TRASFORMATA DI LAPLACE

Se $x(t)$ è un segnale *causale* definito su $\mathbb{R}$ a valori reali o complessi, la trasformata di Laplace di $x(t)$ è definita formalmente da:

$$(\mathcal{L}x)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\, dt$$

per gli $s \in \mathbb{C}$ per cui tale integrale converge.

L’integrale $\int_{0}^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt$ è detto:

integrale di Laplace relativo a $x(t)$

Se converge, definisce la funzione di variabile complessa $(\mathcal{L}x)(s)$ che assume in genere valori complessi.

Se

$$(\mathcal{L}x)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt$$

$(\mathcal{L}x)(s)$ è detta:

Trasformata di Laplace di $x(t)$

(o L – trasformata di $x(t)$)

Se $$\int_{0}^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt$$

è convergente, si dice anche che

$x(t)$ è *trasformabile secondo Laplace*

(oppure che è *L - trasformabile)*

e si scrive $$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (Lx)(s)$$

Esempio 46.

Sia $u(t)$ il gradino unitario (segnale causale).

L'integrale di Laplace ad esso relativo vale:

$$(\mathcal{L}u)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts}\,dt$$

E' evidente che se $s = 0$ l'integrale non converge.

$$(\mathcal{L}u)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-ts}\,dt$$

Se $s \neq 0$ vale:

$$(\mathcal{L}u)(s) = \left[\frac{e^{-ts}}{-s}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{s}\left(1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-ts}\right)$$

Dobbiamo valutare $\lim_{t\to+\infty} e^{-ts}$

Osserviamo che

$$e^{-ts} = e^{-t(\mathrm{Re}\,s + j\,\mathrm{Im}\,s)} = e^{-t\,\mathrm{Re}\,s}e^{-jt\,\mathrm{Im}\,s} =$$

$$= e^{-t\,\mathrm{Re}\,s}\left(\cos\left(t\,\mathrm{Im}\,s\right) - j\sin\left(t\,\mathrm{Im}\,s\right)\right)$$

Né $\cos(t \operatorname{Im} s)$ né $\sin(t \operatorname{Im} s)$

ammettono limite per $t \to +\infty$

Poiché però sono limitate, e

$$\left|e^{-ts}\right| = \underbrace{\left|e^{-t\operatorname{Re}s}\right|}_{>0} \cdot \underbrace{\left|e^{-jt\operatorname{Im}s}\right|}_{=1} = e^{-t\operatorname{Re}s}$$

se ne deduce che

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-ts} = 0$$

se e solo se

$$\operatorname{Re}s > 0$$

Ne segue che

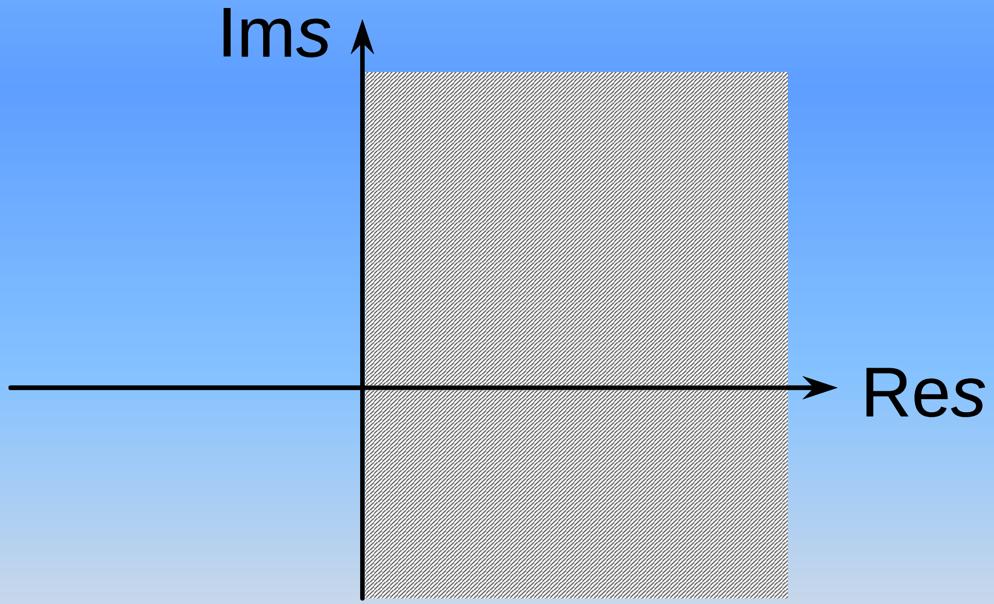
$$(\mathcal{L}u)(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \lim_{t\to+\infty} e^{-ts}\right) = \frac{1}{s}$$

se e solo se $\operatorname{Re} s > 0$

Concludendo:

$$(\mathcal{L}u)(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{per ogni } s \in \mathbb{C} \text{ tale che } \operatorname{Re} s > 0$$

La trasformata di Laplace di $u(t)$
esiste e coincide con la funzione $\frac{1}{s}$
nel semipiano complesso



$$\mathrm{Re}\, s > 0$$

Vale il seguente: <u>Teorema</u>
<u>(Condizione sufficiente per L- trasformabilità):</u>

Sia $x(t)$ un segnale causale $\mathcal{C}$-tratti di ordine esponenziale α per $t \to +\infty$ (cioè: $\exists k > 0$ e $\exists t_k > 0$ tali che

$$\left| x(t) \right| \le k e^{\alpha t} \qquad \text{per ogni } t > t_k \qquad)$$

Allora:

$x(t)$ è L – trasformabile per ogni

$$s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} s > \alpha$$

Infatti:

se t_k è quello nell'ipotesi

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts}x(t)\,dt = \underbrace{\int_0^{t_k} e^{-ts}x(t)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{t_k}^{+\infty} e^{-ts}x(t)\,dt}_{I_2}$$

L'integrale I_1 è convergente $\forall s \in \mathbb{C}$ (integrale di funzione $\mathcal{C}$-tratti su intervallo limitato).

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt = \underbrace{\int_0^{t_k} e^{-ts} x(t)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{t_k}^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt}_{I_2}$$

Valutiamo I_2 :

per ogni $t > t_k$ vale

$$\left| e^{-ts} x(t) \right| = \left| e^{-t(\operatorname{Re} s + j \operatorname{Im} s)} \right| \left| x(t) \right| \le$$

$$\le e^{-t \operatorname{Re} s} k e^{\alpha t} = k e^{-t(\operatorname{Re} s - \alpha)}$$

Dunque I_2 è convergente se

$$\operatorname{Re} s - \alpha > 0$$

Riassumendo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt = \underbrace{\int_0^{t_k} e^{-ts} x(t)\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{t_k}^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt}_{I_2}$$

I_1 è convergente $\forall s \in \mathbb{C}$

I_2 è convergente $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \alpha$

perciò $x(t)$ è L – trasformabile per ogni $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \alpha$

Osservazione 1.
La dimostrazione appena vista mostra pure che:

ogni segnale causale, $\mathcal{C}$-tratti *e a durata limitata* è L- trasformabile

$$\text{per ogni } s \in \mathbb{C}$$

Infatti in tal caso $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt = \int_0^{T} e^{-ts} x(t)\,dt$

è convergente per ogni $s \in \mathbb{C}$

Corollario.

Un segnale causale, $\mathcal{C}$-tratti *e limitato* soddisfa l'ipotesi del Teorema

$$\left|x(t)\right| \leq ke^{\alpha t}$$

con $\alpha = 0$ e per ogni *t* ; dunque:

ogni segnale causale, $\mathcal{C}$-tratti e *limitato* è L- trasformabile

$$\text{per ogni } s \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} s > 0$$

Si può dimostrare che:

Teorema.

Se $x(t)$ è un segnale causale L- trasformabile in un punto $s_o \in \mathbb{C}$; allora è trasformabile

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad \text{con } \operatorname{Re} s \geq \operatorname{Re} s_o$$

Dunque, l'insieme di convergenza

- o è vuoto
- o è un semipiano destro

Si dà allora la seguente:

Definizione.

