Esercizi per Analisi Matematica 1A

Prima settimana

30 settembre 2019

1 Numeri naturali e Principio di induzione

Esercizio 1.1. Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ prova a determinare (se esistono) i loro elementi minimi e massimi:

$A := \{111, 11, 1, 222, 22, 2, 333, 33, 3, 444, 44, 4\}$; $B := \{n \in \mathbb{N} \colon n \text{ è un multiplo di } 5\}$;
$C := \{n \in \mathbb{N} \colon n^2 \leqslant 20 + n\}$; $D := \{n \in \mathbb{N} \colon n^2 \geqslant 20 + n\}$;
$E := \{n \in \mathbb{N} \colon n \leqslant 20 + n^2\}$; $F := \{n \in \mathbb{N} \colon n \geqslant 20 + n^2\}$;
$G := B \cap C$; $H := B \cup C$.

Esercizio 1.2. Prova a determinare una formula per calcolare la somma dei primi n numeri naurali dispari e poi dimostra la sua validità usando il principio di induzione. Poi fai la stessa cosa per la spmma dei primi n numeri pari.

Esercizio 1.3. Dimostra per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $8^n - 1$ è un multiplo di 7.

Esercizio 1.4. Verifica per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $n < 2^n$.

2 Numeri razionali e allineamenti decimali

Esercizio 2.1. Calcola, eseguendo i calcoli a mano (divisione in colonna), la forma decimale delle seguenti frazioni:

$$\frac{7}{8}; \quad \frac{8}{7}; \quad \frac{13}{5}; \quad \frac{5}{13}; \quad \frac{11}{9}; \quad \frac{9}{11}.$$

Sei in grado di spiegare perché la rappresentazione decimale di un numero razionale possiede sempre un gruppo di cifre decimali che si ripete in modo periodico da un certo punto in poi?

Esercizio 2.2. Cerca un algoritmo per trasformare un numero con cifre decimali periodiche in una frazione razionale e poi applicalo per determinare le frazioni corrispondenti ai seguenti numeri (in cui le cifre che si ripetono in modo periodico sono indicate da una barra che le sovrasta):

$$3.125\overline{0};\quad 0.\overline{2};\quad 1.\overline{23};\quad 12.34\overline{5};\quad 12.3\overline{45};\quad 12.\overline{345}.$$

Esercizio 2.3. Dimostra che non esiste alcun numero razionale q tale che $q^2 = 3$.

Esercizio 2.4. Dimostra che non esiste alcun numero razionale q tale che $q^3 = 2$.

3 Proprietà dei campi algebrici ordinati

Esercizio 3.1. Stabilisci, giustificando le tue risposte, quali delle seguenti uguaglianze sono vere per generici numeri a, b, c e d (indicando eventualmente le condizioni necessarie affinché le espressioni abbiano senso):

$$\begin{aligned} \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d} &= \frac{a\cdot b}{c\cdot d}, & \frac{a}{c}-\frac{b}{d} &= \frac{a-b}{c-d},\\ \frac{a}{c}:\frac{b}{d} &= \frac{a:b}{c:d}, & \frac{a}{c}:2 &= \frac{a}{c:2},\\ (a+b):c &= (a:c)+(b:c), & a:(b+c) &= (a:b)+(a:c). \end{aligned}$$

Esercizio 3.2. Utilizzando gli assiomi di campo algebrico ordinato dimostra le seguenti proprietà:

- per ogni x si ha che $x \cdot 0 = 0$;
- se $x \cdot y = 0$ allora $x = 0$ oppure $y = 0$;
- se $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $x + y = 0$ allora $x = 0$ e $y = 0$;
- $x^2 \geqslant 0$ per ogni x;
- se $x \geqslant 1$ allora $x^n \geqslant 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3.3. Se x, y, z sono tre numeri tali che $xyz = 0$, cosa puoi dedurre a proposito di x, y, z? E se invece fosse stato $xyz < 0$?

Esercizio 3.4. Traduci la seguente frase in una formula matematica: *"Se la somma dei reciproci di due numeri positivi è* 1*, la somma dei due numeri è uguale al loro prodotto"*. Stabilisci quindi se l'enunciato è vero.

Esercizio 3.5. Cosa c'è di sbagliato nel seguente ragionamento?

- Supponiamo $x = y$;
- moltiplico entrambi i menbri per x e ottengo: $x^2 = xy$;
- sottraggo da entrambi i membri y^2 e ottengo: $x^2 - y^2 = xy - y^2$;
- fattorizzo entrambi i membri: $(x + y)(x - y) = y(x - y)$;
- semplifico per $x - y$ e mi rimane: $x + y = y$;
- per l'ipotesi iniziale $(x = y)$, ne segue che $2y = y$;
- semplifico per y e ottengo che $2 = 1$. WOW!

Esercizio 3.6. Risolvi le seguenti disequazioni:

$$\frac{x}{5-x} \geqslant -1; \qquad \frac{x+1}{3x+1} < 1; \qquad x^4 > 4x^2; \qquad \frac{1}{x-1} \leqslant \frac{1}{x+1}.$$

4 Sommatorie

Esercizio 4.1. Determina quali delle seguenti formule sono vere e quali sono false:

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k; \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_{k+1};$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} kb_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + kb_k); \qquad \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Esercizio 4.2. Scrivi una sommatoria che rappresenti la somma dei reciproci dei primi n numeri dispari.

