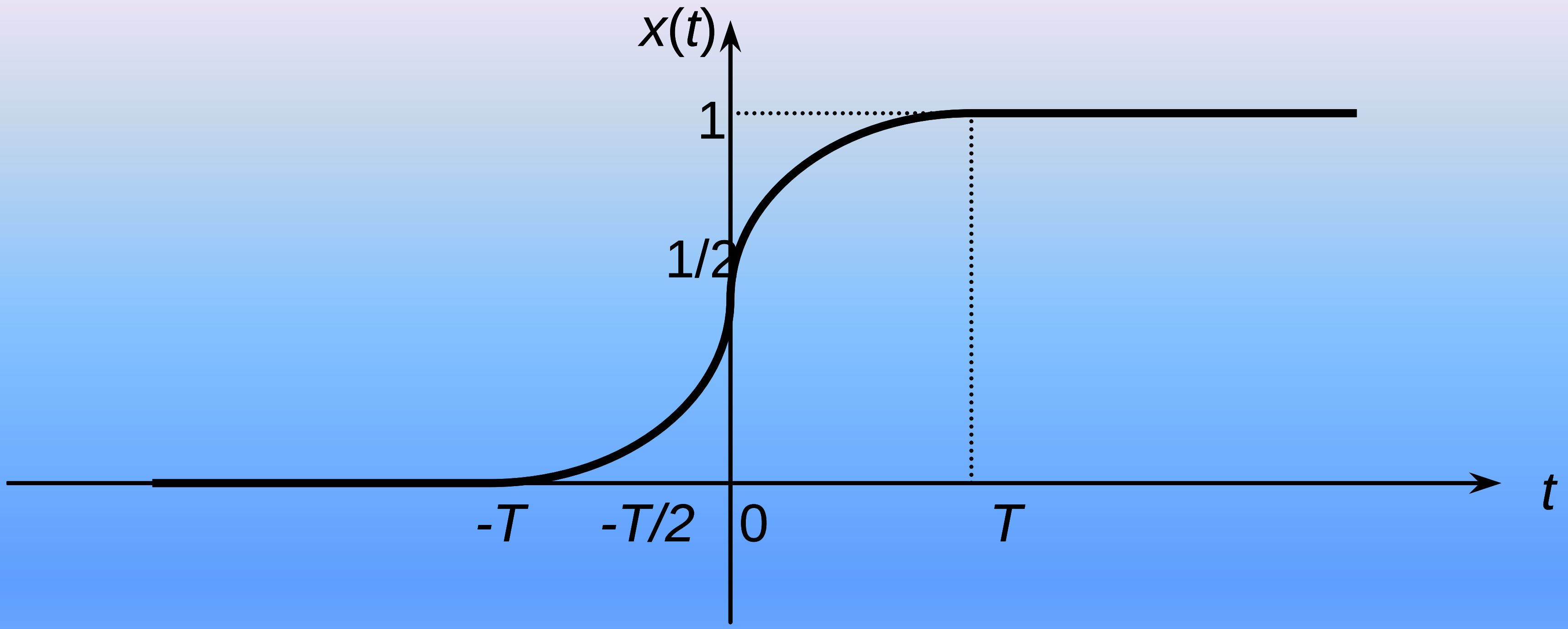
$$x_2(t) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T} - 1\right)^2$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T} + 1\right)^2$$



$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T} + 1\right)^2 = \frac{1}{2T^2}(t+T)^2$$