Se *x*(*t*) è un segnale causale L- trasformabile si dice che $\lambda \in \mathbb{R}$ è l' *ascissa di convergenza* per $(\mathcal{L}x)(s)$ se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\, dt$$

- <u>è</u> convergente $\forall s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \lambda$
- <u>non è</u> convergente in alcun punto $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s < \lambda$

Se l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\, dt$$

- non è convergente in alcun punto del piano complesso, si dice che

$$\lambda = +\infty$$

- è convergente $\forall s \in \mathbb{C}$, si dice che

$$\lambda = -\infty$$

PROPRIETA' ELEMENTARI

1. Linearità.

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono due segnali causali entrambi L- trasformabili con ascisse di convergenza rispettivamente λ_1 e λ_2 , allora per ogni $A, B \in \mathbb{C}$ vale:

$$\left(\mathcal{L}\left(A x_1 + B x_2\right)\right)(s) = A\left(\mathcal{L}x_1\right)(s) + B\left(\mathcal{L}x_2\right)(s)$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \max\left\{\lambda_1, \lambda_2\right\}$$

2. Traslazione nel tempo (Ritardo).

Sia $x(t)$ un segnale causale L- trasformabile con ascissa di convergenza λ.
Allora per ogni $a > 0$ il segnale $x(t-a)$ è ancora L trasformabile e vale :

$$\mathcal{L}\left(x(t-a)\right)(s) = e^{-as}\left(\mathcal{L}x\right)(s)$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \lambda$$

Infatti:

poiché $x(t)$ è causale,

$$x(t-a)=0 \quad \text{per} \quad t-a<0$$

e quindi

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts}x(t-a)\,dt = \int_a^{+\infty} e^{-ts}x(t-a)\,dt \underset{t-a=u}{=}$$

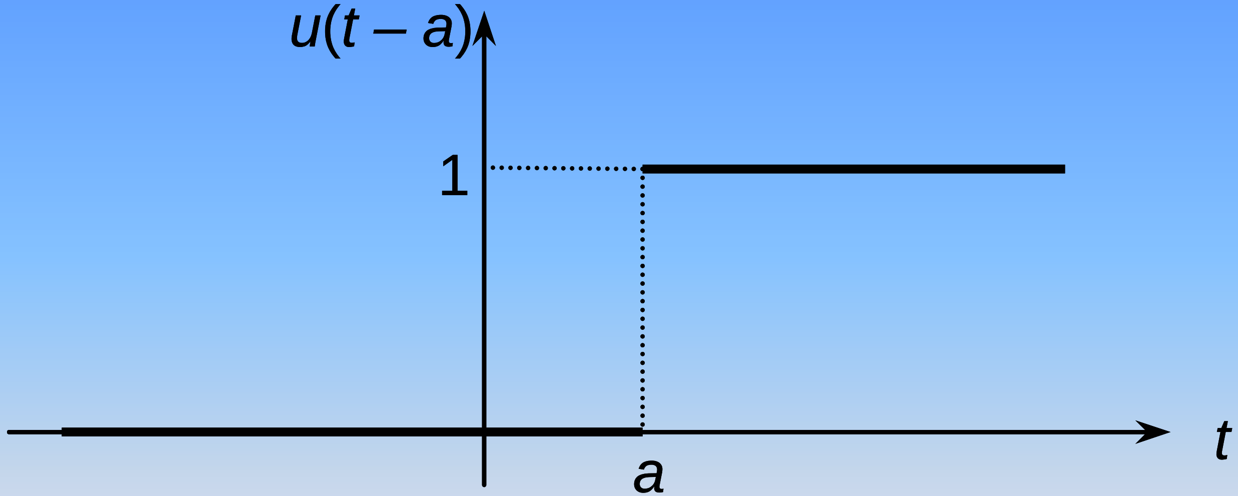
$$= \int_0^{+\infty} e^{-(u+a)s}x(u)\,du = e^{-as}(\mathcal{L}x)(s)$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \lambda$$

Esempio 47.

Consideriamo il segnale

$$u(t - \mathrm{a}) \qquad (\mathrm{a} > 0)$$



Poiché

$$(\mathcal{L}u)(s) = \frac{1}{s} \qquad \text{e} \quad \lambda_u = 0$$

(vedi Esempio 46) otteniamo:

$$\big(\mathcal{L}u(t-\mathrm{a})\big)(s) = \frac{e^{-\mathrm{a}s}}{s} \qquad \text{in} \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

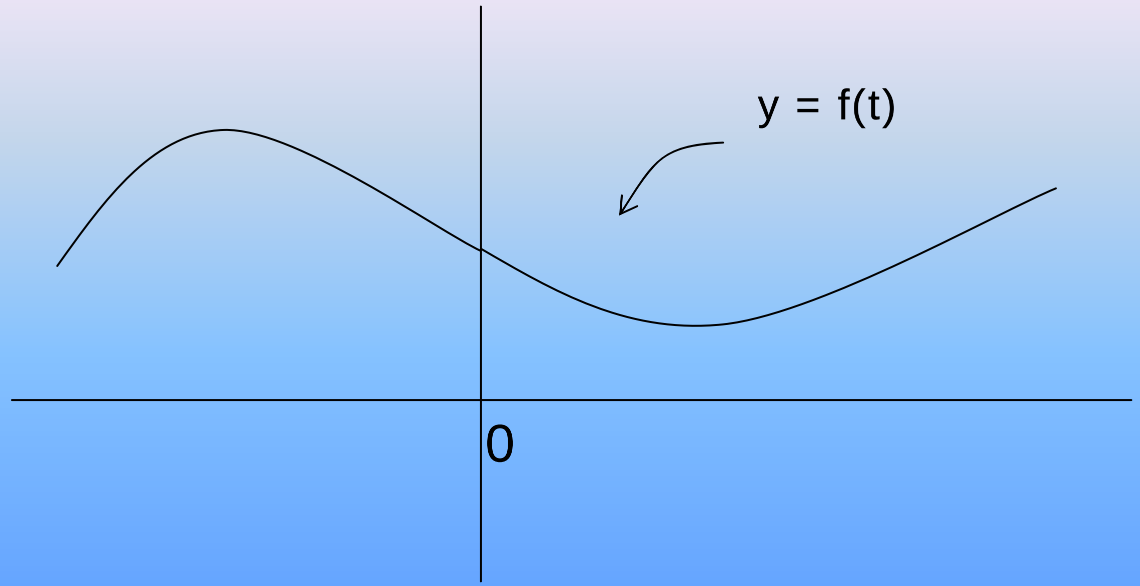
Osservazione.

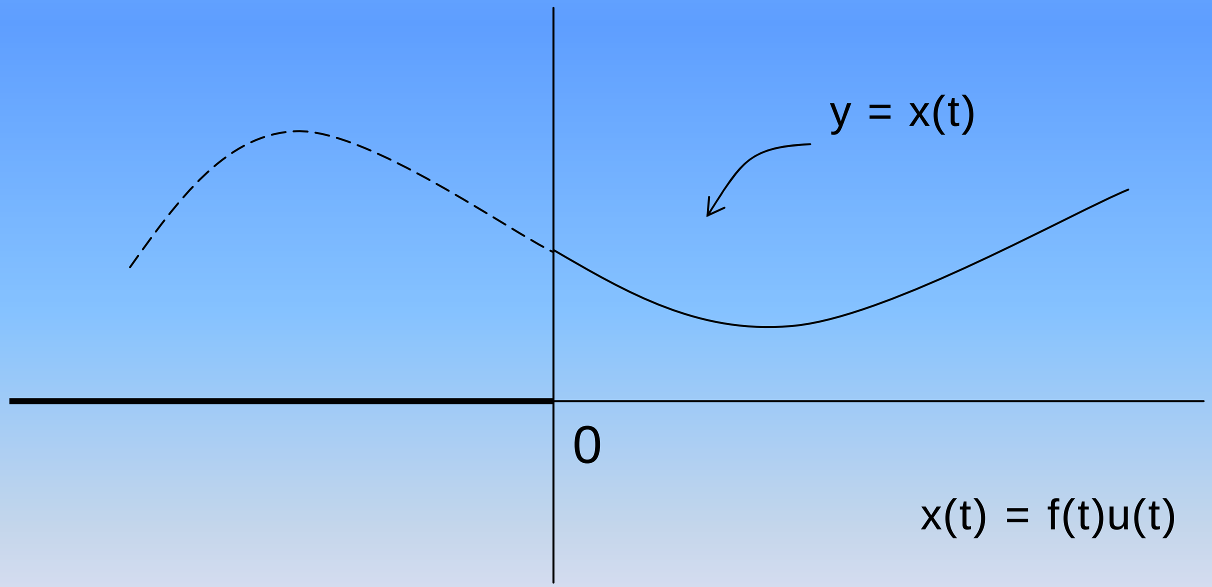
Se *f* è una delle note funzioni elementari definita su tutto $\mathbb{R}$, *anche se f* ***non*** è *causale*, in letteratura tecnica si utilizza il simbolo

