RISOLUZIONE DI INTEGRALI INDEFINITI
PER IL CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA

FRANCESCA PRINARI

Contents

1. Riconoscimento diretto di primitive

Data una funzione $g : I \to \mathbb{R}$ definita su I intervallo, ricordiamo che f è una primitiva di g se f è derivabile su I con derivata $f'(t) = g(t)$ per ogni $t \in I$.. Utilizzando la notazione dell'integrale indefinito, scriveremo

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c.$$

con $c \in \mathbb{R}$. In particolare se f è una funzione derivabile e prendiamo $g = f'$ si ottiene che

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + c.$$

Utilizzando quindi le derivate delle funzioni elementari e facendo variare $c \in \mathbb{R}$ si ha che

- per ogni $n \in \mathbb{N}$
$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \int D\Big(\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \tag{1}$$
- per ogni $p \in \mathbb{R}, p \neq -1$ e $x > 0$
$$\int x^p\,\mathrm{d}x = \int D\Big(\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \tag{2}$$
- nel caso $p = -1$, siccome $D[\log(x)] = \frac{1}{x}$ per $x > 0$, e anche $D[\log(-x)] = \frac{1}{x}$ per $x < 0$, otteniamo che per ogni $x \neq 0$
$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int D\big(\log|x|\big)\,\mathrm{d}x = \log|x| + c. \tag{3}$$

Gli integrali seguenti seguono direttamente dalle formule di derivazione delle funzioni a secondo membro:

$$\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c \tag{4}$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + c \tag{5}$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + c \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + c \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \tan x + c \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x + c \tag{10}$$

Ricordiamo che Per ogni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabili, vale

(1) $\int f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x$;

(2) $\int a f(x) \,\mathrm{d}x = a \int f(x) \,\mathrm{d}x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esempio 1.1. Usando la linearità dell'integrale e le formule precedenti, troviamo che

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + c$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)^2} \,\mathrm{d}x = \int (x+1)^{-2} \,\mathrm{d}x = -(x+1)^{-1} + c = -\frac{1}{x+1} + c$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \log|1+x^2| + c = \log(1+x^2) + c$

Osservazione 1.2. Si noti la differenza

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + c$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)^2} \,\mathrm{d}x = \int (x+1)^{-2} \,\mathrm{d}x = -(x+1)^{-1} + c = -\frac{1}{x+1} + c$

(3) $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \log|1+x^2| + c = \log(1+x^2) + c$

Osservazione 1.3. Invece, in generale,

$$\int f(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x \neq \int f(x) \,\mathrm{d}x \cdot \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

2. Integrali per sostituzione "diretta"

Consideriamo le seguente funzioni

- $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sull'intervallo I
- $F\colon I \to \mathbb{R}$ una sua primitiva, ossia una funzione tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Equivalentemente, possiamo scrivere che
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \tag{11}$$
- $\varphi\colon J \to I$ una funzione di classe C^1 definita sull'intervallo J a valori nell'intervallo I.

Per ogni $t \in J$ possiamo definire allora $f \circ \varphi(t) = f(\varphi(t))$ e $F \circ \varphi(t) = F(\varphi(t))$. Grazie alla formula della derivata di funzioni composte abbiamo che

$$D(F \circ \varphi(t)) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t), \qquad \forall t \in J,$$

ossia la funzione composta $F \circ \varphi$ è una primitiva della funzione $(f \circ \varphi)\varphi'$. Usando il linguaggio degli integrali indefiniti possiamo tradurre questa informazione scrivendo

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) + c, \tag{12}$$

dove indichiamo con c una qualsiasi costante additiva. Equivalentemente, usando la (11), possiamo scrivere

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Questa formula ci dice che per trovare una primitiva di una funzione che si presenta nella forma

$$f(\varphi(t))\,\varphi'(t),$$

per certe funzioni f e φ, si può effettuare la sostituzione

$$x = \varphi(t), \qquad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

procedere al calcolo di una primitiva di f e POI comporla con la funzione $\varphi(t)$ ossia

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)}.} \tag{13}$$

Osservazione 2.1. La scelta di x e t come nomi delle variabili usate negli integrali è arbitraria: è chiaro che possiamo scegliere qualsiasi nome per indicarle, ad esempio possiamo riscrivere (15) usando x al posto di t e y al posto di x,

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\varphi(x)}.$$

Usiamo ora la formula (15) per estendere le formule (1)–(10).

- Nel caso in cui $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}, n \neq -1$, l'uso della formula (15) insieme alla (1) consente di calcolare il seguente tipo di integrale:
$$\int (\varphi(t))^n \varphi'(t)\,\mathrm{d}x = \int x^n\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{x=\varphi(t)} + c = \frac{(\varphi(t))^{n+1}}{n+1} + c.$$
- Analogamente per ogni $p \in \mathbb{R}, p \neq -1$, e $x > 0$
$$\int (\varphi(t))^p \varphi'(t)\,\mathrm{d}x = \frac{(\varphi(t))^{p+1}}{p+1} + c.$$

Esempio 2.2. (1) $\displaystyle\int (t+1)^3\,\mathrm{d}t = \int (t+1)^3(t+1)'\,\mathrm{d}t = \frac{(t+1)^4}{4} + c;$

(2) $\displaystyle\int \frac{3}{(3t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int (3t+1)^{-2}\cdot(3t+1)'\,\mathrm{d}t = \frac{(3t+1)^{-2+1}}{-2+1} + c;$

(3) $\displaystyle\int \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t = \int \log t\cdot(\log t)'\,\mathrm{d}t + c = \frac{\log^2 t}{2} + c;$

(4) $\displaystyle\int \frac{\arctan^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int (\arctan t)^2(\arctan t)'\,\mathrm{d}t = \frac{\arctan^3 t}{3} + c.$

Osservazione 2.3. Nel caso particolare in cui $\varphi(t) = \lambda t + \mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, abbiamo che $\varphi'(t) = \lambda$. Moltiplicando e dividendo per λ otteniamo

$$\int f(\lambda t+\mu)\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\lambda} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la linearità dell'integrale. Applicando quindi la formula (15) otteniamo che

$$\int f(\lambda t+\mu)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\lambda t+\mu}.$$

Esempio 2.4. Risolviamo i seguenti integrali indefiniti:

(1) $\int (2t+1)^3\,\mathrm{d}t$:
la differenza rispetto agli altri esercizi sta nel fatto che $(2t-1)' = 2$. Allora si moltiplica e divide per 2:

$$\int (2t+1)^3\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}2(2t+1)^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int (2t+1)'(2t+1)^3 = \frac{(2t+1)^4}{4} + c;$$

(2) $\int \sqrt{3t+1}\,\mathrm{d}t$:

Analogamente al precedente, abbiamo che $(3t+1)' = 3$. Allora moltiplichiamo e dividiamo per 3:

$$\int \sqrt{3t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int 3(3t+1)^{1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{(3t+1)^{1+1/2}}{1+1/2} + c = \frac{2}{9}(3t+1)^{3/2} + c;$$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3t+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int 3(3t+1)^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\frac{(3t+1)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c = = \tfrac{2}{3}\sqrt{3t+1} + c$

(4) $\displaystyle\int \frac{e^t}{(4e^t+3)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int 4e^t\cdot(4e^t+3)^{-3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\frac{(4e^t+3)^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{8}(4e^t+3)^{-2} + c.$

(5) $\int\big(\tan(3t-5)\big)^2\,\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int\big(\tan(3t-5)\big)^2\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{3}\int(\tan x)^2\,\mathrm{d}x\Big|_{x=3t-5} =\\ &= \frac{1}{3}\left(\int\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\right)\Big|_{x=3t-5} =\\ &= \frac{1}{3}\left(\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\right)\Big|_{x=3t-5} =\\ &= \frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}-1\,\mathrm{d}x\right)\Big|_{x=3t-5} =\\ &= \frac{1}{3}\,\big((\tan x)-x\big)\big|_{x=3t-5}+c =\\ &= \frac{1}{3}\big(\tan(3t-5)-3t+5\big)+c =\\ &= \frac{1}{3}\tan(3t-5)-t+\widetilde{c}.\end{aligned}$$

- Nel caso in cui $f(x)=\frac{1}{x}$, l'uso della formula (15) insieme alle formula (3) della sezione precedente permette di calcolare il seguente tipo di integrali:

$$\int\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt = \int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)} = (\log|x|)|_{x=\varphi(t)}+c = \log|\varphi(t)|+c.$$

Esempio 2.5. (1) $\int\tan x\,\mathrm{d}x = -\int\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\cos x} == -\big(\log|y|\big)\big|_{y=\cos x}+ c = -\log|\cos x|+c.$

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log|2x+1|+c;$

(3) $\displaystyle\int\frac{x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\frac{4x}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\log|2x^2+1|+c;$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\frac{1}{x}}{\log x}\,\mathrm{d}x = \log|\log x|+c;$

(5) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \log|e^x+1|+c;$

(6) $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x}\,\mathrm{d}x = \log|\arctan x|+c;$

(7) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\log|1+x^4|+c = \frac{1}{4}\log(1+x^4)+c.$

- se $f(x)=e^x$, l'uso della formula (15) insieme alla formula (4) della sezione precedente permette di calcolare i seguenti integrali:

$$\int e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt = \int e^x\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)} = (e^x)|_{x=\varphi(t)}+c = e^{\varphi(t)}+c.$$