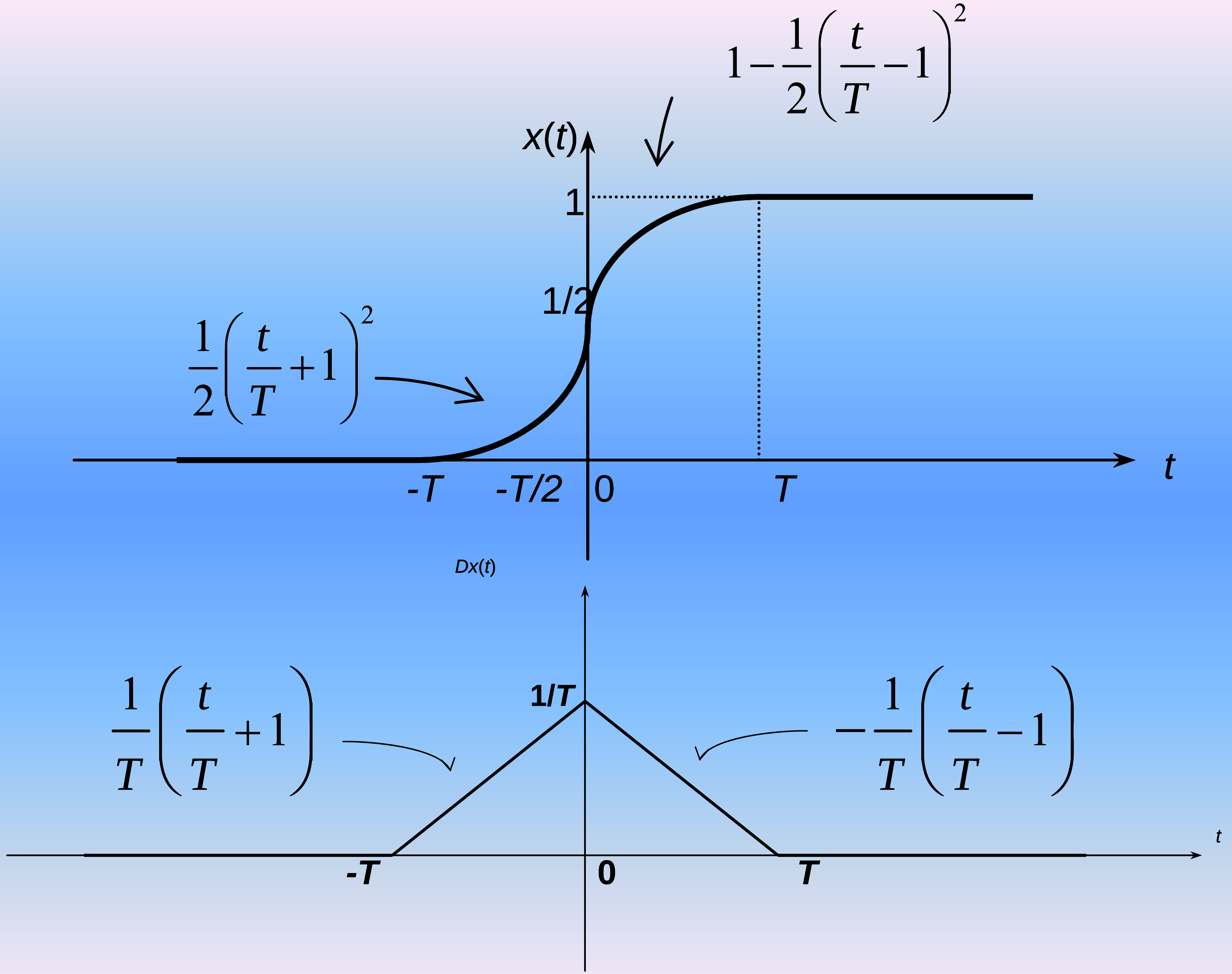
$$x_2(t) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T} - 1\right)^2 = 1 - \frac{1}{2T^2}(t-T)^2$$



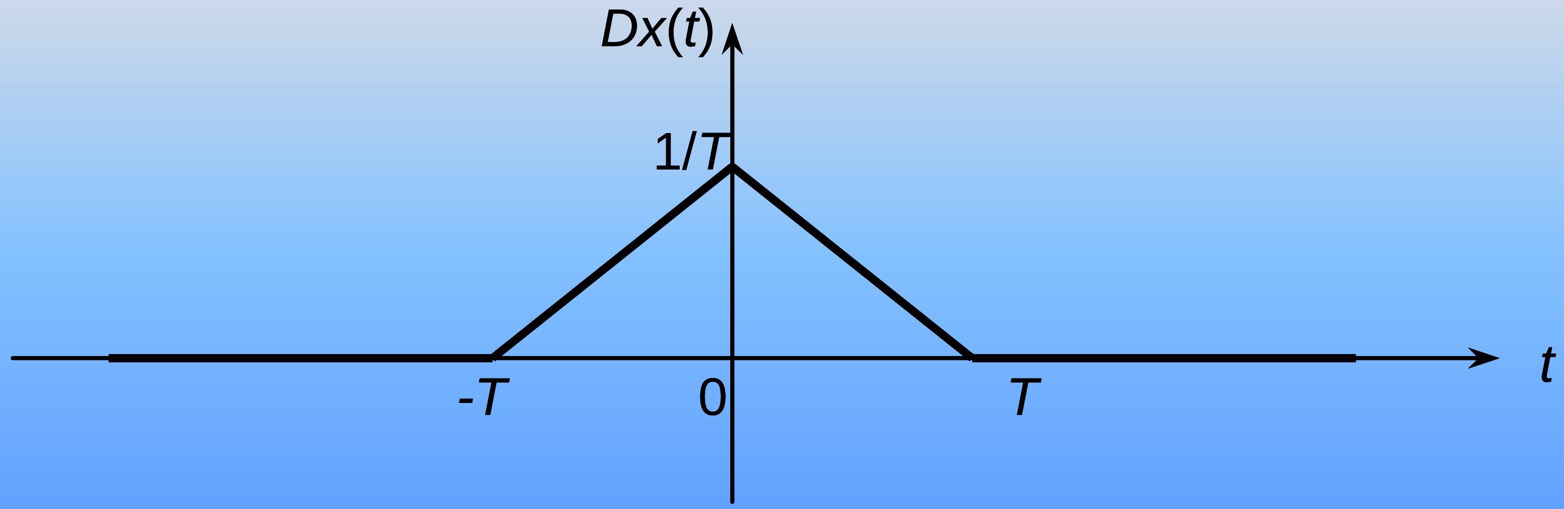
E' un segnale continuo e limitato ma non assolutamente integrabile in s. g.

Può essere visto come una distribuzione di $\mathcal{S}'$.