$$(\mathcal{L}f)(s)$$

intendendo

$$\mathcal{L}\big(u(t)\,f(t)\big)(s)$$



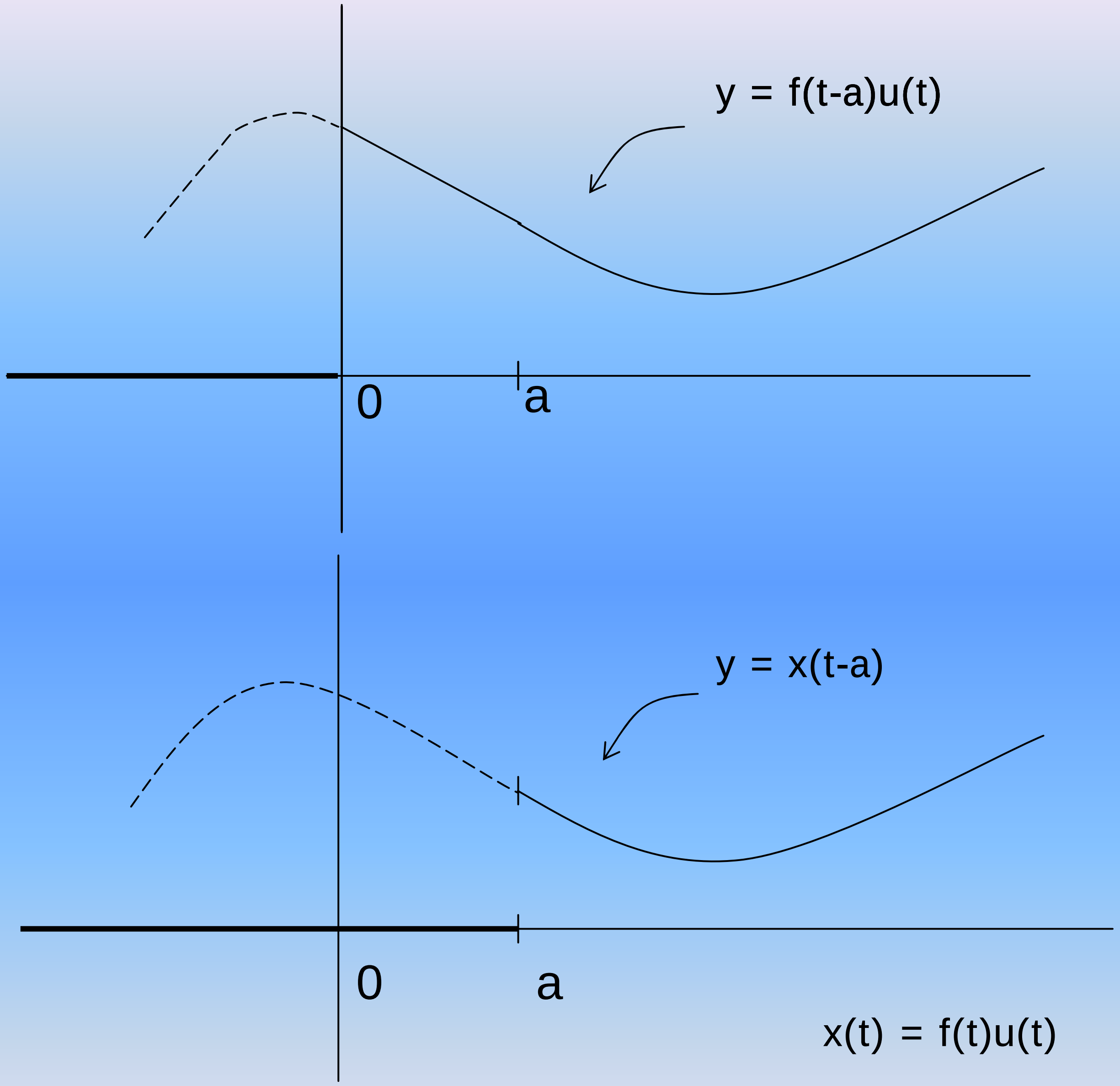


$x(t) = f(t)u(t)$

Ciò può portare a qualche errore, in particolare nel caso in cui si debbano trasformare segnali traslati.

Per questo motivo si consiglia, nell'usare il Teorema del ritardo, di utilizzare l'espressione:

$$\mathcal{L}\left(f\left(t-a\right)\underbrace{u\left(t-a\right)}\right)\left(s\right)=e^{-as}\left(\mathcal{L}f\right)\left(s\right)$$



$x(t) = f(t)u(t)$

$x(t-a) = f(t-a)u(t-a)$

Esempio 47bis.

Sia $f(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{a} > 0$

Evidentemente,

se

$$f(t - \mathrm{a}) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

cosicché

$$\mathcal{L}\big(f(t-\mathrm{a})\big)(s) = \frac{1}{s} \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

se si intende (erroneamente) che sia

$$\mathcal{L}\big(f(t-\mathrm{a})\big)(s) = \mathcal{L}\big(f(t-\mathrm{a})u(t)\big)(s)$$

$$f(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad\qquad \mathrm{a} > 0$$

Invece

$$x(t - \mathrm{a}) = f\left(t - \mathrm{a}\right)u(t - \mathrm{a}) = u(t - \mathrm{a})$$

cosicché

$$\mathcal{L}\left(f\left(t - \mathrm{a}\right)\right)\left(s\right) = \frac{e^{-\mathrm{a}s}}{s} \qquad\qquad \operatorname{Re} s > 0$$

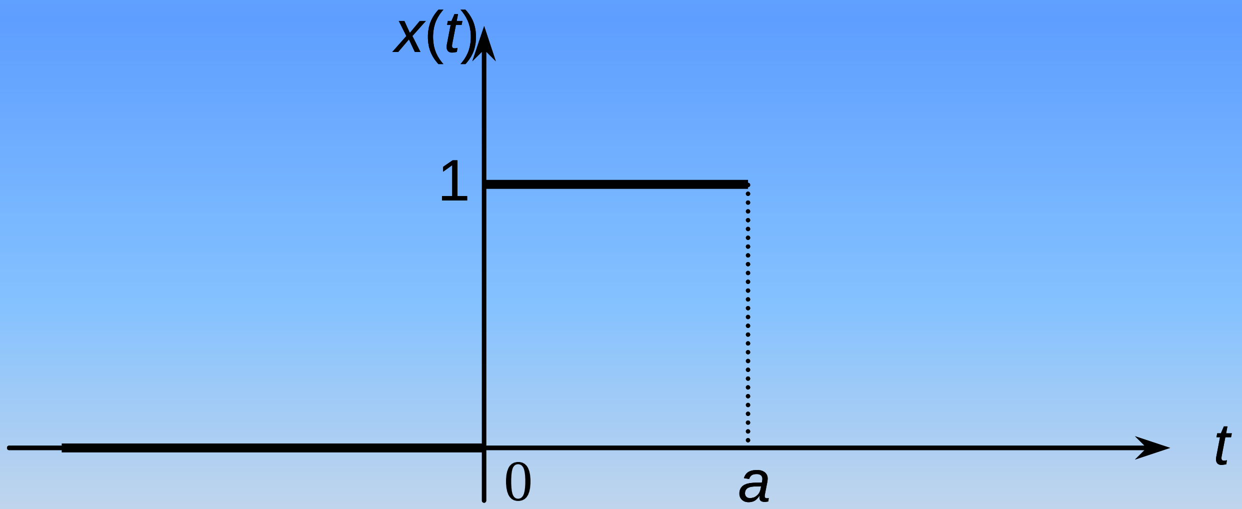
se si intende, correttamente, che sia

$$\mathcal{L}\left(f\left(t - \mathrm{a}\right)\right)\left(s\right) = \mathcal{L}\left(f\left(t - \mathrm{a}\right)u(t - \mathrm{a})\right)\left(s\right)$$

Esempio 48.

Consideriamo il segnale

$$x(t) = u(t) - u(t-\mathrm{a}) \qquad (\mathrm{a} > 0)$$



Per linearità:

$$x(t) = u(t) - u(t - \mathrm{a})$$

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\mathrm{a}s}}{s} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-\mathrm{a}s}\right)$$

Si noti che, poiché il segnale *x*(*t*) è a durata limitata, la trasformata è definita

$$\forall s \in \mathbb{C}$$

Infatti, la trasformata

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-\mathrm{a}\,s}\right)$$

è prolungabile in s=0, in quanto

$$\lim_{s \to 0} \frac{1 - e^{-\mathrm{a}\,s}}{s} = \mathrm{a}$$

ed infatti (area del rettangolo):

$$(\mathcal{L}x)(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t0} x(t)\,dt = \int_0^{\mathrm{a}} 1\,dt = \mathrm{a}$$

Osservazione.

Il risultato ottenuto non è in contraddizione con la proprietà di linearità vista sopra (che suggerisce $\mathrm{Re}\, s > 0$).
La proprietà, infatti, fornisce una condizione *sufficiente* per la trasformabilità di una combinazione lineare, ma non ne stabilisce l’ascissa di convergenza

3. Cambiamento di scala.

Sia $x(t)$ un segnale causale L- trasformabile con ascissa di convergenza λ.

Allora per ogni *k>0* vale:

$$\mathcal{L}\left(x(kt)\right)(s) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(x)\left(\frac{s}{k}\right)$$

$$\text{in } \operatorname{Re} s > k\lambda$$

4. Traslazione in *s*.

Sia $x(t)$ un segnale causale L- trasformabile con ascissa di convergenza λ.

Allora per ogni $A \in \mathbb{C}$ vale

$$\mathcal{L}\left(e^{At}x(t)\right)(s) = (\mathcal{L}\,x)(s - A)$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \lambda + \operatorname{Re} A$$

Esempio 49.

Consideriamo il segnale

$$x(t) = e^{At}\, u(t) \qquad (A \in \mathbb{C})$$

Per la proprietà appena vista:

$$\mathcal{L}\left(e^{At}u(t)\right)(s) = (\mathcal{L}u)(s-A) = \frac{1}{s-A}$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} A$$

$$\mathcal{L}\left(e^{At}u(t)\right)(s) = (\mathcal{L}u)(s-A) = \frac{1}{s-A}$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} A$$

Osserviamo, ancora una volta, che in letteratura tecnica tale risultato si trova scritto:

$$\left(\mathcal{L}e^{At}\right)(s) = \frac{1}{s-A} \qquad\qquad \text{in} \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} A$$

Esempio 50.