Esempio 2.6. (1) $\displaystyle\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = (-1)\int(-1)e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}+c$

(2) $\displaystyle\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{3x}}{3} + c.$

(3) $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \int e^{x\log a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log a}\int \log a\cdot e^{x\log a}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{x\log a}}{\log a} + c = \frac{a^x}{\log a} + c$

(4) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}(-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\Big|_{y=-x^2} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c.$

- Infine, le formule (5)–(10) della sezione precedente permettono di calcolare i seguenti integrali:

$$\int \varphi'(t)\cos\varphi(t)dt = \sin\varphi(t) + c$$

$$\int \varphi'(t)\sin\varphi(t)dt = -\cos\varphi(t)$$

$$\int \frac{\varphi'(t)}{1+[\varphi(t)]^2}dt = \arctan\varphi(t) + c$$

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1-(\varphi(t))^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(\varphi(t)) + c$$

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\cos^2(\varphi(t))}\,\mathrm{d}x = \tan(\varphi(t)) + c$$

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\sin^2(\varphi(t))}\,\mathrm{d}x = -\cot(\varphi(t)) + c.$$

Esempio 2.7. (1) $\int \frac{1}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\arctan 3x + c;$

(2) $\int \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2};$

(3) $\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(x^2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c;$

(4) $\int \frac{1}{1+(3x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\arctan(3x+1) + c.$

Osservazione 2.8 (Integrali definiti). Possiamo ottenere una formula analoga a (15) anche per gli integrali definiti. Siano a e b due punti dell'intervallo J sul quale è definita φ; sapendo che $F\circ\varphi$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo troviamo che

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

D'altra parte, siccome $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ sono due punti dell'intervallo I sul quale è definita f ed F è una primitiva di f, utilizzando il teorema fondamentale del calcolo abbiamo anche che

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Mettendo insieme queste due relazioni ricaviamo che

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Esempio 2.9. Calcoliamo un integrale definito con il metodo di sostituzione: da conti già fatti segue che

$$\int_2^3 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_2^3 \mathrm{e}^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

con $\varphi(x) = -x^2$. Poniamo

$$y = \varphi(x) = -x^2, \quad \mathrm{d}y = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -2x\,\mathrm{d}x.$$

Quando $x = 2$ si ha che $y = \varphi(2) = -4$ mentre se $x = 3$ si ha che $y = \varphi(3) = -9$. Otteniamo

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{\varphi(2)}^{\varphi(3)} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = = -\frac{1}{2}\int_{-4}^{-9} \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^y\right]_{y=-4}^{y=-9} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-9} - \mathrm{e}^{-4}\right) = \frac{\mathrm{e}^5 - 1}{2\mathrm{e}^9}.$$

Equivalentemente, si può prima calcolare l'integrale indefinito

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2} + c.$$

per ottenere che

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{x=2}^{x=3} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-9} - \mathrm{e}^{-4}\right).$$

Esempio 2.10. Calcoliamo sempre con il metodo di sostituzione una primitiva di $\frac{\cos t}{1+(\sin t)^2}$. Osserviamo che $\cos t = (\sin t)'$, e questo ci suggerisce di utilizzare la sostituzione $x = \sin t$ con fattore differenziale $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$. Quindi

$$\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1 + (\sin t)^2} = \int \frac{1}{1 + (\sin t)^2}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x\bigg|_{x=\sin t} = (\arctan x)|_{x=\sin t} + c = \arctan(\sin t) + c.$$

Calcoliamo anche un integrale di Riemann per la stessa funzione integranda,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1 + (\sin t)^2} = \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 2.11. Applicando il metodo di integrazione per sostituzione diretta calcola i seguenti integrali indefiniti:

$$\int (5x+2)^3\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(5x+1)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{2x+5}}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{e^x}{(6e^x+1)^4}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\log^2 x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{3x+2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{x}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x\log^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{e^x}{2e^x-1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(1+x^2)\arctan^2 x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{x^4}{x^5+1}\,\mathrm{d}x, \qquad int\frac{1}{e^x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int e^{-2x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int e^{-2x+3}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int e^{-x+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{1+16x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{9+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{1+(5x+2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 2.12. Applicando il metodo di integrazione per sostituzione diretta calcola i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{4\mathrm{e}^{4x}}{1+\mathrm{e}^{4x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{(\log x)^3}{x\,(1+(\log x)^4)}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \log(1+2x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{4x-3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \tan\Big(\frac{x-\pi}{4}\Big)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \tanh(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int (\sin x)^2\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad \int (\cos x)^3\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 2.13. Calcola, utilizzando il metodo di sostituzione, i seguenti integrali definiti.

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{\cosh x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\frac14\pi}^{\frac13\pi} \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{-1}^4 (1-2x)^3\,\mathrm{d}x, \qquad \int_3^8 \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^5 x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_2^3 \frac{3x^2+2}{x^3+2x-11}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(\pi-2x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_4^9 \frac{1}{x-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 \frac{3x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\log 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)(\sin x)}{2+(\cos x)^2-(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

3. Integrazione per parti

La regola di Liebniz per la derivata del prodotto di due funzioni dice che se f e g sono funzioni derivabili allora

$$D\,[fg] = f'g + fg',$$

ovvero il prodotto fg è una primitiva di $f'g + fg'$, che nel linguaggio degli integrali indefiniti si traduce con la formula

$$\int \big(f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\big)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) + c.$$

Per la proprietà di linearità otteniamo

$$\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) + c.$$

Portando a destra uno dei due integrali ricaviamo

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{14}$$

con la costante di integrazione c che viene assorbita nell'integrale. La formula (14) descrive il metodo di *integrazione per parti*; essa da sola non fornisce una risoluzione immediata dell'integrale a sinistra, ma lo trasforma in un altro integrale, con una diversa funzione integranda. La funzione g' si chiama **fattore differenziale** ed è quello che viene integrato mentre la funzione f si chiama **fattore finito** ed è quello che al secondo passaggio viene derivato.

Si ricorre all'integrazione per parti nel caso di integrali del seguente tipo:

- $$\boxed{\int P_n(x)\log x\,\mathrm{d}x}, \qquad \boxed{\int P_n(x)\arctan x\,\mathrm{d}x}$$

dove P_n é un polinomio di grado n. In questi due casi si sceglie il polinomio P_n come funzione da integrare al primo passaggio e nel secondo passaggio si deriva il $\log x$ (ottenendo $\frac{1}{x}$) o l'arctan x (ottenendo $\frac{1}{1+x^2}$). Dopo di che resta da integrare una funzione razionale fratta. Più in generale, questo tipo di integrazione per parti si applica nel caso degli integrali del tipo

$$\int P_n(x) \log^m x \,\mathrm{d}x$$

(dove $m \in \mathbb{N}$) e agli integrali del tipo

$$\int P_n(x) \log Q(x) \,\mathrm{d}x, \qquad \int P_n(x) \arctan Q(x) \,\mathrm{d}x$$

dove P_n é un polinomio di grado n e Q é una funzionale razionale fratta.

Esempio 3.1. Proviamo a determinare una primitiva del prodotto $\frac{1}{x^2} \cdot \log(x)$. Sappiamo che l'integrale di $\frac{1}{x^2}$ è $-\frac{1}{x}$ e che $\log(x)$ ha come derivata $\frac{1}{x}$. Integriamo per parti applicando la formula (14) con $g(x) = -\frac{1}{x}$ e $f(x) = \log(x)$. Dunque,

$$\int \frac{1}{x^2} \cdot \log(x) \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} \cdot \log(x) - \int \Big(-\frac{1}{x}\Big) \cdot D[\log(x)] \,\mathrm{d}x = -\frac{\log(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\log(x)}{x} - \frac{1}{x} + c = -\frac{1 + \log(x)}{x} + c.$$

Esempio 3.2. (1) $\displaystyle\int \log x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \log x \,\mathrm{d}x = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x \log x - \int \mathrm{d}x =$
$= x \log x - x + c$;

(2) $\displaystyle\int \arctan x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \arctan x \,\mathrm{d}x = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c$;

(3) $\displaystyle\int x \log^2 x \,\mathrm{d}x = \int x \cdot \log^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \log^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \log x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \int x \cdot \log x \,\mathrm{d}x == \frac{x^2}{2} \log^2 x - \frac{x^2}{2} \log x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = \frac{x^2}{2} \log^2 x - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + c$;

(4) $\displaystyle\int \log(x^2+4) \,\mathrm{d}x = x \cdot \log(x^2+4) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2+4} \,\mathrm{d}x = x \cdot \log(x^2+4) - 2 \int \frac{x^2}{x^2+4} \,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle x \cdot \log(x^2+4) - 2 \int 1 - \frac{4}{x^2+4} \,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = x \log(x^2+4) - 2x + 2 \int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2 + 1} \,\mathrm{d}x = x \log(x^2+4) - 2x + 4 \arctan \frac{x}{2} + c$;

(5) $\displaystyle\int x \arctan \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \,\mathrm{d}x$
$\displaystyle = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} +$
$\displaystyle \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{x} + \frac{1}{2}(x - \arctan x) + c.$

- Se

$$\boxed{\int P_n(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x}$$

dove P_n é un polinomio di grado n e $\alpha \in \mathbb{R}$, si integra $e^{\alpha x}$ (ottenendo $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$) e si deriva il polinomio P_n ottenendo un polinomio P_{n-1} di grado $n-1$. Si ottiene cosi'

$$\int P_n(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = P_n(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \int P_{n-1}(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

e si riapplica l'integrazione per parti sull'integrale $\int P_{n-1}(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ procedendo come prima: ad ogni passo si abbassa il grado del polinomio fino a ottenere un polinomio di grado 1.