La sua derivata distribuzionale è:



$1-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}-1\right)^2$
$x(t)$
1
1/2
$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}+1\right)^2$
t
-T
-T/2
0
T
Dx(t)
1/T
$\frac{1}{T}\left(\frac{t}{T}+1\right)$
$-\frac{1}{T}\left(\frac{t}{T}-1\right)$
t
-T
0
T



Dunque $$Dx(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right)$$

segnale assolutamente integrabile in s. g.
di cui è nota la trasformata di Fourier:

$$\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{\cancel{T}} \cdot \cancel{T} \operatorname{sinc}^2(fT) = \operatorname{sinc}^2(fT)$$

Posto

$$S(f) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)\right) = \operatorname{sinc}^2(fT)$$

evidentemente vale:

$$S(0) = 1$$

Poiché $$Dx(t) = \frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)$$

ma anche

$$D\left(\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right) * u\right)(t) = \frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)$$

(vedi “convoluzione e integrazione”)
possiamo concludere che

$$x(t) = \left(\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right) * u\right) + c$$

D’altra parte, sia $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0$

sia

$$\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)*u(t)\right)=0$$

(vedi ancora “convoluzione e integrazione”)

cosicché *c=0*

$$x(t)=\left(\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)*u\right)=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{\tau}{T}\right)d\tau$$

Applicando allora il Teorema della F trasformata dell’integrale, possiamo concludere che:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi jf} S(f) + \frac{1}{2} S(0)\delta(f)$$

cioè

$$X(f) = \frac{1}{2\pi jf} \mathrm{sinc}^2(fT) + \frac{1}{2}\delta(f)$$

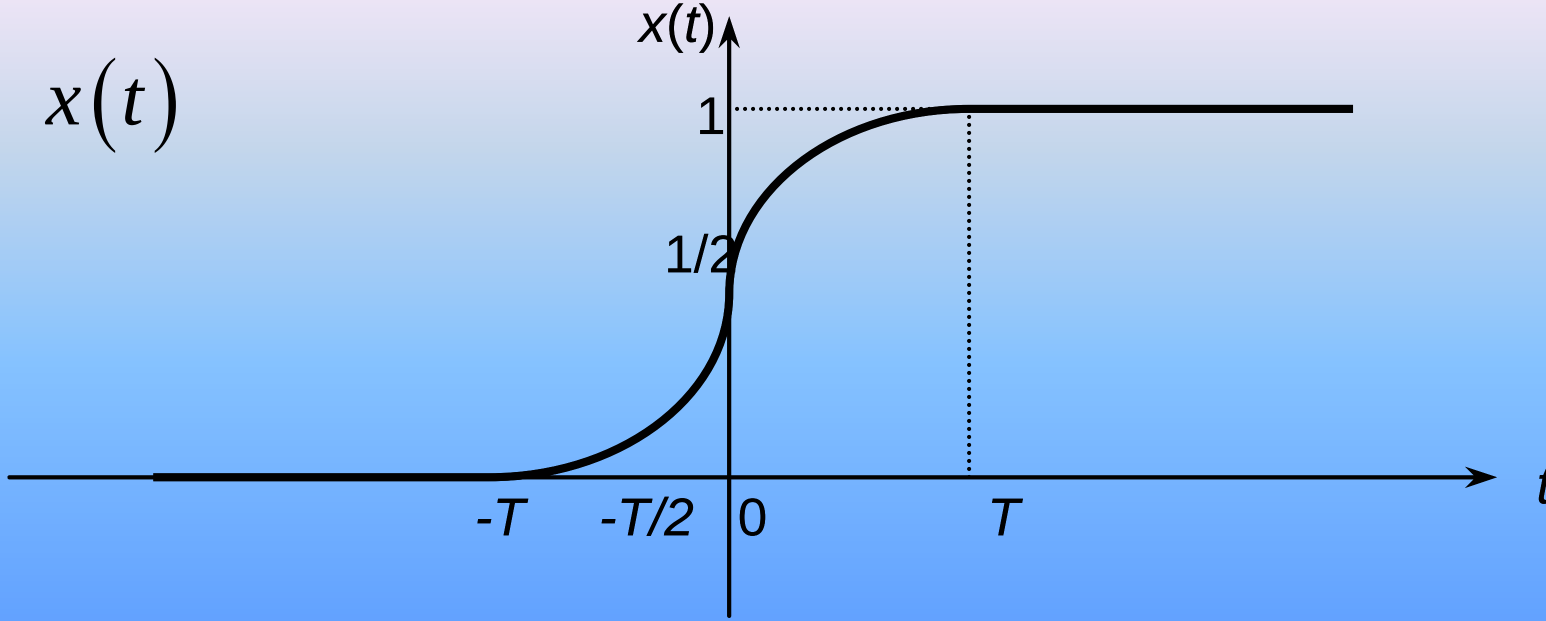
Esempio 45 bis

Fissato *T > 0*, si calcoli la trasformata di Fourier $Y(f)$ del segnale definito $\forall t \in \mathbb{R}$ da:

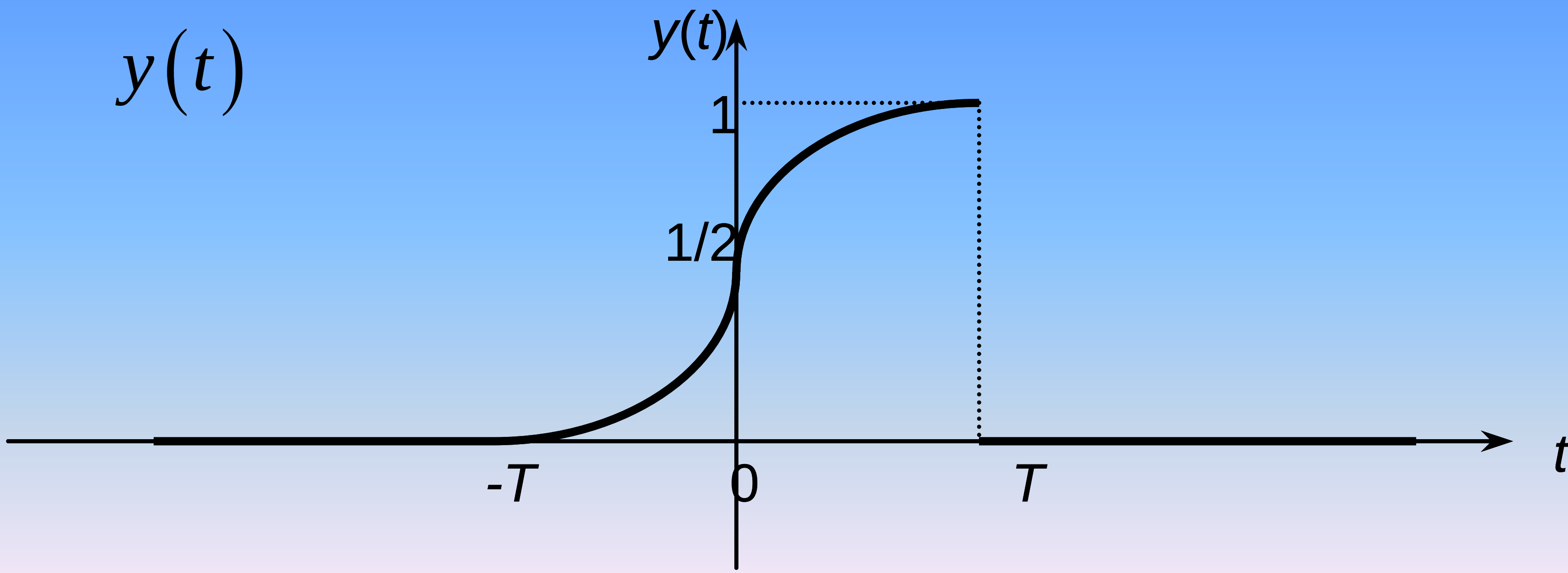
$$y(t) = x(t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

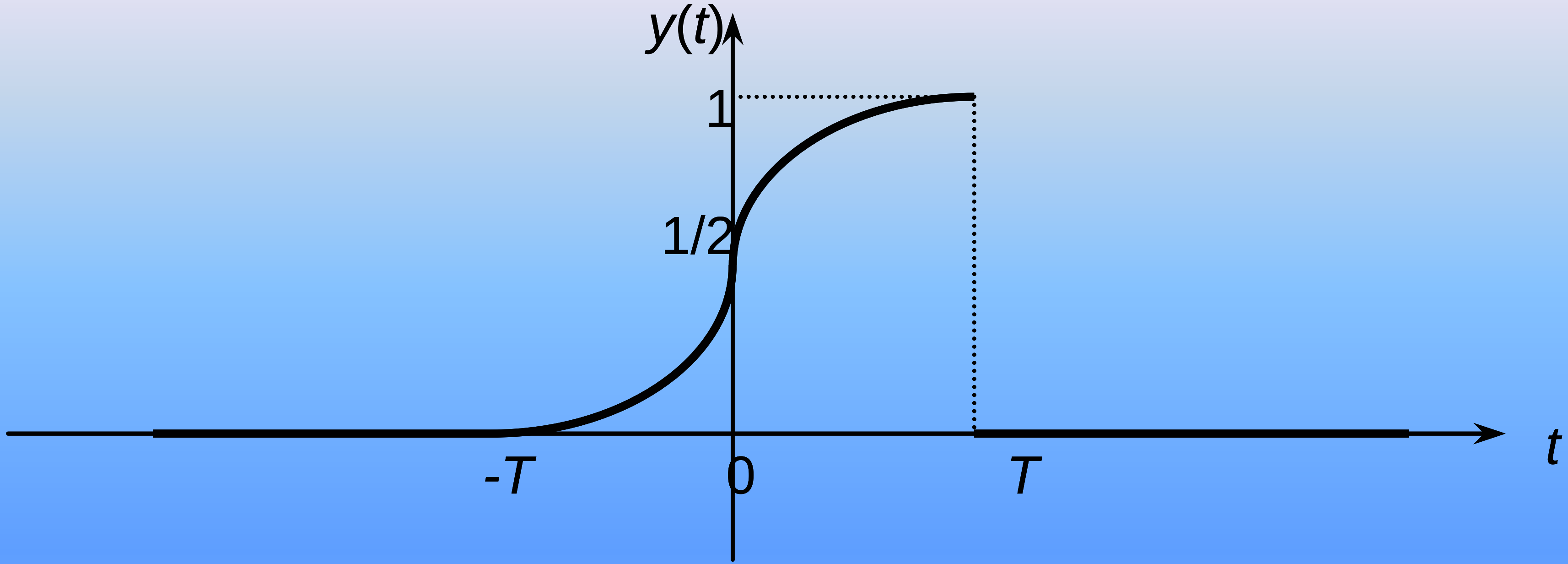
dove $x(t)$ è il segnale dell'Esempio 45.