Consideriamo il segnale

$$x(t) = \cos(\omega t) \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

Tale segnale è limitato e dunque di certo L-trasformabile in $\operatorname{Re} s > 0$

Con la scrittura $\mathcal{L}\big(\cos(\omega t)\big)(s)$ intendiamo ovviamente

$$\mathcal{L}\big(u(t)\,\cos(\omega t)\big)(s)$$

Applicando le formule di Eulero, abbiamo:

$$\mathcal{L}(\cos \omega t)(s) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)(s) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\mathcal{L}e^{j\omega t}\right)(s) + \left(\mathcal{L}e^{-j\omega t}\right)(s)\right]$$

e utilizzando il risultato dell'Esempio 49:

$$\mathcal{L}(\cos \omega t)(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right]$$

$$\mathrm{Re}\, s > 0$$

$$\mathcal{L}(\cos \omega t)(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s^2 + \omega^2}\left[s \cancel{+ j\omega} + s \cancel{- j\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Analogamente si prova che:

$$\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{in} \quad \mathrm{Re}\, s > 0$$

5. Trasformata di un segnale causale periodico.

Sia $x(t)$ un segnale causale $\mathcal{C}$-tratti e periodico di periodo T_0 ; allora $x(t)$ è L-trasformabile in $\operatorname{Re} s > 0$ e vale:

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{1-e^{-T_o s}} \int_0^{T_o} e^{-ts} x(t)\, dt \quad \text{in} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Infatti, poiché *x*(*t*) è periodico di periodo T_0 per *t>0*, possiamo scrivere:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT_o}^{(k+1)T_o} e^{-ts} x(t)\,dt \underset{\substack{x \text{ periodico:} \\ x(t)=x(t-kT_o)}}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT_o}^{(k+1)T_o} e^{-ts} x(t-kT_o)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ t-kT_o=u}}{=}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{T_o} e^{-(u+kT_o)s} x(u)\,du = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_o s} \int_0^{T_o} e^{-us} x(u)\,du$$

Il segnale $x(t)$ è continuo a tratti, quindi il suo integrale sull' intervallo limitato $\left[0, T_0\right]$ esiste finito; poiché non dipende da *k*, possiamo scrivere:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_o s} \int_0^{T_o} e^{-us} x(u)\, du =$$

$$= \left(\int_0^{T_o} e^{-us} x(u)\, du \right) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_o s}$$

La serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_o s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-T_o s}\right)^k$$

è una serie geometrica di ragione $e^{-T_o s}$

Ricordiamo che:
una serie geometrica $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$
di ragione *A* converge se e solo se $|A| < 1$
e in tal caso
$$\sum_{k=0}^{+\infty} A^k = \frac{1}{1-A}$$

Perciò la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_o s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-T_o s}\right)^k$

converge con somma $\dfrac{1}{1-e^{-T_o s}}$

se e solo se

$$\left|e^{-T_o s}\right| = \left|\frac{1}{e^{T_o s}}\right| < 1$$

D'altra parte

$$\left|\frac{1}{e^{T_o s}}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|e^{T_o s}\right| > 1 \Leftrightarrow e^{T_o \operatorname{Re} s} > 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} s > 0$$

Per concludere:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts} x(t)\,dt = \left(\int_0^{T_o} e^{-us} x(t)\,dt \right) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_o s} =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-T_o s}} \int_0^{T_o} e^{-us} x(t)\,dt$$

se e solo se $\operatorname{Re} s > 0$

Esempio 51.

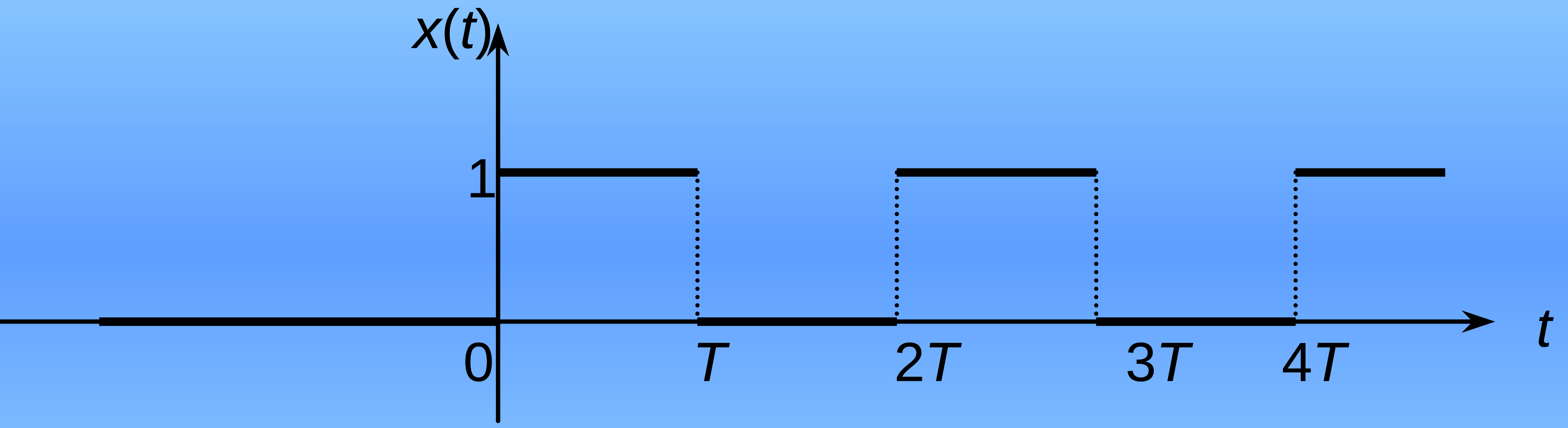
Consideriamo il segnale

$$x_0(t) = rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \qquad (T > 0)$$

A partire da esso costruiamo il segnale causale periodico

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_0(t - 2nT)$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_0(t - 2nT) \qquad x_0(t) = rect\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$



E' un segnale causale, continuo a tratti e periodico di periodo $2T$ per $t > 0$, pertanto è L-trasformabile in $\operatorname{Re} s > 0$

Vale allora per $\operatorname{Re} s > 0$

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{1-e^{-2Ts}} \int_0^{2T} e^{-ts} x_0(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2Ts}} \int_0^{T} e^{-ts}\,dt = \frac{1}{1-e^{-2Ts}} \left[-\frac{e^{-ts}}{s} \right]_0^T =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-e^{-2Ts}} \left(1 - e^{-Ts} \right)$$

$$(\mathcal{L}x)(s) = \frac{1}{1-e^{-2Ts}} \cdot \frac{1}{s}\left(1-e^{-Ts}\right) =$$

$$= \frac{1}{s} \frac{\cancel{\left(1-e^{-Ts}\right)}}{\left(1+e^{-Ts}\right)\cancel{\left(1-e^{-Ts}\right)}} = \frac{1}{s\left(1+e^{-Ts}\right)}$$

$$\operatorname{Re} s > 0$$

6. Derivata della trasformata.

Sia $x(t)$ un segnale causale L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$. Allora:

- $t\,x(t)$ è L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$
- $(\mathcal{L}x)(s)$ è derivabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$
- $\frac{d}{ds}(\mathcal{L}x)(s) = -\mathcal{L}\big(tx(t)\big)(s) \qquad \operatorname{Re} s > \lambda$

Ricordiamo che:

Se *F* è una funzione complessa definita in *A* aperto del piano complesso

$$F : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

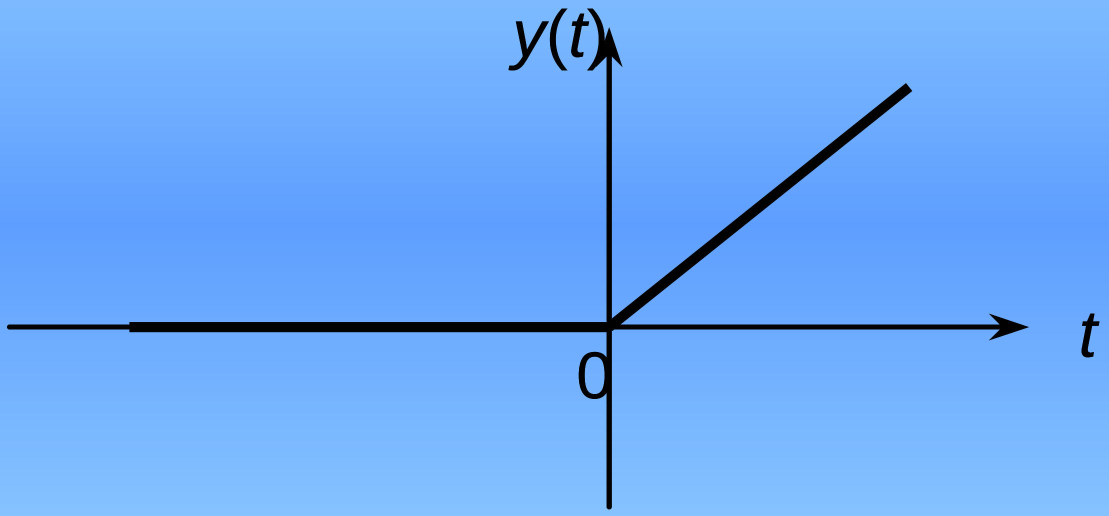
F è derivabile in $s_o \in A$ se esiste, finito,

$$\lim_{s \to s_o} \frac{F(s) - F(s_o)}{s - s_o} = l \in \mathbb{C}$$

$$l = \frac{dF}{ds}(s_o)$$

Esempio 52.

Consideriamo il segnale $y(t) = t\,u(t)$



Poiché $u(t)$ è L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > 0$, per il Teorema precedente anche $t\,u(t)$ lo è.

Inoltre, lo stesso Teorema assicura che:

$$\mathcal{L}\big(t\,u(t)\big)(s) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}u)(s) =$$

$$= -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

in $\operatorname{Re} s > 0$

Esempio 53.