Esempio 3.3. (1) $\int xe^x\,\mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + c$

(2) $$\int x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x = x^2\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 2x\frac{e^{-2x}}{-2}\,\mathrm{d}x = -x^2\frac{e^{-2x}}{2} + \int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -x^2\frac{e^{-2x}}{2} - x\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2 + x + \frac{1}{2}) + c$$

- Se

$$\boxed{\int P_n(x)\cos x\,\mathrm{d}x}, \quad \boxed{\int P_n(x)\sin x\,\mathrm{d}x}$$

dove P_n é un polinomio di grado n, si sceglie il polinomio P_n come funzione da derivare, ottenendo un polinomio P_{n-1} di grado $n-1$, e si integra la funzione trigonometrica $\cos x$ o $\sin x$.

Esempio 3.4. $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + c$

Esercizio 3.5. A volte bisogna ripetere l'integrazione per parti più volte per riuscire a calcolare una primitiva. Ogni volta che deriviamo un polinomio otteniamo un polinomio di grado inferiore, mentre integrando funzioni come seni, coseni, o esponenziali, otteniamo funzioni dello stesso tipo, senza grosse semplificazioni o complicazioni. E dunque ad esempio, nel calcolo della primitiva di una funzione come $x^2\sin(x)$ ci aspettiamo che con un paio di integrazioni per parti il fattore polinomiale sparisca mentre il fattore trigonometrico rimanga un fattore di tipo trigonometrico.

$$\begin{aligned}
\int x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x = x^2(-\cos(x)) - \int (2x)(-\cos(x))\,\mathrm{d}x =& \\
= -x^2\cos(x) + 2\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x =& \\
= -x^2\cos(x) + 2\left(x\sin(x) - \int 1\sin(x)\,\mathrm{d}x\right) =& \\
= -x^2\cos(x) + 2\left(x\sin(x) + \cos(x)\right) =& \\
= (2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x).&
\end{aligned}$$

Esercizio 3.6. Può capitare che ripetendo l'operazione di integrazione per parti più volte ci si ritrovi nel membro di destra con lo stesso integrale di partenza, l'importante è che riportandolo a sinistra esso non si cancelli:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \sin(x)\mathrm{e}^x - \int \cos(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \\ &= \sin(x)\mathrm{e}^x - \left(\cos(x)\mathrm{e}^x + \int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= \big(\sin(x)-\cos(x)\big)\mathrm{e}^x - \int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ne ricaviamo che

$$2\int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \big(\sin(x)-\cos(x)\big)\mathrm{e}^x + c,$$

e dunque

$$\int \sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sin(x)-\cos(x)\big)\mathrm{e}^x + c.$$

Esercizio 3.7. Qualche volta possiamo servirci di qualche semplice ma ingegnoso trucco per modificare le funzioni integrande:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{1-x^2} - \int x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-1+(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

e quindi, portando a sinistra l'ultimo integrale e ricordando che $D[\arcsin(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, otteniamo

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) + c.$$

3.1. **Esercizi proposti.**

(1) $\int x^2 \log x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int x \log^3 x\,\mathrm{d}x$

(3) $\int x \log(x^2-4x+5)\,\mathrm{d}x$

(4) $\int x \log(4x^2-9)\,\mathrm{d}x$

(5) $\sqrt{x}\log x\,\mathrm{d}x$

(6) $\int x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int (2x-1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int x e^{3x}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int x \arctan(2x)\,\mathrm{d}x$

(10) $\int x^3 \arctan(2x)\,\mathrm{d}x$

(11) $\int x \cos x\,\mathrm{d}x$

(12) $\int x \sin 3x\,\mathrm{d}x$

(13) $\int x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$

Esercizio 3.8. Calcola i seguenti integrali indefiniti:

$$\begin{array}{lll}
\displaystyle\int x\log(x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int (3x-2)\cos(x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \big(\log x\big)^2\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \log(1+x^2)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int x\sin(x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int \arccos x\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int \sin(3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int 2x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{array}$$

Esercizio 3.9. Calcola i seguenti integrali definiti:

$$\begin{array}{lll}
\displaystyle\int_0^1 x\log(x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_1^2 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |3x-\pi|\cos(x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \big(\log x\big)^2\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_{-1}^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x, \\
\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_0^{2\pi} x\,|\sin(x)|\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\displaystyle\int_{-1}^1 \arccos x\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos(4x)\,\mathrm{d}x, & \displaystyle\int_{-1}^1 2x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{array}$$

4. **Integrazione per sostituzione "inversa"**

Abbiamo visto che se

- $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sull'intervallo I;
- $F\colon I \to \mathbb{R}$ primitiva di f
- $\varphi\colon J \to I$ una funzione di classe C^1 definita sull'intervallo J a valori nell'intervallo I

allora $F(\varphi)\colon J \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $f(\varphi)\varphi'$ e abbiamo ottenuto la formula

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)}.} \tag{15}$$

In particolare, nel caso di integrali definiti, abbiamo ottenuto che

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ora supponiamo che la funzione $\varphi\colon J \to I$ di classe C^1 definita sull'intervallo J sia biettiva, dunque **invertibile**, e che la sua inversa sia la funzione $\psi\colon I \to J$ e proviamo che

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\psi(x)}.} \tag{16}$$

Infatti supponiamo di aver calcolato una primitiva G di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ossia

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) + x$$

.

Allora

$$G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) = (F(\varphi(t))' \quad \text{per ogni } t \in J$$

e sfruttando l'invertibilità di φ segue che, se per ogni $x \in I$, se $t = \varphi^{-1}(x)$ (ossia se $t = \psi(x)$) allora

$$(G(\psi)(x))' = F'(x) = f(x)$$

ossia la funzione $G(\psi)$ è una primitiva di f. Quindi

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\psi(x)) + c = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\psi(x)}.$$

Quindi per risolvere l'integrale

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

si può procedere al metodo di sostituzione inversa che significa

- porre $\psi(x) = t$ (da scegliere opportunamente) da cui $x = \psi^{-1}(t) = \varphi(t)$
- calcolare $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$;
- calcolare $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c$;
- tornare "indietro" tramite la trasformazione $t = \psi(x)$ per trovare che

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\psi(x)) + c.$$

In particolare

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Esercizio 4.1. Calcoliamo una primitiva di $f(x) := \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ per $x \geqslant 0$. L'esponente sembra suggerirci di provare ad utilizzare la sostituzione

$$t = \psi(x) := \sqrt{x}, \qquad x \geqslant 0,$$

che è la funzione inversa di

$$x = \varphi(t) := t^2, \qquad t \geqslant 0.$$

Nell'integrale il termine $\mathrm{d}x$ viene sostituito da $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t$. Otteniamo

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t\, 2t\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\sqrt{x}}.$$

Ora il nuovo integrale è uno di quelli che sappiamo calcolare procedendo per parti

$$\int t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \int 1 \cdot \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + c = (t-1)\mathrm{e}^t + c.$$

E dunque, cambiando costante, ma indicandola sempre con c, otteniamo

$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\,(t-1)\mathrm{e}^t\big|_{t=\sqrt{x}} + c = 2\big(\sqrt{x} - 1\big)\mathrm{e}^{\sqrt{x}} + c.$$

Esercizio 4.2. Calcoliamo l'integrale definito

$$A := \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$$

Vogliamo sostituire t al posto di e^x. Da $t = e^x$ segue che $x = \varphi(t) = \log t$, con $t > 0$; quindi $\mathrm{d}x = (\log t)'\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$; per gli estremi di integrazione, ad $x = 0$ corrisponde $t = \mathrm{e}^0 = 1$ e ad $x = 1$ corrisponde $t = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$. Otteniamo

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

In questo modo è sparito il termine esponenziale dall'integrando, e ci siamo ricondotti all'integrale di una funzione razionale. Osserviamo che possiamo scrivere

$$\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t},$$

e dunque

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \big[\log t\big]_1^{\mathrm{e}} - [\log(1+t)]_1^{\mathrm{e}} =$$

$$= \log(\mathrm{e}) - \log(1) - \log(1+\mathrm{e}) + \log(1+1) = \log\left(\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right).$$

Esercizio 4.3. *Calcola i seguenti integrali applicando le sostituzioni indicate*

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x, \qquad t = \frac{2x+1}{\sqrt{3}};$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x, \qquad t = \sqrt{2x-1};$$

$$\int \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\,dx, \qquad t = \sqrt{x^2+1}+x;$$

$$\int_{-1}^4 \frac{3x}{\sqrt{8-x}}\,\mathrm{d}x, \qquad t = \sqrt{8-x};$$

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(3-x)}}, \qquad t = \arcsin\left(\frac{2}{3}x - 1\right).$$

5. **Integrali delle funzioni razionali fratte**

Definizione 5.1. *Chiamiamo* **funzione razionale** *ogni funzione della forma*

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

dove N e D sono funzioni polinomiali e D non è identicamente nulla.