$x(t)$



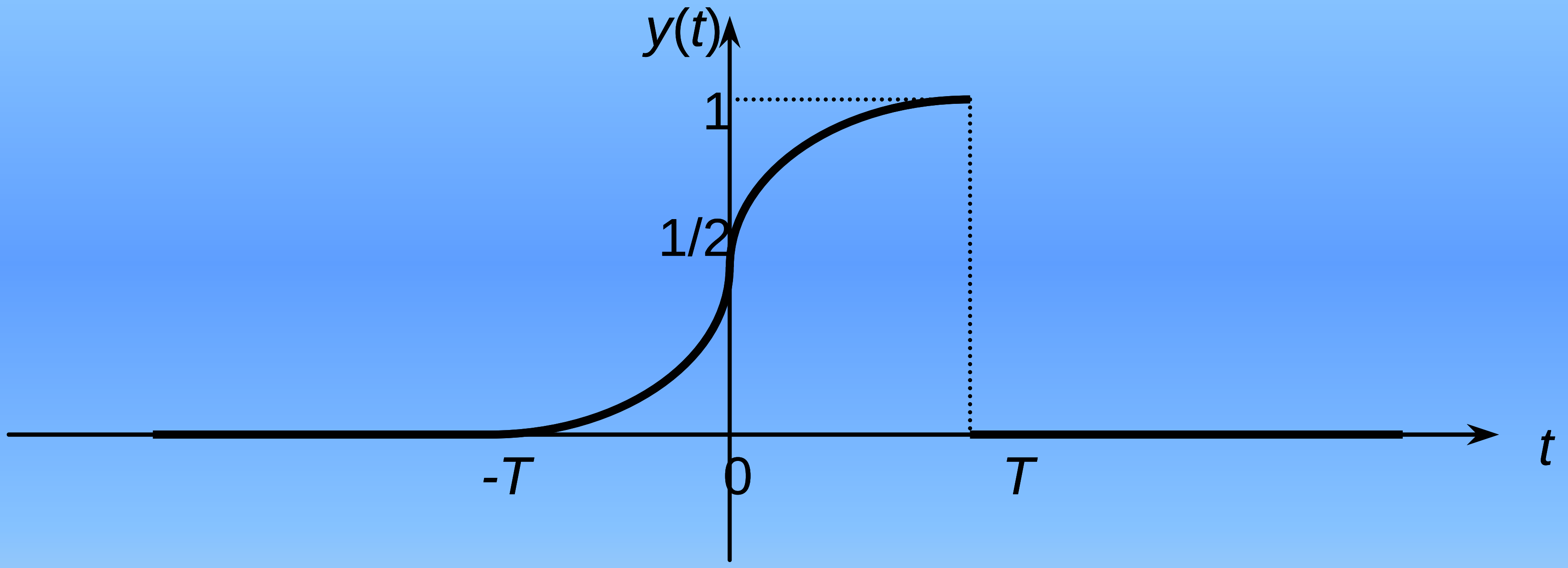
$y(t)$





E' un segnale $\mathcal{C}$-tratti assolutamente integrabile in s. g.
La scrittura proposta dal testo non è la più indicata per calcolarne la Trasformata di Fourier.

Volendo utilizzare i risultati dell’Esempio precedente, possiamo scrivere



$$y(t) = x(t) - u(t - T)$$

$$y(t) = x(t) - u(t-T)$$

Applicando linearità e propr. traslazione in *t* e indicando con $U(f)$ la F trasformata di $u(t)$:

$$Y(f) = X(f) - e^{-j2\pi fT}U(f)$$

Ricordando che $U(f) = \dfrac{1}{2\pi jf} + \dfrac{1}{2}\delta(f)$

$$e^{-j2\pi fT}U(f) = e^{-j2\pi fT}\frac{1}{2\pi jf} + \underbrace{e^{-j2\pi 0T}}_{=1}\frac{1}{2}\delta(f)$$