Consideriamo il segnale

$$y(t) = t \sin \omega t \qquad (\omega \in \mathbb{R})$$

Poiché $\sin \omega t$ è L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > 0$,
Anche $t \sin \omega t$ lo è, e vale:

$$\mathcal{L}(t \sin \omega t)(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin \omega t)(s) =$$

$$= -\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} \quad \text{in} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

6bis. Derivate successive della trasformata.

Sia $x(t)$ un segnale causale L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$. Allora:

$(\mathcal{L}x)(s)$ ha derivata di ogni ordine e $\forall n \in \mathbb{N}$ vale:

$$\frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}x)(s) = (-1)^n \mathcal{L}\left(t^n x(t)\right)(s)$$

$$\operatorname{Re} s > \lambda$$

Infatti:

per il teorema precedente se $x(t)$ è L - trasformabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$ anche $t\,x(t)$ lo è, e vale

$$\mathcal{L}\big(t\,x(t)\big)(s) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}x)(s)$$

Poiché ora il segnale $t\,x(t)$ soddisfa le ipotesi richieste, possiamo applicare di nuovo il teorema al segnale $t\,x(t)$ stesso. Otteniamo che:

- $t^2 x(t)$ è L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$
- $\mathcal{L}\big(tx(t)\big)(s)$ è derivabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$
- $\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\big(t\,x(t)\big)(s) = -\mathcal{L}\big(t^2 x(t)\big)(s) \qquad \operatorname{Re} s > \lambda$

Poiché

$$\mathcal{L}\big(t\,x(t)\big)(s) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}x)(s)$$

segue

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\big(t\,x(t)\big)(s) = -\frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}x)(s)$$

e dunque, da:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(t\,x(t)\right)(s) = -\mathcal{L}\left(t^2 x(t)\right)(s)$$

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(t\,x(t)\right)(s) = -\frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}x)(s)$$

segue

$$\frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}x)(s) = \mathcal{L}\left(t^2\,x(t)\right)(s) \qquad \operatorname{Re} s > \lambda$$

(la tesi per $n = 2$)

Ora anche il segnale $t^2 x(t)$ soddisfa le ipotesi del teorema. Possiamo allora dedurre che:

- $t^3 x(t)$ è L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$
- $\mathcal{L}\left(t^2 x(t)\right)(s)$ è derivabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$
- $\dfrac{d}{ds}\mathcal{L}\left(t^2 x(t)\right)(s) = -\mathcal{L}\left(t^3 x(t)\right)(s)$

Di nuovo, poiché per il passo precedente:

$$\mathcal{L}\left(t^2\, x(t)\right)(s) = \frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}x)(s)$$ segue

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(t^2 x(t)\right)(s) = \frac{d^3}{ds^3}(\mathcal{L}x)(s)$$

cosicché $$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(t^2 x(t)\right)(s) = -\mathcal{L}\left(t^3 x(t)\right)(s)$$

diventa

$$\frac{d^3}{ds^3}(\mathcal{L}x)(s) = -\mathcal{L}\left(t^3\, x(t)\right)(s)$$

$$\operatorname{Re} s > \lambda$$

$$\frac{d^3}{ds^3}(\mathcal{L}x)(s) = -\mathcal{L}\left(t^3\, x(t)\right)(s)$$

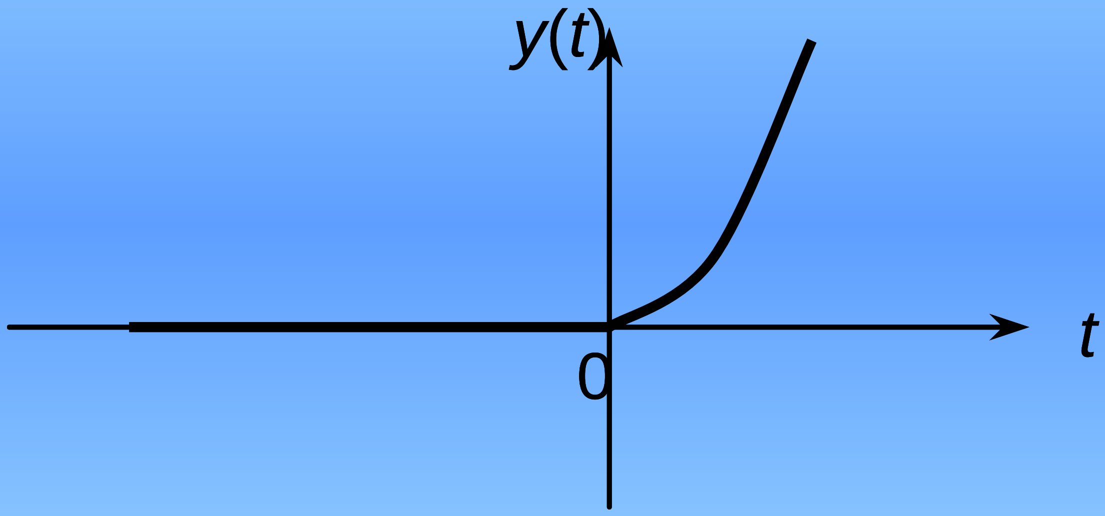
$$\operatorname{Re} s > \lambda$$

che è la tesi per $n = 3$

Procedendo poi per induzione, si può provare la tesi per ogni $n \in \mathbb{N}$

Esempio 52bis.

Consideriamo il segnale $y(t) = t^2 u(t)$



Poiché $u(t)$ è L- trasformabile in $\mathrm{Re}\, s > 0$, per il Teorema delle derivate successive anche $t^2 u(t)$ lo è.

Inoltre, lo stesso Teorema assicura che:

$$\mathcal{L}\left(t^2u(t)\right)(s)=\frac{d^2}{ds^2}(\mathcal{L}u)(s)=$$

$\operatorname{Re} s>0$

$$=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{2}{s^3}$$

Più in generale, si ha che: $\forall n\in\mathbb{N}$.

$$\mathcal{L}\left(t^nu(t)\right)(s)=\frac{n!}{s^{n+1}}\qquad \operatorname{Re} s>0$$

L'espressione $\mathcal{L}\left(t^n u(t)\right)(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

viene anche scritta:

$$\mathcal{L}\left(t^n\right)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

Da essa si ottiene, $\forall A \in \mathbb{C}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{At} t^n}{n!}\right)(s) = \frac{1}{n!}\mathcal{L}\left(t^n\right)(s-A) = \frac{1}{(s-A)^{n+1}}$$

$$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} A$$

7. Trasformata della convoluzione.

Siano *x*(*t*) e *y*(*t*) due opportuni segnali causali L- trasformabili con ascissa di convergenza λ_1 e λ_2 rispettivamente. Allora:

$$\mathcal{L}\left(\left(x*y\right)\right)\left(s\right)=\left(\mathcal{L}x\right)\left(s\right)\cdot\left(\mathcal{L}y\right)\left(s\right)$$

$$\text{in}\quad \operatorname{Re} s>\max\left(\lambda_1,\lambda_2\right)$$

8. Trasformata dell'integrale.

Sia $x(t)$ segnale $\mathcal{C}$-tratti, causale e L-trasformabile con ascissa di convergenza λ
Allora:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right)(s) = \frac{1}{s}(\mathcal{L}x)(s)$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \max(\lambda, 0)$$

Infatti, ricordando che:

$$(x*u)(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0$$

e

$$(x*u)(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau \quad \text{per} \quad t \geq 0$$

applicando la trasformata alla convoluzione si ottiene:

$$\mathcal{L}(x*u)(s) = (\mathcal{L}x)(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \max(\lambda, 0)$$

9. Trasformata della derivata.

Sia $x(t)$ segnale causale, $\mathcal{C}^1$-tratti e continuo per $t > 0$.
Se $x(t)$ è L- trasformabile con ascissa di convergenza λ, allora anche $x'(t)$ è L- trasformabile e vale:

$$\left(\mathcal{L}x'\right)(s) = s\left(\mathcal{L}x\right)(s) - x\left(0^+\right)$$

$$\text{in} \quad \operatorname{Re} s > \lambda$$

Osservazione.

L'ipotesi che $x(t)$ causale $\mathcal{C}^1$-tratti sia continuo per $t > 0$ implica che $x(t)$ ha al più un punto di discontinuità di tipo salto nel punto 0.
In tal punto il salto $s(0)$ vale:

$$s(0) = x\left(0^+\right) - x\left(0^-\right) = x\left(0^+\right)$$

TRASFORMATA DI LAPLACE VS TRASFORMATA DI FOURIER

Sia $x(t)$ un segnale *causale.*
Se l'integrale di Fourier ad esso relativo è convergente per ogni $f \in \mathbb{R}$, risulta:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} x(t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-(j2\pi f)t} x(t)\,dt = (\mathcal{L}x)(j2\pi f)$$

$$X(f) = (\mathcal{L}x)(j2\pi f) \qquad \forall f \in \mathbb{R}$$

Dunque:
se un segnale causale $x(t)$ è Fourier trasformabile per ogni $f \in \mathbb{R}$, allora:
esso è anche Laplace trasformabile in ogni punto *s* del piano complesso che sta sull’asse immaginario $(s = j2\pi f)$ e quindi anche in $\mathrm{Re}\, s \geq 0$

Viceversa:

se di un segnale causale $x(t)$ è nota la trasformata di Laplace $(\mathcal{L}x)(s)$, e **se** λ**<** ***0*** (λ ascissa di convergenza), allora:

è possibile ottenerne la trasformata di Fourier ponendo

$$X(f) = (\mathcal{L}x)(j2\pi f)$$

$$X(f) = (\mathcal{L}x)(j2\pi f)$$

Si noti che affinché l'uguaglianza scritta possa essere verificata, il semipiano di convergenza della trasformata di Laplace deve contenere l'asse immaginario, e ciò può avvenire **solo se** l'ascissa λ è negativa:

$$\lambda < \boldsymbol{0}$$

Esempio 54.