Tale funzione razionale è definita per ogni punto $x \in \mathbb{R}$ per il quale il denominatore $D(x)$ non si annulla. Una funzione razionale $N(x)/D(x)$ di dice **propria** *quando il grado del polinomio N al numeratore è strettamente inferiore al grado del polinomio D al denominatore.*

In particolare sono funzioni razionali tutte le funzioni polinomiali (basta considerare il caso con $D(x) = 1$) e tutti i reciproci di funzioni polinomiali (caso $N(x) = 1$).

Osservazione 5.2. Osserva che

- Somme e prodotti di funzioni razionali sono ancora funzioni razionali;
- la composizione di funzioni razionali è ancora una funzione razionale;

- la derivata di una funzione razionale è ancora una funzione razionale;
- se $f(x)$ è una funzione razionale, allora le derivate di $\log|f(x)|$ e $\arctan(f(x))$ sono funzioni razionali.

Per integrare una funzione razionale, la prima cosa da fare è ridurla ad una funzione razionale propria. Questo è possibile tramite divisione.

Proposizione 5.3. *Ogni funzione razionale può essere decomposta, in modo unico, come somma di un polinomio e di una funzione razionale propria.*

Dimostrazione. Siano N e D due polinomi, con D non identicamente nullo. Effettuando la divisione tra polinomi otteniamo che esistono (e sono unici) due polinomi Q e R tali che $N = Q \cdot D + R$ dove R, se non è nullo, ha grado inferiore al grado di D. Abbiamo dunque la scomposizione

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

e la funzione razionale R/D è propria. □

Grazie alla linearità dell'integrale, abbiamo quindi che

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x = \int Q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Ci occupiamo ora di integrare la la funzione razionale R/D.

5.1. **Denominatore di primo grado: $D(x) = bx + c$ con $b \neq 0$.** Il caso più facile è quello in cui la funzione razionale propria si presenta nella forma

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{bx+c} = \frac{1}{b}\log|bx+c| + k.$$

Esempio 5.4. Se dobbiamo calcolare

$$\int \frac{Ax+B}{bx+c}\,\mathrm{d}x$$

dopo aver diviso numeratore per il denominatore, chiamati $Q, R \in \mathbb{R}$, rispettivamente, quoziente e resto della divisione, allora

$$\int \frac{Ax+B}{bx+c}\,\mathrm{d}x = \int Q + \frac{R}{bx+c}\,\mathrm{d}x = Qx + R\int \frac{1}{bx+c}\,\mathrm{d}x = Qx + \frac{R}{b}\int \frac{b}{bx+c}\,\mathrm{d}x$$
$$= Qx + \frac{R}{b}\log|bx+c| + k.$$

Quindi $\displaystyle\int \frac{2x+3}{5x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{5} + \frac{\frac{13}{5}}{5x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x + \frac{13}{25}\log|5x+1| + k.$

5.2. **Denominatore di secondo grado: $D(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.** In questa sottosezione risolviamo gli integrali del tipo

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{R(x)}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$

con grado di $R \leq 1$.

Alla luce delle formule viste nella lezione precedenti, dobbiamo distinguere i seguenti casi:

- $\Delta = 0$: in questo caso esistono due radici $x_1 = x_2 = p$ reali e coincidenti tali che il trinomio $ax^2 + bx + c$ si fattorizza come $a(x-p)^2$. Otteniamo
$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a(x-p)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-p)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}(x-p)^{-2+1} + c.$$

- $\Delta < 0$: in questo caso, il trinomio ha due radici complesse e coniugate $(z, \bar{z})$ per cui, posto
$$p = \mathrm{Re}(z), \quad q = \mathrm{Im}(z)$$
si ha che
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = a(x-z)(x-\bar{z}) &= a(x^2 - 2\mathrm{Re}(z)x + |z|^2) = \\ &= a(x^2 - 2px + p^2 + q^2) = a((x-p)^2 + q^2). \end{aligned}$$
Dimostriamo che
$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{aq}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right). \tag{17}$$
Infatti, utilizzando la sostituzione $x - p = qt$ ossia $x = p + qt$ otteniamo
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-p)^2+q^2} &= \frac{1}{a}\int \frac{q\,\mathrm{d}t}{(tq)^2+q^2}\bigg|_{t=\frac{x-p}{q}} = \frac{1}{aq}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\frac{x-p}{q}} = \\ &= \frac{1}{aq}\arctan(t)\big|_{t=\frac{x-p}{q}} = \frac{1}{aq}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right). \end{aligned} \tag{18}$$
In alcuni testi tale formula viene anche esplicitata usando a, b, c. Essendo
$$-2ap = b, \quad a(p^2 + q^2) = c$$
da cui
$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-\Delta}{4a^2}$$
e si ottiene la formula
$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + c;$$

- $\Delta > 0$: in questo caso esistono due radici p, q reali e distinte tali che il trinomio ax^2+bx+c si fattorizza come $a(x-p)(x-q)$. In questo caso si cercano $A, B \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} \tag{19}$$
e l'integrale si calcola nel modo seguente:
$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = A\log|x-p| + B\log|x-q| + c.$$
Determiniamo i coefficienti A e B. Moltiplicando entrambi i membri di (19) per $a(x-p)(x-q)$ otteniamo due polinomi che devono essere uguali, ossia
$$1 = Aa(x-q) + Ba(x-p) = a(A+B)x + a(-qA - pB), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti dei due polinomi a destra e a sinistra devono essere gli stessi e dunque ricaviamo il sistema
$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -aqA - apB = 1, \end{cases}$$
che ha come soluzioni $A = -B$ e $B = \frac{1}{a(q-p)}$.

Esempio 5.5.
$$\int \frac{1}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= -\log|x+2| + \log|x+3| + c.$$

Inseriamo ora un termine di primo grado a numeratore e vediamo come si risolve
$$\int \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

- Se $\Delta < 0$ si cerca di scrivere l'integrale nel modo seguente:
$$\int \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = M\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x + N\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$$
e applicare la formula
$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \log|\varphi(x)| + c$$
per calcolare il primo integrale e la formula (5.2) per risolvere il secondo integrale.

Esempio 5.6. $\displaystyle\int \frac{x+3}{5x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$. Poichè la derivata di $5x^2+x+1$ é $10x+1$,
(1) prima moltiplichiamo e dividiamo l'integrale per 10
(2) poi aggiungiamo e sottraiamo 1
ossia
$$\int \frac{x+3}{5x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int \frac{10(x+3)}{5x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int \frac{10x+1-1+30}{5x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{10}\int \frac{10x+1+29}{5x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int \frac{10x+1}{5x^2+x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{29}{10}\int \frac{1}{5x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{10}\log|5x^2+x+1| + \frac{29}{5\sqrt{19}}\arctan\frac{10x+1}{\sqrt{19}}.$$

- Se $\Delta = 0$ allora esiste $p \in \mathbb{R}$ tale che $ax^2+bx+c = a(x-r)^2$ e attraverso la sostituzione $x-p=t$ otteniamo
$$\int \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Cx+D}{a(x-r)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{C(t+p)+D}{at^2}\,\mathrm{d}t\Big|_{x=p+t}$$
$$= \frac{C}{a}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Big|_{x=p+t} + \frac{Cp+D}{a}\int \frac{1}{t^2}dt\Big|_{x=p+t} = \frac{C}{a}\log|p+t| - \frac{Cp+D}{a(x-p)};$$
- se $\Delta > 0$ allora esistono $p, q \in \mathbb{R}$ tale che $ax^2+bx+c = a(x-p)(x-q)$ e la funzione razionale propria diventa
$$\int \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{Cx+D}{a(x-p)(x-q)}.$$
Come fatto prima, cerchiamo una decomposizione nella forma
$$\frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{x-p} + \frac{B}{x-q} \tag{20}$$
Determiniamo i coefficienti A e B. Moltiplicando entrambi i membri di (20) per $a(x-p)(x-q)$ otteniamo due polinomi che devono essere uguali,
$$Cx+D = aA(x-q) + aB(x-p) = a(A+B)x + (-qA-pB), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Per il principio di identità dei polinomi,

$$\begin{cases} a(A+B) = C, \\ -qA - pB = D, \end{cases}$$

Dopo aver trovato le soluzioni A e B, ricaviamo che

$$\int \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = A\log|x-p| + B\log|x-q|.$$

Esempio 5.7. $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x$. Siamo nel caso in cui il trinomio a denominatore è $\Delta > 0$. Decomponiamo la frazione come

$$\frac{3x+2}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

da cui

$$3x+2 = A(x+3) + B(x+2)$$

ossia

$$3x+2 = (A+B)x + 3A + 2B.$$

Quindi

$$\begin{cases} (A+B) = 3, \\ 3A + 2B = 2, \end{cases}$$

da cui $B = 7, A = -4$. Quindi

$$\int \frac{3x+2}{x^2+5x+6}\,\mathrm{d}x = -4\log|x+2| + 7\log|x+3| + c.$$

5.3. **Esercizi proposti.**

(1) $\int \frac{1}{4x+1}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{4x+3}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{1}{-2x+3}\,\mathrm{d}x$

(4) $\int \frac{3x+1}{4x-5}\,\mathrm{d}x$

(5) $\int \frac{2x+3}{-2x+3}\,\mathrm{d}x$

(6) $\int \frac{1}{25x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(7) $\int \frac{1}{25x^2-1}\,\mathrm{d}x$