$$Y(f) = X(f) - e^{-j2\pi fT} U(f)$$

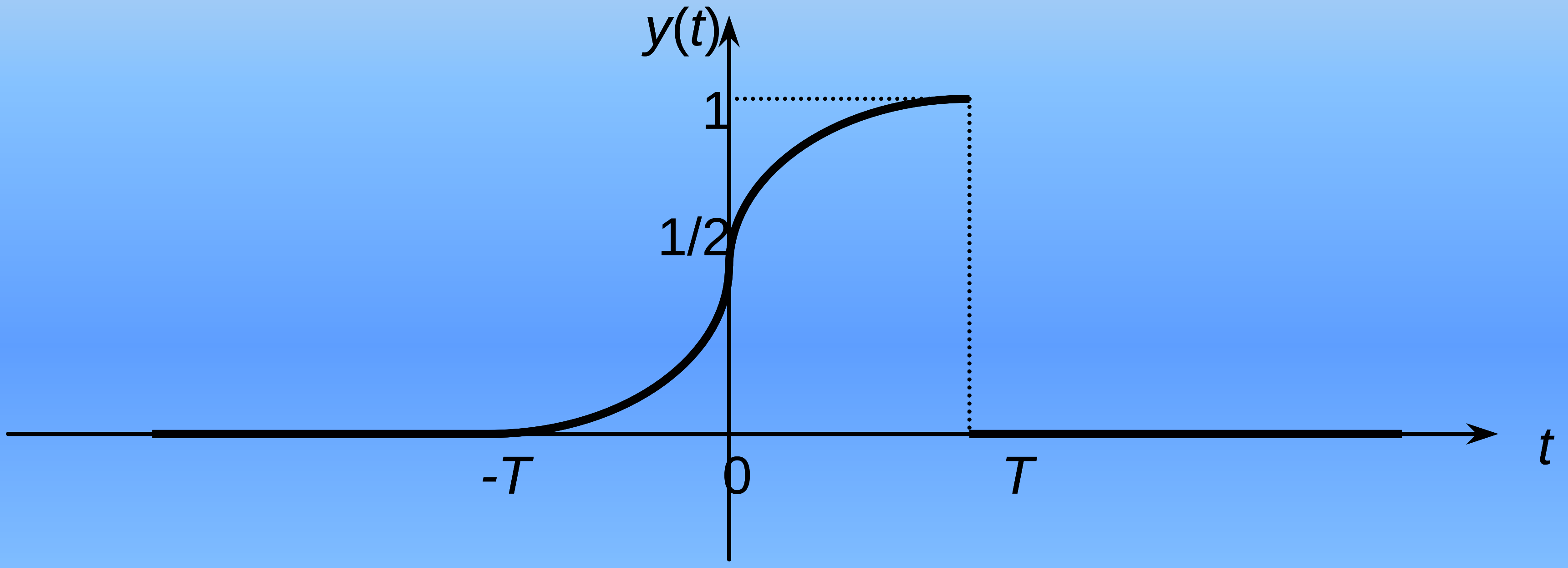
$$e^{-j2\pi fT} U(f) = e^{-j2\pi fT} \frac{1}{2\pi jf} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

$$X(f) = \frac{1}{2\pi jf} \operatorname{sinc}^2(fT) + \frac{1}{2}\delta(f)$$

Risulta:

$$Y(f) = \frac{1}{2\pi jf}\left(\operatorname{sinc}^2(fT) - e^{-j2\pi fT}\right)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2\pi j f}\left(\mathrm{sinc}^2(fT) - e^{-j2\pi f T}\right)$$



Risulta graficamente evidente che:

$$Y(0) = T$$

$$Y(f) = \frac{1}{2\pi jf}\left(\mathrm{sinc}^2(fT) - e^{-j2\pi fT}\right)$$

$$Y(0) = T$$

da cui, dovendo essere in questo caso $Y(f)$ continua, possiamo dedurre che:

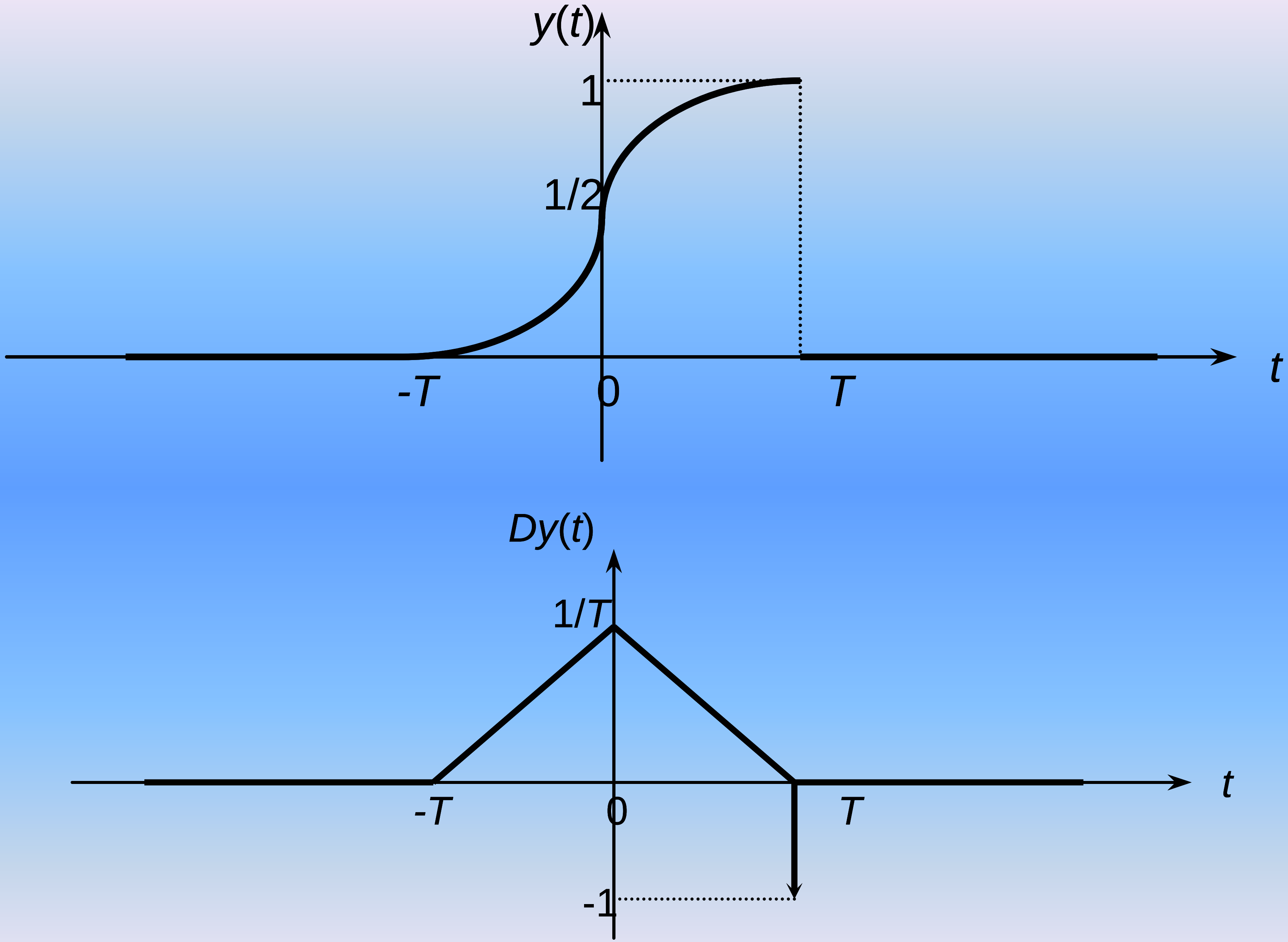
$$\lim_{f \to 0}\left(\frac{\mathrm{sinc}^2(fT) - e^{-j2\pi fT}}{2\pi jf}\right) = T$$

Osservazione.

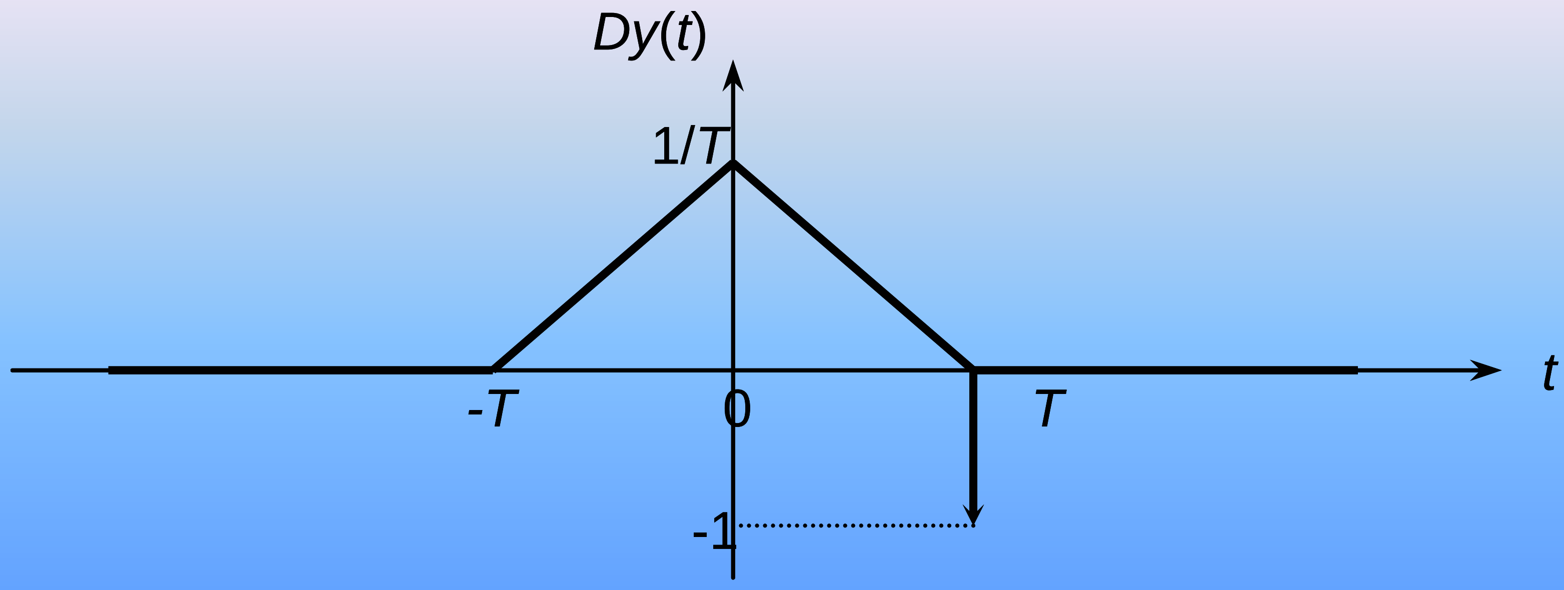
Avremmo anche potuto cercare di seguire il procedimento utilizzato nell’Esempio 45.