Consideriamo il segnale

$$x(t) = e^{-t/T}u(t) \qquad (T > 0)$$

Vale (traslazione in *s*):

$$(\mathcal{L}x)(s) = (\mathcal{L}u)\left(s + \frac{1}{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{T}{sT + 1} \qquad \operatorname{Re} s > -\frac{1}{T}$$

Poiché $\lambda = -\dfrac{1}{T} < 0$

possiamo calcolare la trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t)$ da $(\mathcal{L}x)(s)$ ponendo :

$$X(f) = (\mathcal{L}x)(j2\pi f) = \frac{T}{j2\pi fT + 1}$$

(vedi Esempio 20).

Esempio 55.

Consideriamo il segnale $u(t)$:
sappiamo che

$$(\mathcal{L}u)(s) = \frac{1}{s}$$

ha ascissa di convergenza $\lambda = 0$
Per tale segnale dunque la trasformata di Fourier potrebbe non essere ottenibile dalla trasformata di Laplace nel modo indicato precedentemente.

Infatti

$$(\mathcal{L}u)(j2\pi f) = \frac{1}{j2\pi f}$$

mentre la trasformata di Fourier di $u(t)$ è:

$$U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$$

TRASFORMATA DI LAPLACE E DISTRIBUZIONI

Sia *T* una “opportuna” distribuzione soddisfacente la condizione $e^{-\lambda t}T \in \mathcal{S}'$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si definisce trasformata di Laplace di *T* la funzione di variabile complessa:

$$(\mathcal{L}T)(s) = T\left(e^{-ts}\right) \quad \text{in} \quad \operatorname{Re} s > \lambda$$

Esempio 56.

Consideriamo la distribuzione δ di Dirac.

Poiché $\quad e^{-\lambda t}\delta \in \mathcal{S}'$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$(e^{-\lambda t}\delta = \delta)$ la δ è L- trasformabile e la sua trasformata di Laplace vale

$$(\mathcal{L}\delta)(s) = \delta\left(e^{-ts}\right) = e^{0s} = 1 \qquad \forall s \in \mathbb{C}$$

Le proprietà elementari della trasformata di Laplace:

- linearità
- traslazione in t
- cambiamento di scala
- traslazione in s

restano valide anche per le distribuzioni.

In particolare, da $\left(\mathcal{L}\delta\right)\left(s\right)=1 \quad \forall s\in\mathbb{C}$

- $\mathcal{L}\left(\delta\left(t-t_o\right)\right)\left(s\right)=e^{-t_o s}\left(\mathcal{L}\delta\right)\left(s\right)=e^{-t_o s}$
- $\mathcal{L}\left(\delta\left(kt\right)\right)\left(s\right)=\dfrac{1}{k}\left(\mathcal{L}\delta\right)\left(\dfrac{s}{k}\right)=\dfrac{1}{k}$
- $\mathcal{L}\left(e^{At}\delta\left(t\right)\right)\left(s\right)=\left(\mathcal{L}\delta\right)\left(s-A\right)=1$

$$\forall s\in\mathbb{C}\;,\;\; t_0>0,\; k>0,\;\; A\in\mathbb{C}$$

Vale pure: Derivata della trasformata.

Sia T distribuzione L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$. Allora:

- $tT(t)$ è L- trasformabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$
- $(\mathcal{L}T)(s)$ è derivabile in $\operatorname{Re} s > \lambda$
- $\frac{d}{ds}(\mathcal{L}T)(s) = -\mathcal{L}(tT(t))(s) \qquad \operatorname{Re} s > \lambda$

Si ha poi: <u>Trasformata della derivata</u>.

Sia *T* distribuzione L- trasformabile in $\mathrm{Re}\, s > \lambda$. Allora:

anche la sua derivata distribuzionale *DT* è L- trasformabile in $\mathrm{Re}\, s > \lambda$ e vale:

$$\mathcal{L}(DT)(s) = s(\mathcal{L}T)(s) \quad \text{in} \quad \mathrm{Re}\, s > \lambda$$

In particolare, da $(\mathcal{L}\delta)(s) = 1 \quad \forall s \in \mathbb{C}$

- $\mathcal{L}(D\delta)(s) = s$
- $\mathcal{L}\left(D^{(n)}\delta\right)(s) = s^n$
- $\mathcal{L}\left(e^{At}D^{(n)}\delta\right)(s) = (s - A)^n$
- $\mathcal{L}\left(e^{At}D^{(n)}\delta(t - t_o)\right)(s) = e^{-(s-A)t_o}(s - A)^n$

$$\forall s \in \mathbb{C}\ ,\ \ t_0 > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \ A \in \mathbb{C}$$

Osservazione.

Se $x(t)$ è segnale causale, $\mathcal{C}^1$-tratti e continuo per $t > 0$, sia $x(t)$ che $x'(t)$ possono essere considerati anche come distribuzioni L- trasformabili.
Valgono perciò contemporaneamente

$$\left(\mathcal{L}x'\right)(s) = s\left(\mathcal{L}x\right)(s) - x\left(0^+\right)$$

$$\mathcal{L}\left(Dx\right)(s) = s\left(\mathcal{L}x\right)(s)$$

$$(\mathcal{L}x')(s) = s(\mathcal{L}x)(s) - x(0^+)$$

$$\mathcal{L}(Dx)(s) = s(\mathcal{L}x)(s)$$

Le due espressioni sono **solo apparentemente** contraddittorie.

Infatti, per il segnale in questione,

$$Dx = x' + s(0)\delta$$

perciò:

$$(\mathcal{L}x')(s) = s(\mathcal{L}x)(s) - x(0^+)$$

$$\mathcal{L}(Dx)(s) = s(\mathcal{L}x)(s)$$

$$Dx = x' + s(0)\delta \qquad s(0) = x(0^+) - \underbrace{x(0^-)}_{=0} = x(0^+)$$

$$\mathcal{L}(Dx)(s) = (\mathcal{L}x')(s) + s(0)(\mathcal{L}\delta)(s) =$$

$$= s(\mathcal{L}x)(s) - x(0^+) + s(0)\cdot 1 =$$

$$= s(\mathcal{L}x)(s) - \cancel{x(0^+)} + \cancel{x(0^+)} =$$

$$= s(\mathcal{L}x)(s)$$

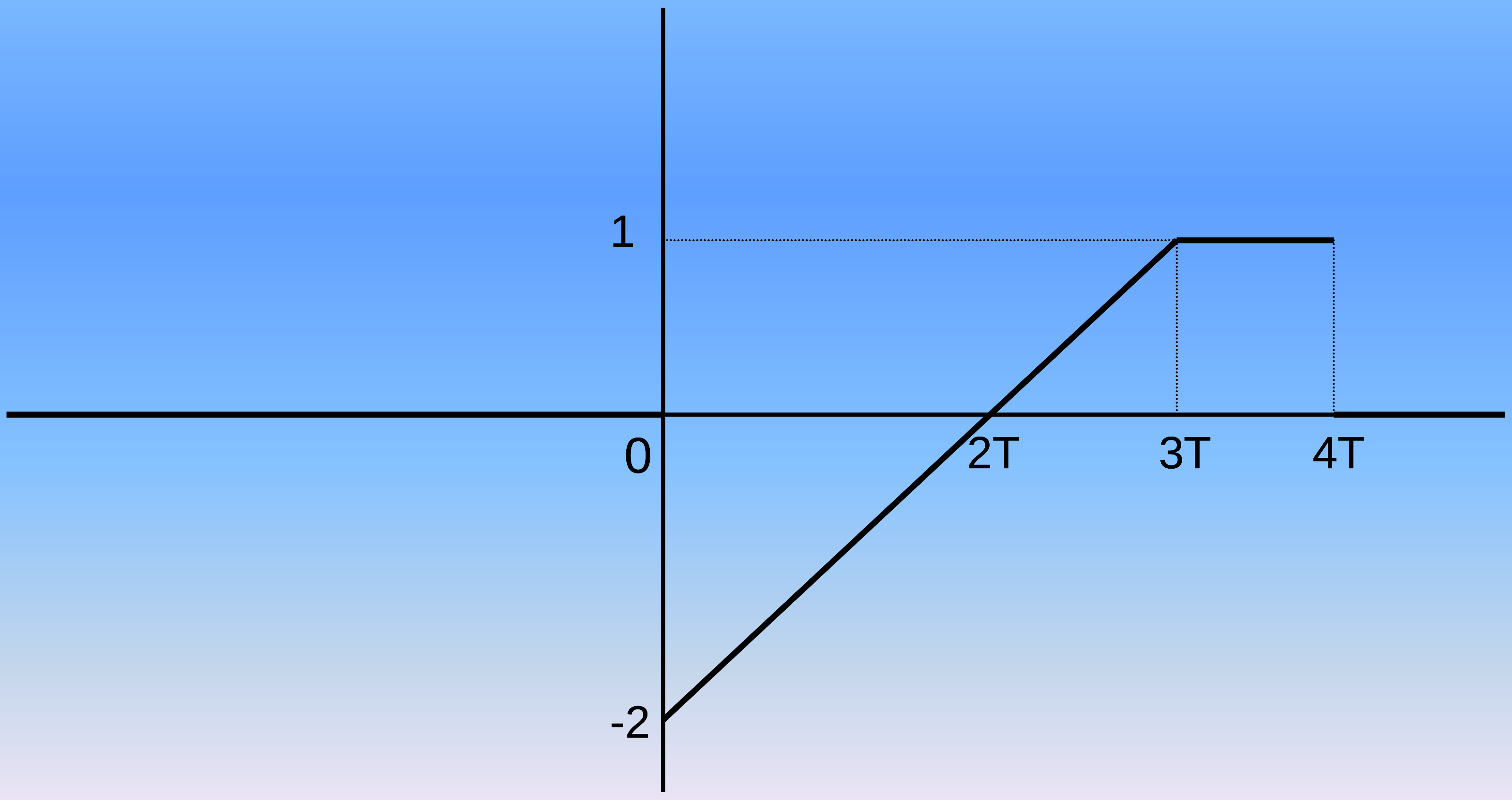
Esempio 56 bis.