(8) $\int \frac{1}{x^2+25}\,\mathrm{d}x$

(9) $\int \frac{1}{x^2-25}\,\mathrm{d}x$

(10) $\int \frac{1}{25x^2+16}\,\mathrm{d}x$

(11) $\int \frac{1}{25x^2-16}\,\mathrm{d}x$

(12) $\int \frac{1}{16x^2+25}\,\mathrm{d}x$

(13) $\int \frac{1}{16x^2-25}\,\mathrm{d}x$

(14) $\int \frac{1}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x$

(15) $\int \frac{1}{5x^2+3}\,\mathrm{d}x$

(16) $\int \frac{1}{9x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(17) $\int \frac{1}{9x^2-1}\,\mathrm{d}x$

(18) $\int \frac{1}{x^2+16}\,\mathrm{d}x$

(19) $\int \frac{1}{x^2-16}\,\mathrm{d}x$

(20) $\int \frac{1}{9x^2+4}\,\mathrm{d}x$

(21) $\int \frac{1}{9x^2-4}\,\mathrm{d}x$

(22) $\int \frac{1}{9x^2+25}\,\mathrm{d}x$

(23) $\int \frac{1}{9x^2-25}\,\mathrm{d}x$

(24) $\int \frac{1}{4x^2+12x+9}\,\mathrm{d}x$

(25) $\int \frac{1}{4x^2+12x+10}\,\mathrm{d}x$

(26) $\int \frac{1}{x^2+7x+12}\,\mathrm{d}x$

(27) $\int \frac{1}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$

(28) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

(29) $\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x$

(30) $\int \frac{1}{25x^2+16}\,\mathrm{d}x$

(31) $\int \frac{1}{25x^2-16}\,\mathrm{d}x$

(32) $\int \frac{3x+1}{4x^2+12x+9}\,\mathrm{d}x$

(33) $\int \frac{3x+5}{4x^2+12x+10}\,\mathrm{d}x$

(34) $\int \frac{4x+3}{x^2+7x+12}\,\mathrm{d}x$

(35) $\int \frac{5x^2+1}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$

(36) $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

(37) $\int \frac{3x^2+4x+1}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x$

(38) $\int \frac{2x+3}{25x^2+16}\,\mathrm{d}x$

(39) $\int \frac{3x^2+4}{25x^2-16}\,\mathrm{d}x$

(40) $\int \frac{x^3+4x}{x^2+7x+6}\,\mathrm{d}x$

(41) $\int \frac{2x^4+5x^3+x+1}{x^2+7x+8}\,\mathrm{d}x.$

(42) $\int \frac{3x^2+4x+1}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x$

(43) $\int \frac{2x^3+1}{25x^2+10x+2}\,\mathrm{d}x$

(44) $\int \frac{3x^2+4}{9x^2+6x+1}\,\mathrm{d}x$

(45) $\int \frac{x^3+4x}{x^2+10x+29}\,\mathrm{d}x.$

6. **Primitive delle funzioni razionali semplici**

Nella lezione conclusiva sui numeri complessi, abbiamo visto che ogni $D \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}[x]$ di grado d può essere fattorizzato nella forma

$$D(x) = c_d \prod_{j=1}^{\ell} (x - r_j)^{\mu_j} \cdot \prod_{k=1}^{n} (x^2 - 2\mathrm{Re}(z_k)x + |z_k|^2)^{m_k}, \tag{21}$$

dove

- $c_d \neq 0$ indica il coefficiente direttore di D
- i blocchi $(x - r_j)$ corrispondono alle radici reali r_j di D
- i blocchi $(x^2 - 2\mathrm{Re}(z_k)x + |z_k|^2)$ corrispondono alla coppia di radici complesse e coniugate $(z_k, \bar{z}_k)$. Da quanto vista prima, se $p_k = \mathrm{Re}(z_k)$ e $q_k = \mathrm{Im}(z_k)$ allora

$$x^2 - 2\mathrm{Re}(z_k)x + |z_k|^2 = (x - p_k)^2 + q_k^2.$$

Entrambi i tipi di blocchi hanno la proprietà di essere monici e irriducibili.

Diamo quindi il seguente teorema

Teorema 6.1. *Dati due polinomi a coefficienti reali R e D con $\deg(R) < \deg(D)$, allora la funzione razionale propria $R(x)/D(x)$ si può decomporre in modo unico come somma di termini della forma*

$$\frac{A}{(x-r)^k},$$

dove A è un coefficiente reale, r è uno zero reale di $D(x)$ con molteplicità algebrica m e $k \in \mathbb{N}$ è tale che $1 \leq k \leq m$, e di termini della forma

$$\frac{Bx + C}{\big((x-p)^2 + q^2\big)^j},$$

dove B, C sono coefficienti reali, $p \pm \mathrm{i}q$ sono zeri complessi coniugati di $D(x)$ con molteplicità algebrica ℓ e j è un numero naturale compreso tra 1 e ℓ.

Osserviamo ora che

$$\frac{Bx+C}{\big((x-p)^2+q^2\big)^j}=\frac{B}{2}\cdot\frac{2(x-p)}{\big((x-p)^2+q^2\big)^j}+(Bp+C)\cdot\frac{1}{\big((x-p)^2+q^2\big)^j}.$$

Alla luce del Teorema 6.1, sarà dunque sufficiente calcolare le primitive nei seguenti sei casi:

$$\frac{1}{x-r},\ \frac{1}{(x-r)^k},\ \frac{1}{(x-p)^2+q^2},\ \frac{2(x-p)}{(x-p)^2+q^2},\ \frac{2(x-p)}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k},\ \frac{1}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k},$$

dove $k\in\mathbb{N}, k\neq 1$. Per semplicità di scrittura nei seguenti calcoli di primitive ometteremo di indicare la costante additiva arbitraria di integrazione.

Già sappiamo che:

(1)
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-r}=\log|x-r|\,.$$

(2) per ogni $k\neq 1$,
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^k}=\int(x-r)^{-k}\,\mathrm{d}x=\frac{(x-r)^{-k+1}}{(-k+1)}.$$

(3) grazie alla formula (5.2)
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-p)^2+q^2}=\frac{1}{q}\arctan\left(\frac{x-p}{q}\right).$$

(4) nel quarto caso, posto $\varphi(x)=(x-p)^2+q^2$, si ha che
$$\int\frac{2(x-p)\,\mathrm{d}x}{(x-p)^2+q^2}=\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x=\log|\varphi(x)|=\log\big((x-p)^2+q^2\big);$$

(5) nel quinto caso, se $k\neq 1$, posto $\varphi(x)=(x-p)^2+q^2$, allora
$$\int\frac{2(x-p)\,\mathrm{d}x}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k}=\int\varphi'(x)(\varphi(x))^{-k}\,\mathrm{d}x=\frac{(\varphi(x))^{-k+1}}{-k+1}=-\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{\big((x-p)^2+q^2\big)^{k-1}}.\tag{22}$$

(6) Resta quindi solo l'ultimo caso. Esso risulta essere leggermente più impegnativo. Dato $k\in\mathbb{N}, k\neq 1$, applicando la sostituzione $x=tq+p$, otteniamo
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k}=\int\frac{q\,\mathrm{d}t}{\big((tq)^2+q^2\big)^k}\Bigg|_{t=\frac{x-p}{q}}=\frac{1}{q^{2k-1}}\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k}\Bigg|_{t=\frac{x-p}{q}}.$$

Ci rimane da calcolare una primitiva per $\dfrac{1}{(1+t^2)^k}$. Ricorriamo ad un trucco algebrico, osserviamo infatti che vale la seguente decomposizione
$$\frac{1}{(1+t^2)^k}=\frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^k}=\frac{1}{(1+t^2)^{k-1}}-\frac{t}{2}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^k}.\tag{23}$$

Dai calcoli (22) fatti nel quinto caso, con $p=0$ e $q=1$, abbiamo che
$$\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k}=-\frac{1}{(k-1)(1+t^2)^{k-1}}.$$

Possiamo allora integrare l'identità (23) procedendo per parti,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{k-1}} - \int \frac{t}{2}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^k}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{k-1}} + \frac{t}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)(1+t^2)^{k-1}} - \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(k-1)(1+t^2)^{k-1}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ricaviamo

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^k} = \frac{t}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}} + \Big(1-\frac{1}{2(k-1)}\Big)\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{k-1}}.$$

Questa formula ci permette di ottenere in modo iterativo una primitiva per $\dfrac{1}{(1+t^2)^k}$ conoscendo una primitiva di $\dfrac{1}{(1+t^2)^{k-1}}$. Ad esempio, per $k=2$,

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \Big(1-\frac{1}{2}\Big)\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan(t).$$

Per $k=3$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^3} &= \Big(1-\frac{1}{4}\Big)\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} + \frac{t}{4(1+t^2)^2} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(1+t^2)}\right) + \frac{t}{4(1+t^2)^2} \\ &= \frac{3}{8}\arctan(t) + \frac{5t+3t^3}{8(1+t^2)^2}.\end{aligned}$$

Esempio 6.2. *Calcoliamo una primitiva della funzione razionale semplice*

$$\frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2} = \frac{6x+5}{((x+2)^2+9)^2}.$$

In questo caso $p=-2$ e $q=9$. Procediamo con la sostituzione $x+2=3t$ ossia $x=3t-2$,

$$\frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2} = \frac{18t-7}{9^2(t^2+1)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2} - \frac{7}{81}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