In questo caso, la derivata distribuzionale di $y(t)$ diventa:

$$(Dy)(t) = \frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right) - \delta(t - T)$$



y(t)
1
1/2
-T
0
T
t
Dy(t)
1/T
-T
0
T
t
-1



In questo caso $$\left(Dy\right)\left(t\right)=\frac{1}{T}\,\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right)-\delta\left(t-T\right)$$

<u>non è</u> segnale assolutamente integrabile in s. g. per cui non è detto che possa essere applicabile il risultato usato in precedenza.

Essendo però:

$$\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)-\delta\left(t-T\right)\xrightarrow{\mathcal{F}}\operatorname{sinc}^2\left(fT\right)-e^{-j2\pi fT}$$

posto:

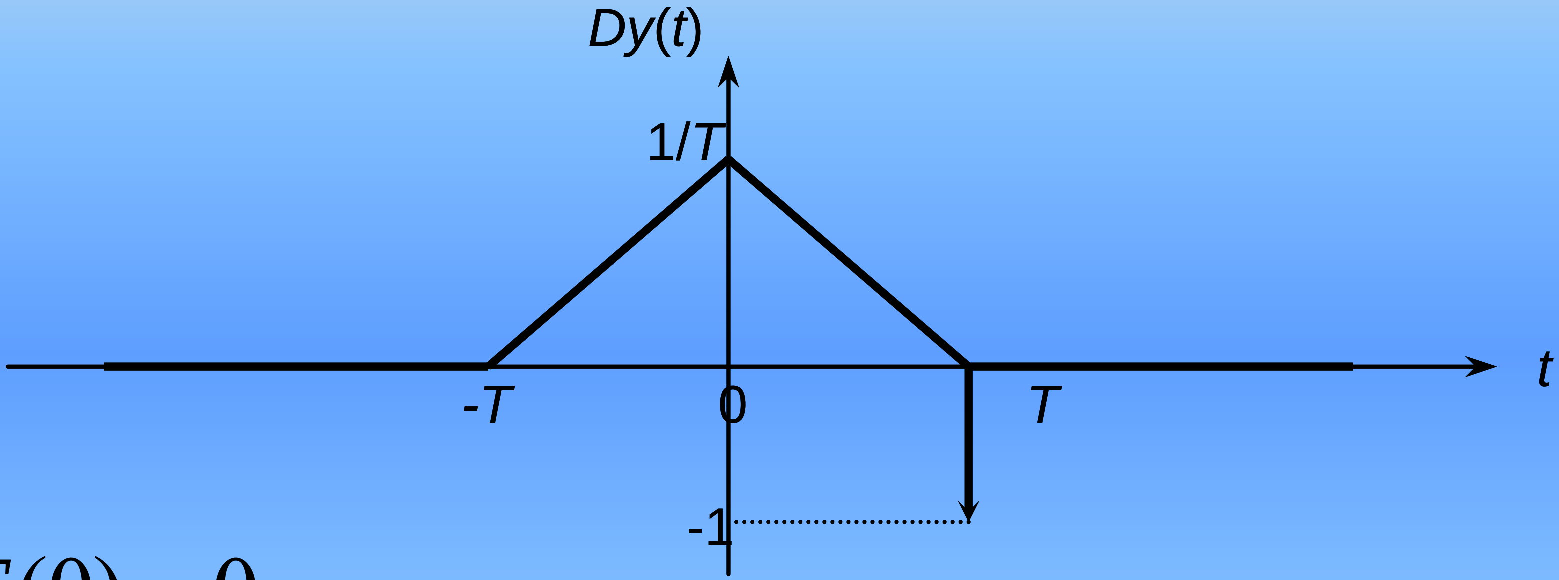
$$T(f)=\mathcal{F}\left(\frac{1}{T}\operatorname{triang}\left(\frac{t}{T}\right)-\delta\left(t-T\right)\right)=$$

$$=\operatorname{sinc}^2\left(fT\right)-e^{-j2\pi fT}$$

è ancora possibile determinare $T(0)$:

$$T(0)=0$$

(si ricordi anche la “proprietà di area” della δ)



$$T(0) = 0$$

risultato compatibile con il fatto che $y(t)$ è assolutamente integrabile in s. g.

La formula fornita dal Teorema della F trasformata dell'integrale, dà allora:

$$Y(f) = \frac{1}{2\pi jf} T(f) + \frac{1}{2} T(0)\delta(f) =$$

$$= \frac{1}{2\pi jf} T(f) = \frac{1}{2\pi jf}\left(\mathrm{sinc}^2(fT) - e^{-j2\pi fT}\right)$$

cioè il risultato ottenuto in precedenza.