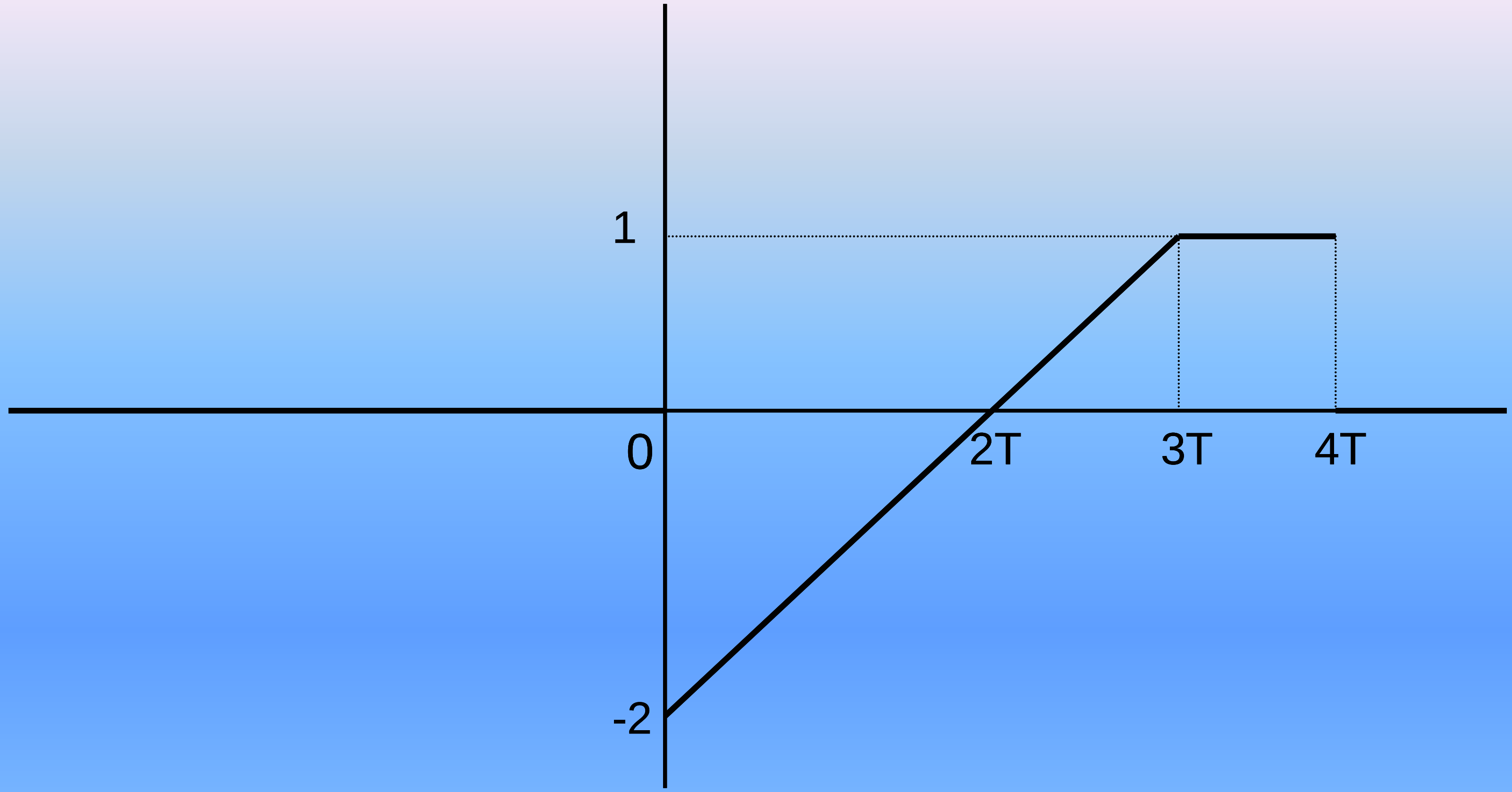
Sia

$$x(t) = \left[1 - 3\, triang\left(\frac{t}{3T} \right) \right] rect\left(\frac{t - 2T}{4T} \right)$$

(vedi Esempio 27 bis)

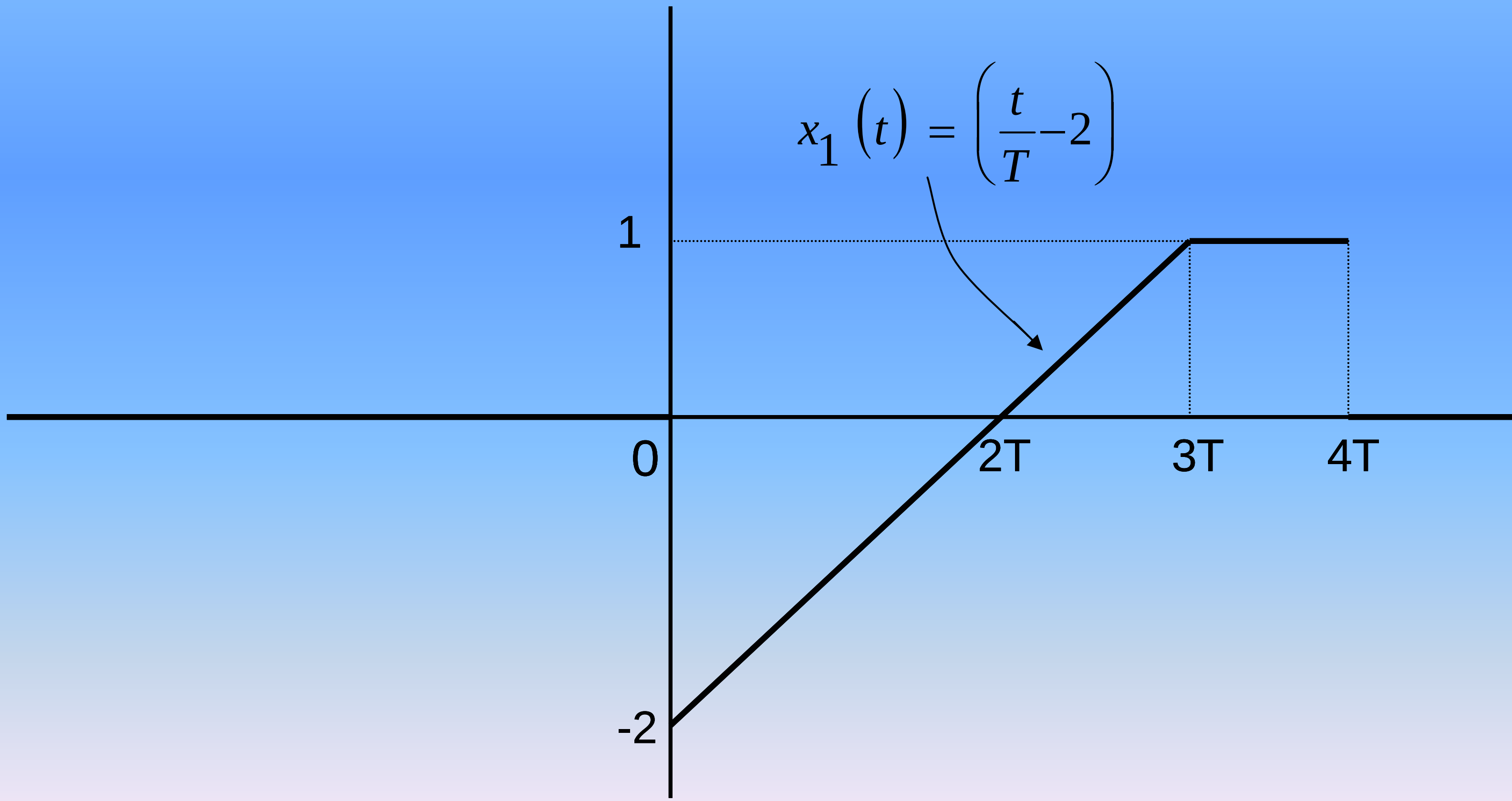
$$x(t)=\left[1-3\,triang\left(\frac{t}{3T}\right)\right]rect\left(\frac{t-2T}{4T}\right)$$