Esercizio 4.3. Sapendo che $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, e che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=n}^{n+2} a_k = 3n + 1,$$

determina una formula esplicita per calcolare il valore numerico di ciascun termine della successione a_k per ogni $k \in \mathbb{N}$.

5 Progressioni aritmetiche

Esercizio 5.1. Completa le seguenti sequenze sostituendo dei numeri al posto dei puntini in modo da formare delle progressioni aritmetiche:

$$\begin{array}{lllll}
a_0 = 3 & a_1 = 5 & a_2 = \dots & a_3 = \dots & a_4 = \dots \\
b_0 = \dots & b_1 = \dots & b_2 = \dots & b_3 = 2 & b_4 = 5 \\
c_0 = \dfrac{1}{2} & c_1 = 1 & c_2 = \dots & c_3 = \dots & c_4 = \dots \\
d_0 = 1 & d_1 = -\dfrac{1}{2} & d_2 = \dots & d_3 = \dots & d_4 = \dots \\
e_0 = 3 & e_1 = \dots & e_2 = \dots & e_3 = \dots & e_4 = 5 \\
f_0 = \dots & f_1 = -\dfrac{1}{2} & f_2 = \dots & f_3 = 1 & f_4 = \dots \\
g_0 = \dots & g_1 = 3 & g_2 = \dots & g_3 = \dots & g_4 = 3.
\end{array}$$

Esercizio 5.2. La somma dei primi 3 termini di una progressione aritmetica è 5, mentre la somma dei primi 7 termini è 11. Determina il passo e il primo termine della progressione.

Esercizio 5.3. Una sequenza di 6 numeri positivi comincia con il numero $\frac{27}{16}$ e termina con il numero $\frac{64}{9}$. Sapendo che la sequenza forma una progressione aritmetica calcola la loro somma.

Esercizio 5.4. Determina la somma di tutti i numeri naturali compresi tra 1 e 2019 che sono multipli di 3 oppure multipli di 7.

6 Progressioni geometriche

Esercizio 6.1. Completa le seguenti sequenze sostituendo dei numeri al posto dei puntini in modo da formare delle progressioni geometriche:

$$\begin{array}{lllll}
a_0 = 3 & a_1 = 5 & a_2 = \dots & a_3 = \dots & a_4 = \dots \\
b_0 = \dots & b_1 = \dots & b_2 = \dots & b_3 = 2 & b_4 = 5 \\
c_0 = 1 & c_1 = \dfrac{1}{2} & c_2 = \dots & c_3 = \dots & c_4 = \dots \\
d_0 = 1 & d_1 = -\dfrac{1}{2} & d_2 = \dots & d_3 = \dots & d_4 = \dots \\
e_0 = 3 & e_1 = \dots & e_2 = \dots & e_3 = \dots & e_4 = 48 \\
f_0 = \dots & f_1 = -\dfrac{1}{4} & f_2 = \dots & f_3 = -1 & f_4 = \dots \\
g_0 = \dots & g_1 = 3 & g_2 = \dots & g_3 = \dots & g_4 = 3.
\end{array}$$

Esercizio 6.2. Calcola le seguenti somme (semplificando il più possibile il risultato):

$$\sum_{n=1}^{5} 10^{-n}; \quad \sum_{k=1}^{n} 2^k; \quad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k; \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k; \quad \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{A}{B}\right)^{2k}.$$

Esercizio 6.3. Una sequenza di 6 numeri positivi comincia con il numero $\frac{27}{16}$ e termina con il numero $\frac{64}{9}$. Sapendo che la sequenza forma una progressione geometrica calcola la loro somma.

7 Somme telescopiche

Esercizio 7.1. Calcola il valore delle seguenti somme:

$$\sum_{n=1}^{100} \big((n+1)^3 - n^3\big); \quad \sum_{n=1}^{99} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2+2n+1}\right); \quad \sum_{n=1}^{2019} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right); \quad \sum_{n=1}^{2019} \frac{1}{n(n+2)}.$$

8 Ulteriori esercizi

Esercizio 8.1. Determina delle formule per calcolare le somme dei quadrati, dei cubi e delle quarte potenze dei primi n numeri:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3; \quad \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

Esercizio 8.2. Calcola il valore delle seguenti somme:

$$\sum_{k=1}^{7} 8, \qquad \sum_{n=3}^{5} \frac{n^2-3n+1}{n+4}, \qquad \sum_{k=0}^{99} (3k-2),$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k, \qquad \sum_{k=3}^{12} 10^k, \qquad \sum_{k=3}^{12} 10^{-k},$$

$$\sum_{n=1}^{99} \left(\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad \sum_{k=1}^{99} \big(2n^2 - 3n + 4\big), \qquad \sum_{n=-8}^{-2} 2^n,$$

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{(k+1)^2+1} + 2k\right), \qquad \sum_{k=0}^{9} (-1)^k \frac{2^{k+3}}{3^{k+2}}, \qquad \sum_{n=1}^{999} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right).$$