Integriamo,

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} - \frac{7}{27}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t^2} - \frac{7}{27}\left(\frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{t}{2(1+t^2)}\right) \\ &= -\frac{7}{54}\arctan(t) - \frac{7t+18}{54(1+t^2)} \\ &= -\frac{7}{54}\arctan\Big(\frac{x+2}{3}\Big) - \frac{7x+68}{18(x^2+4x+13)}.\end{aligned}$$

Esercizio 6.3. *Calcola le primitive per le seguenti funzioni razionali semplici:*

$$\frac{2}{x}, \qquad \frac{8}{x^3}, \qquad \frac{3}{x+2},$$

$$\frac{3}{(x+3)^4}, \qquad \frac{x+1}{x^2+x+1}, \qquad \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2},$$

$$\frac{x+1}{x^2-6x+13}, \qquad \textit{quindi}\,\frac{1}{(1+x^2)^4}, \qquad \frac{1}{(1+x^2)^5}.$$

Esercizio 6.4. Usando l'integrazione per parti o per sostituzione e la tecniche di integrazione delle funzioni razionali fratte con denominatore di ordine 2 calcolare i seguenti integrali: Calcolare

(1) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-4}dx;$
(2) $\displaystyle\int \frac{\log x - 2}{x(4\log x^2 - 9)}dx$ $(x > 0$
(3) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-6e^x+25}\ \mathrm{d}x$
(4) $\displaystyle\int (2x+1)\log(x^2-2x+2)\ \mathrm{d}x$
(5) $\displaystyle\int_1^2 \int \log(2x-\sqrt{x})\,dx$
(6) $\displaystyle\int \frac{1}{x(9\log^2 x - 6\log x + 2)}\ \mathrm{d}x$
(7) $\displaystyle\int x\arctan\frac{1}{3x}\ \mathrm{d}x$
(8) $\displaystyle\int \arctan\frac{1}{3\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
(9) $\int \log(x+4\sqrt{x}+8)\ \mathrm{d}x.$
(10) $\displaystyle\int \arctan(2\sqrt{x}+1)\,dx$

Risoluzione:

(1) tramite la sostituzione $e^x = t$ otteniamo $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}dt$. Quindi

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-4}dx = \int \frac{t^2-1}{t(t-4)}dt$$

Dividendo il numeratore (di grado 2) per il denominatore (di grado 2) si ottiene

$$\frac{t^2-1}{t(t-4)} = 1 + \frac{4t-1}{t(t-4)}.$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{4t-1}{t(t-4)}dt = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-4}.$$

Si trova $A(t-4) + Bt = 4t - 1$ ossia

$$(A+B)t - 4A = 4t - 1$$

da cui, per il principio di identità dei polinomi, segue che

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ -4A = -1 \\ . \end{cases}$$

Quindi $A = \frac{1}{4}$ e $B = \frac{15}{4}$. Allora

$$\int \frac{t^2-1}{t(t-4)}dt = t + \int \frac{1}{4t} + \frac{15}{4(t-4)}dt = t + \frac{1}{4}\log|t| + \frac{15}{4}\log|t-4| + c.$$

Tornando indietro troviamo che

(2) tramite la sostituzione $\log x = t$ otteniamo $x = e^t$ e $dx = e^t dt$. Otteniamo

$$\int \frac{\log x - 2}{x(4\log^2 x - 9)} dx = \int \frac{t-2}{e^t(4t^2-9)} e^t dt = \int \frac{t-2}{4t^2-9} dt.$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t-2}{(2t-3)(2t+3)} dt = \frac{A}{2t-3} + \frac{B}{2t+3}.$$

Si trova $A(2t+3) + B(2t-3) = t-2$ da cui

$$\begin{cases} 2(A+B) = 1 \\ 3A - 3B = -2 \end{cases}$$

da cui $A = -\frac{1}{12}$ e $B = \frac{7}{12}$. Quindi

$$\frac{t-2}{(2t-3)(2t+3)} dt = \frac{1}{12} \int \frac{7}{2t+3} - \frac{1}{2t-3} dt = \frac{1}{1} 24(7\log|2t+3| - \log|2t-3|) + c$$

$$= \frac{1}{1} 24(7\log|2\log x + 3| - \log|2\log x - 3|) + c;$$

(3) Tramite la sostituzione $e^x = t$ si ottiene $e^x dx = dt$ e l'integrale diventa

$$\int \frac{t^3}{t^2 - 6t + 25} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{t^2 - 6t + 25} dt.$$

Dividendo il numeratore (di grado 2) per il denominatore (di grado 2) si ottiene

$$\int 1 + \frac{6t - 25}{t^2 - 6t + 25} dt = t + 3 \int \frac{2t - 6}{t^2 - 6t + 25} dt - 7 \int \frac{1}{t^2 - 6t + 25} dt$$

$$= t + 3\log(t^2 - 6t + 25) - \frac{14}{8} \arctan \frac{2t - 6}{8}$$

(4) Integrando per parti si ottiene

$$\int (2x+1)\log(x^2 - 2x + 2)\, dx = (x^2 + x)\log(x^2 - 2x + 2) - \int (x^2 + x) \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

$$= (x^2 + x)\log(x^2 - 2x + 2) - 2 \int \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

Il numeratore ha grado 3 mentre il denominatore grado 2: dividiamo numeratore per denominatore. Troviamo che il quoziente è $Q(x) = x + 2$ mentre il resto è $R(x) = 3x - 4$. Allora si ottiene che

$$2 \int \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} dx = 2 \int x + 2 + \frac{3x - 4}{x^2 - 2x + 2} dx =$$

$$= x^2 + 4x + 2 \int \frac{3x - 4}{x^2 - 2x + 2} dx = x^2 + 4x + 3 \int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2} dx - 2 \int \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx =$$

$$= x^2 + 4x + 3\log(x^2 - 2x + 2) - 2\arctan(x - 1) + c.$$

(5) Tramite la sostituzione $x = t^2$ si ottiene $dx = 2tdt$ e l'integrale indefinito $\int \log(2x - \sqrt{x})\, dx$ diventa

$$\int 2t \log(2t^2 - t) dt.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int 2t \log(2t^2 - t) dt = t^2 \log(2t^2 - t) - \int t^2 \frac{4t - 1}{2t^2 - t} dt$$

$$= t^2 \log(2t^2 - t) - \int \frac{4t^2 - t}{2t - 1} dt.$$

Da cui dividendo $4t^2 - t$ per $2t - 1$ si ottiene che

$$\int \frac{4t^2 - t}{2t - 1} dt = \int 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2t - 1)} dt = t^2 + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \log|2t - 1|.$$

Tornando indietro tramite la sostituzione $t = \sqrt{x}$ si ottiene

$$\int \log(2x - \sqrt{x})\, dx = x \log(2x - \sqrt{x}) - (x + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{4} \log|2\sqrt{x} - 1|)$$

da cui

$$\int_1^2 \log(2x - \sqrt{x})\, dx = 2 \log(4 - \sqrt{2}) - (2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \log|2\sqrt{2} - 1|) + \frac{3}{2}$$

(6) Tramite la sostituzione $\log x = t$ si ottiene $\frac{1}{x} dx = dt$ e l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{x(4\log^2 x - 4\log x + 2)}\, dx$$

diventa

$$\int \frac{1}{4t^2 - 4t + 2}\, dt = \int \frac{1}{(2t - 1)^2 + 1}\, dt = \frac{1}{2} \arctan(2t - 1) + c =$$

$$= \frac{1}{2} \arctan(2 \log x - 1) + c$$

(7) Integrando per parti si ottiene

$$\int x \arctan \frac{1}{3x}\, dx = \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{3x} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3x}\right)^2} \cdot (-\frac{1}{3x^2}) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} \int \frac{9x^2}{9x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} \int \frac{9x^2 + 1 - 1}{9x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} x - \frac{1}{6} \int \frac{1}{9x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} x - \frac{1}{18} \int \frac{3}{(3x)^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} x - \frac{1}{18} \arctan 3x$$

(8) Tramite la sostituzione $\sqrt{x} = t$ (ossia $x = t^2$) si ottiene $dx = 2tdt$ e l'integrale diventa
$$\int 2t \arctan \frac{1}{3t}\, dt.$$
Integrando per parti si ottiene
$$\int t \arctan \frac{1}{3t}\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan \frac{1}{3t} - \int \frac{t^2}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3t}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{3t^2}\right) dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} \arctan \frac{1}{3t} + \frac{1}{6} \int \frac{9t^2}{9t^2+1} dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} \arctan \frac{1}{3t} + \frac{1}{6} \int \frac{9t^2+1-1}{9t^2+1} dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} \arctan \frac{1}{3t} + \frac{1}{6} t - \frac{1}{6} \int \frac{1}{9t^2+1} dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} \arctan \frac{1}{3t} + \frac{1}{6} t - \frac{1}{18} \int \frac{3}{(3t)^2+1} dt =$$
$$= \frac{t^2}{2} \arctan \frac{1}{3t} + \frac{1}{6} t - \frac{1}{18} \arctan 3t.$$
Quindi
$$\int \arctan \frac{1}{3\sqrt{x}}\, dx = x \arctan \frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{9} \arctan 3\sqrt{x}.$$