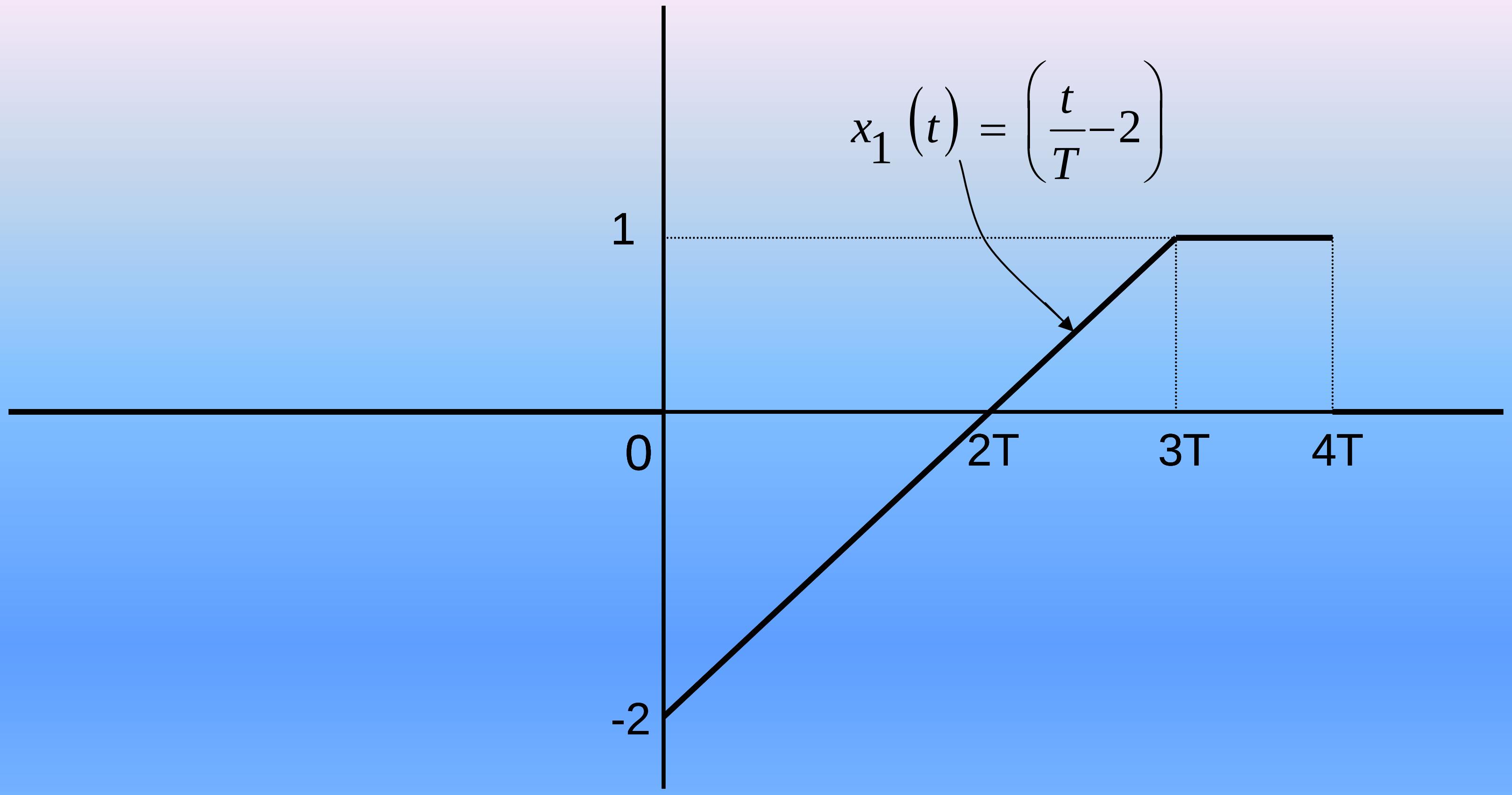




E' un segnale causale $\mathcal{C}$-tratti a durata limitata, quindi L- trasformabile con ascissa di convergenza $\lambda = -\infty$

Per calcolarne in modo elementare la L-trasformata occorre scriverne una più idonea espressione analitica.





$$x(t) = \left(\frac{t}{T} - 2\right)\left(u(t) - u(t-3T)\right) +$$

$$+ u(t-3T) - u(t-4T)$$

$$x(t)=\left(\frac{t}{T}-2\right)\left(u(t)-u(t-3T)\right)+$$

$$+u(t-3T)-u(t-4T)$$

Applicando la proprietà di linearità della L-trasformata:

$$\left(Lx\right)\left(s\right)=\frac{1}{T}L\left[t\left(u(t)-u(t-3T)\right)\right]\left(s\right)-$$

$$-2\left(Lu\right)(s)+2L\left(u(t-3T)\right)\left(s\right)+$$

$$+L\left(u(t-3T)\right)\left(s\right)-L\left(u(t-4T)\right)\left(s\right)$$

$$(Lx)(s) = \frac{1}{T} L\left[t\left(u(t) - u(t-3T)\right)\right](s) -$$

$$-2(Lu)(s) + 3L\left(u(t-3T)\right)(s) -$$

$$-L\left(u(t-4T)\right)(s)$$

e applicando il teorema di derivazione della trasformata:

$$(Lx)(s) = -\frac{1}{T}\frac{d}{ds}\left(L\left(u(t) - u(t-3T)\right)\right)(s) -$$

$$-2(Lu)(s) + 3L\left(u(t-3T)\right)(s) -$$

$$-L\left(u(t-4T)\right)(s)$$

$$(Lx)(s) = -\frac{1}{T}\frac{d}{ds}\Big(L\big(u(t)-u(t-3T)\big)\Big)(s) -$$
$$-2\big(Lu\big)(s) + 3L\big(u(t-3T)\big)(s) -$$
$$-L\big(u(t-4T)\big)(s)$$

Ricordando che $(Lu)(s) = \frac{1}{s}$ e il teorema del ritardo:

$$(Lx)(s) = -\frac{1}{T}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-3Ts}}{s}\right) -$$
$$-2\,\frac{1}{s} + 3\,\frac{e^{-3Ts}}{s} - \frac{e^{-4Ts}}{s}$$

$$(Lx)(s) = -\frac{1}{T}\frac{d}{ds}\left(\frac{1-e^{-3Ts}}{s}\right) - \frac{2}{s} +$$

$$+\frac{3e^{-3Ts}}{s} - \frac{e^{-4Ts}}{s} =$$

$$= -\frac{1}{Ts^2}\left(\cancel{3Te^{-3Ts}s} - 1 + e^{-3Ts}\right) - \frac{2}{s} +$$

$$+ \cancel{\frac{3e^{-3Ts}}{s}} - \frac{e^{-4Ts}}{s} =$$

$$= \frac{1}{Ts^2}\left(1 - e^{-3Ts}\right) - \frac{1}{s}\left(2 + e^{-4Ts}\right)$$

$$\left(Lx\right)(s)=\frac{1}{Ts^2}\left(1-e^{-3Ts}\right)-\frac{1}{s}\left(2+e^{-4Ts}\right)$$

se $s \neq 0$. Inoltre, da ovvie considerazioni geometriche sul grafico di $x(t)$ discende :

$$\left(Lx\right)(0)=-\frac{T}{2}$$

(vedi anche Esempio 27bis)

$$\left(Lx\right)\left(s\right)=\frac{1}{Ts^{2}}\left(1-e^{-3Ts}\right)-\frac{1}{s}\left(2+e^{-4Ts}\right)$$

Poiché $\lambda=-\infty$ è possibile ottenere da $\left(Lx\right)\left(s\right)$ la trasformata di Fourier $X\left(f\right)$ (e viceversa). E':

$$X\left(f\right)=\left(Lx\right)\left(2\pi jf\right)=$$

$$=\frac{1}{T\left(2\pi jf\right)^{2}}\left(1-e^{-3T\left(2\pi jf\right)}\right)-\frac{1}{\left(2\pi jf\right)}\left(2+e^{-4T\left(2\pi jf\right)}\right)$$

$$X(f) =$$

$$= \frac{1}{T(2\pi jf)^2}\left(1 - e^{-3T(2\pi jf)}\right) - \frac{1}{(2\pi jf)}\left(2 + e^{-4T(2\pi jf)}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi jf)}\left(\frac{1}{T2\pi jf}\left(1 - e^{-6\pi jfT}\right) - 2 - e^{-8\pi jfT}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi jf)}\left(\frac{e^{-3\pi jfT}}{T\pi f}\left(\frac{e^{3\pi jfT} - e^{-3\pi jfT}}{2j}\right) - 2 - e^{-8\pi jfT}\right) =$$

$$X(f) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi jf)}\left(\frac{e^{-3\pi jfT}}{T\pi f}\left(\frac{e^{3\pi jfT} - e^{-3\pi jfT}}{2j}\right) - 2 - e^{-8\pi jfT}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi jf)}\left(e^{-3\pi jfT}\,\frac{\sin(3\pi fT)}{T\pi f} - 2 - e^{-8\pi jfT}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi jf)}\left(e^{-3\pi jfT}\operatorname{sinc}(3fT) - 2 - e^{-8\pi jfT}\right)$$

(confronta con Esempio 27bis)