(9) Effettuando il cambio di variabile $x = t^2$ si ottiene $dx = 2tdt$ e l'integrale diventa
$$\int 2t \log(t^2 + 4t + 8)\, dt.$$
Integrando per parti si ottiene
$$\int 2t \log(t^2 + 4t + 8)\, dt = t^2 \log(t^2 + 4t + 8) - \int t^2 \frac{2t+4}{t^2+4t+8}\, dt =$$
$$= t^2 \log(t^2 + 4t + 8) - 2 \int \frac{t^3 + 2t^2}{t^2+4t+8}\, dt$$
Il numeratore ha grado 3 mentre il denominatore ha grado 2. Dividiamo numeratore per denominatore. Troviamo che il quoziente è $Q(t) = t-2$ mentre il resto è $R(x) = 16$. Quindi troviamo
$$-2 \int \frac{t^3 + 2t^2}{t^2+4t+8}\, dt = -2 \int (t - 2 + \frac{16}{t^2+4t+8})\, dt$$
$$= -t^2 + 4t - 32 \int \frac{1}{t^2+4t+8}\, dt = t^2 \log(t^2 + 4t + 8) - t^2 + 4t - 16 \arctan(\frac{2t+4}{4})$$

(10) tramite la sostituzione $\sqrt{x} = t$ (ossia $x = t^2$) si ottiene $dx = 2tdt$ e l'integrale diventa
$$2 \int t \arctan(2t+1)\, dt$$
Integrando per parti e poi dividendo il numeratore (di ordine 2) per il denominatore (di ordine 2) si ottiene
$$2 \int \arctan(2t+1)\, dt = t^2 \arctan(2t+1) - \int t^2 \frac{2}{1+(2t+1)^2} dt =$$
$$= t^2 \arctan(2t+1) - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{t+1}{2t^2+t+1} dt =$$

$$= t^2 \arctan(2t+1) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\int \frac{t+1}{2t^2+t+1} dt =$$

$$= t^2 \arctan(2t+1) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\int \frac{4t+4+1-1}{2t^2+t+1} dt =$$

$$= t^2 \arctan(2t+1) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\log(2t^2+t+1) + \frac{3}{8}\int \frac{1}{2t^2+t+1} dt =$$

$$= t^2 \arctan(2t+1) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\log(2t^2+t+1) + \frac{3}{4}\int \frac{1}{(2t+1)^2+1} dt =$$

$$= t^2 \arctan(2t+1) - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8}\log(2t^2+t+1) + \frac{3}{8}\arctan(2t+1)$$

Esempio 6.5. Calcoliamo una primitiva della funzione razionale semplice

$$\frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2} = \frac{6x+5}{((x+2)^2+9)^2}.$$

ossia $p = -2$ e $q = 3$. Procediamo con la sostituzione $x + 2 = 3t$ ossia $x = 3t - 2$,

$$\frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2} = \frac{18t-7}{9^2(t^2+1)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2} - \frac{7}{81}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

Integriamo,

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x+5}{(x^2+4x+13)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} - \frac{7}{27}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t^2} - \frac{7}{27}\Big[\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\arctan(t)\Big] \\
&= -\frac{7}{54}\arctan(t) - \frac{7t+18}{54(1+t^2)} \\
&= -\frac{7}{54}\arctan\Big(\frac{x+2}{3}\Big) - \frac{7(x+2)+68}{18(x^2+4x+13)}.
\end{aligned}$$

7. Decomposizione di funzioni razionali

Alla luce del Teorema 6.1, abbiamo visto che è sufficiente saper calcolare le primitive nei seguenti sei casi:

$$\frac{1}{x-r},\ \frac{1}{(x-r)^k},\ \frac{1}{(x-p)^2+q^2},\ \frac{2(x-p)}{(x-p)^2+q^2},\ \frac{2(x-p)}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k},\ \frac{1}{\big((x-p)^2+q^2\big)^k},$$

dove $k \in \mathbb{N}, k \neq 1$. Osserviamo $\int \frac{1}{(x-p)^2+q^2}\,\mathrm{d}t$ è un caso particolare di $\int \frac{1}{at^2+bt+c},\mathrm{d}t$ con $\Delta < 0$ e che sappiamo integrare nel modo seguente:

$$\int \frac{1}{at^2+bt+c},\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} + c.$$

In particolare

$$\int \frac{At+B}{(at^2+bt+c)^k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2At+b+(2B-b)}{(at^2+bt+c)^k}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2At+b}{(at^2+bt+c)^k}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{2B-b}{(at^2+bt+c)^k},\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2(-k+1)}(at^2+bt+c)^{-k+1} + \frac{2B-b}{2}\int \frac{1}{(at^2+bt+c)^k},\mathrm{d}t$$

e per risolvere l'ultimo integrale si ricorre a scrivere $at^2 + bt + c = a((x-p)^2 + q^2)$ e quindi alla sostituzione $x - p = tq$.

Osservazione 7.1. Per poter ottenere la decomposizione di una funzione razionale propria in somme di funzioni razionali semplici, come descritto nel teorema 6.1, è necessario conoscere tutti gli zeri del polinomio al denominatore e anche la loro molteplicità algebrica, il che equivale a conoscere una fattorizzazione del polinomio come prodotto di fattori irriducibili. Esistono formule e algoritmi per determinare esattamente tutti gli zeri di qualsiasi polinomio con grado minore o uguale a 4, mentre per generici polinomi con grado maggiore o uguale a 5 ciò non è possibile. Il problema della fattorizzazione polinomiale è il punto debole nel processo di decomposizione, in quanto non possediamo strumenti che ci garantiscano di ottenerla in ogni caso.

Generalizziamo ora quanto abbiamo fatto nel caso di denominatori di primo e secondo grado (vedi formule (19) e (20)). Andiamo pertanto a considerare alcuni esempi di decomposizione di funzioni razionali per le quali sia già nota la fattorizzazione del denominatore. Andiamo prima di tutto a considerare alcuni esempi di decomposizione di funzioni razionali per le quali **sia già nota o facilmente ottenibile la fattorizzazione del denominatore**. Supponiamo che la frazione da integrare sia del tipo $\frac{R}{D}$ con D un trinomio di terzo grado e R un polinomio di grado ≤ 2. Allora si presentano i seguenti casi:

(1) D può avere tutte e 3 le radici reali e distinte x_1, x_2, x_3: in questo caso la frazione viene spezzata come
$$\frac{R}{D} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}$$
con $A, B, C \in \mathbb{R}$ (vedere Esempio 7.7 riguardo un metodo rapido per trovare A, B, C);

(2) D può avere 1 radice reale e 2 complesse e coniugate: quindi D si fattorizza nel prodotto di un termine di primo grado e di un trinomio di secondo grado con $\Delta < 0$.

(3) D può avere 2 radici reali, una di molteplicità 1 e l'altra di molteplicità 2;

(4) D può avere 1 radice reale di molteplicità 3. In tal caso, se $D = a(x - x_1)^3$ la frazione viene spezzata come
$$\frac{R}{D} = \frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \frac{C}{(x - x_1)^3}$$
con $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora un esempio nel caso (2) ed uno nel caso (3).

Esempio 7.2. Calcoliamo una primitiva della funzione razionale semplice $\dfrac{12t^2}{t^3 + t - 2}$. Osserviamo che $t^3 + t - 2$ si annulla per $t = 1$ e dividendo $t^3 + t - 2$ per $t - 1$ si ottiene la fattorizzazione
$$t^3 + t - 2 = (t - 1)(t^2 + t + 2)$$
dove il polinomio $t^2 + t + 2$ ha $\Delta = -7$.

Cerchiamo A, B, C tali c he
$$\frac{12t^2}{t^3 + t - 2} = \frac{A}{(t - 1)} + \frac{Bt + C}{t^2 + t + 2}.$$
Quindi
$$12t^2 = A(t^2 + t + 2) + (Bt + C)(t - 1)$$
da cui
$$\begin{cases} 12 = A + B, \\ A - B + C = 0, \\ 2A - C = 0. \end{cases}$$

Si trova che $A = 3$, $B = 9$ e $C = 6$.

Quindi

$$\frac{12t^2}{t^3+t-2} = \frac{3}{(t-1)} + \frac{9t+6}{t^2+t+2} = \frac{3}{(t-1)} + \frac{9}{2}\frac{(2t+1)}{t^2+t+2} + \frac{6-\frac{9}{2}}{t^2+t+2}$$
$$= \frac{3}{t-1} + \frac{9}{2}\frac{(2t+1)}{t^2+t+2} + \frac{3}{2}\frac{1}{t^2+t+2}.$$

Segue che

$$\int \frac{12t^2}{t^3+t-2}\,\mathrm{d}t = 3\log|t-1| + \frac{9}{2}\log\bigl(t^2+t+2\bigr) + \frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\Bigl(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\Bigr).$$

Vediamo ora un esempio nel caso (3).

Esempio 7.3. Consideriamo

$$\frac{4x^2-3x-47}{(x+2)(x-3)^2}. \tag{24}$$

Nella sua decomposizione come somma di funzioni razionali semplici allo zero semplice corrisponderà un termine e allo zero doppio ne corrisponderanno due; quindi cerchiamo una decomposizione della forma

$$\frac{4x^2-3x-47}{(x+2)(x-3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}. \tag{25}$$

Moltiplichiamo entrambe i membri di (25) per il polinomio $(x+2)(x-3)^2$; otteniamo

$$4x^2-3x-47 = A(x-3)^2 + B(x+2)(x-3) + C(x+2).$$

Facendo i calcoli troviamo che

$$4x^2-3x-47 = (A+B)x^2 + (-6A-B+C)x + (9A-6B+2C),$$

e dunque, per il principio di identità dei polinomi, ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} A+B=4, \\ -6A-B+C=-3, \\ 9A-6B+2C=-47, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = -1$, $B = 5$, $C = -4$. Pertanto avremo

$$\frac{4x^2-3x-47}{(x+2)(x-3)^2} = -\frac{1}{x+2} + \frac{5}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2}.$$

Vediamo ora degli esempi con denominatore di grado superiore al terzo.

Esempio 7.4. In questo esempio il denominatore di quarto grado ha uno zero reale di molteplicità 2 e una coppia di zeri coniugati di molteplicità 1. Decomponiamo la frazione nel modo seguente:

$$\frac{2x^3-2x^2+4x+11}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Moltiplicando per i denominatori otteniamo

$$2x^3-2x^2+4x+11 = A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Sviluppando i calcoli ed uguagliando i coefficienti dei due polinomi si arriva al sistema

$$\begin{cases} A+C=2, \\ -A+B-2C+D=-2, \\ 4A+C-2D=4, \\ -4A+4B+D=11, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = 0$, $B = 3$, $C = 2$, $D = -1$. Dunque,

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 4x + 11}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2x-1}{x^2+4}.$$

Esempio 7.5. Vediamo un caso in cui il denominatore ha uno zero reale semplice e una coppia di zeri coniugati di molteplicità 2. Decomponiamo la frazione nel modo seguente:

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 4x + 11}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}.$$

Moltiplicando per i denominatori otteniamo

$$2x^3 - 2x^2 + 4x + 11 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1).$$

Sviluppando i calcoli ed uguagliando i coefficienti dei due polinomi si arriva al sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -B + C = 2, \\ 8A + 4B - C + D = -2, \\ -4B + 4C - D + E = 4, \\ 16A - 4C - E = 11, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = \frac{3}{5}$, $B = -\frac{3}{5}$, $C = \frac{7}{5}$, $D = -3$, $E = -7$. Dunque,

$$\frac{2x^3 - 2x^2 + 4x + 11}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{3}{5(x-1)} - \frac{3x-7}{5(x^2+4)} - \frac{3x+7}{(x^2+4)^2}.$$

Il procedimento algebrico che abbiamo applicato in questi esempi lo possiamo schematizzare nel seguente modo: dopo aver diviso il numeratore per il denominatore in modo che il grado del numeratore sia minore del grado del denominatore

(1) per prima cosa cerchiamo di ottenere la fattorizzazione in fattori irriducibili del denominatore della funzione razionale propria che vogliamo decomporre (negli esempi tale fattorizzazione era già fornita);
(2) Dalla fattorizzazione ricaviamo informazioni su quali sono gli zeri del denominatore e quale è la loro molteplicità, in questo modo possiamo capire quanti sono e quale forma hanno i termini della decomposizione;
(3) Moltiplicando tutto per il denominatore otteniamo due polinomi che dovranno coincidere;
(4) Dalle uguaglianze dei coefficienti dei due polinomi ricaviamo un sistema lineare la cui soluzione ci fornisce i coefficienti della scomposizione.

Questo procedimento, è una strada che porta sicuramente al risultato, ma quando il numero dei termini è elevato può diventare lunga e faticosa. A volte si possono trovare alcune scorciatoie per ricavare i coefficienti della decomposizione.

Osservazione 7.6. *Esiste un metodo abbastanza rapido per ricavare il coefficiente relativo alla componente corrispondente ad uno zero reale semplice. Sia $x = r$ uno zero semplice (ovvero con molteplicità 1) per il polinomio $D(x)$. Avremo che D si può fattorizzare nella forma $D(x) = (x-r)\widetilde{D}(x)$, dove $\widetilde{D}(x)$ è un polinomio che non si annulla in r. Inoltre nella decomposizione della funzione razionale propria $R(x)/D(x)$ comparirà solo un termine corrispondente allo zero r, della forma $\frac{A}{x-r}$. Avremo quindi*

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{R(x)}{(x-r)\widetilde{D}(x)} = \frac{A}{x-r} + \boxed{\begin{array}{c}\textit{funzioni razionali semplici,}\\ \textit{il cui denominatore}\\ \textit{non si annulla in } r\end{array}}.$$

Moltiplicando a destra e a sinistra per il solo fattore $x - r$ troviamo che

$$\frac{N(x)}{\widetilde{D}(x)} = A + (x-r) \cdot \boxed{\begin{array}{c}\textit{funzioni razionali semplici,}\\ \textit{il cui denominatore}\\ \textit{non si annulla in } r\end{array}}.$$

Valutando questa formula per $x = r$ il contributo dei termini nel riquadro sparisce, e rimane il valore del coefficiente cercato,

$$A = \frac{R(r)}{\widetilde{D}(r)}.$$

Esempio 7.7. Consideriamo la funzione razionale $\dfrac{x^2-2x+3}{x(x+1)(x-2)}$. Il denominatore possiede tre zeri semplici, 0, -1 e 2. La funzione razionale avrà dunque una decomposizione del tipo

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Moltiplicando per x e poi sostituendo $x = 0$ troviamo il valore di A,

$$\frac{x^2-2x+3}{(x+1)(x-2)} = A + \frac{xB}{x+1} + \frac{xC}{x-2} \implies A = \frac{0^2 - 2\cdot 0 + 3}{(0+1)(0-2)} = -\frac{3}{2}.$$

Moltiplicando per $x+1$ e poi sostituendo $x = -1$ troviamo il valore di B,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-2)} = \frac{(x+1)A}{x} + B + \frac{(x+1)C}{x-2} \implies B = \frac{(-1)^2 - 2(-1) + 3}{(-1)((-1)-2)} = 2.$$

Moltiplicando per $x-2$ e poi sostituendo $x = 2$ troviamo il valore di C,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x+1)} = \frac{(x-2)A}{x} + \frac{(x-2)B}{x+1} + C \implies C = \frac{2^2 - 2\cdot 2 + 3}{2(2+1)} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 7.8. *Decomponi le seguenti funzioni razionali proprie come somma di funzioni razionali semplici.*

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{2x-1}{x^2-\pi x-2\pi^2}, & \dfrac{x^2+2x}{(x+3)^2(x-4)}, & \dfrac{x^2+7x+12}{x^3(x+3)}, \\
\dfrac{x+1}{x^3-x^2+x}, & \dfrac{x+1}{x^4-x^3+x^2}, & \dfrac{12x^3-60}{x^4+5x^2+4}, \\
\dfrac{2x^3-5x^2}{x^4+4x^2+4}, & \dfrac{120}{x(x-1)(x-2)(x-3)}, & \dfrac{120}{x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2}, \\
\dfrac{1}{x^4+1}, & \dfrac{1}{x^8-1}, & \dfrac{1}{x^8+1}.
\end{array}$$

Ora abbiamo sufficienti strumenti e conoscenze per poter calcolare le primitive di qualsiasi funzione razionale di cui sappiamo fattorizzare il polinomio al denominatore. Vediamo alcuni esempi concreti, calcolati utilizzando diversi metodi a nostra disposizione.

Esempio 7.9. *Calcoliamo una primitiva di $\frac{x^7}{x^4-1}$. Osserviamo che $x^7 = x^4 \cdot x^3$ e la derivata di x^4 è $4x^3$. Procedendo con la sostituzione $x^4 = y$ troviamo che*

$$\int \frac{x^7}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{x^4-1}\cdot 4x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{y}{y-1}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=x^4} =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)\mathrm{d}y\bigg|_{y=x^4} = \frac{1}{4}\left(y + \log|y-1|\right)\big|_{y=x^4} = \frac{1}{4}\left(x^4 + \log\left|x^4-1\right|\right).$$

Esempio 7.10. *Calcoliamo una primitiva di* $f(x) = \frac{1}{x^4-1}$. *La scorciatoia dell'exa precedente, questa volta non si può applicare. Giocando con i prodotti notevoli troviamo la seguente fattorizzazione in polinomi irriducibili,*

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Ne segue che $f(x)$ *avrà una decomposizione con la seguente forma,*

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}. \tag{26}$$

Osserviamo che f *è una funzione pari,* $f(x) = f(-x)$, *e dunque avremo anche che*

$$\frac{1}{x^4 - 1} = f(-x) = \frac{A}{-x - 1} + \frac{B}{-x + 1} + \frac{C(-x) + D}{x^2 + 1} = \frac{-B}{x - 1} + \frac{-A}{x + 1} + \frac{(-C)x + D}{x^2 + 1}. \tag{27}$$

Dal confronto dei coefficienti delle decomposizioni (26) *e* (27) *deduciamo che* $B = -A$ *e che* $C = -C$, *ovvero* $C = 0$. *Inoltre siccome* $x = 1$ *è uno zero semplice di* $x^4 - 1$, *il valore di* A *si può ottenere moltiplicando* (26) *per* $x - 1$ *e poi sostituendo* $x = 1$,

$$A = \left.\frac{1}{(x + 1)(x^2 + 1)}\right|_{x=1} = \frac{1}{4}.$$

Dunque $B = -A = -\frac{1}{4}$, *e troviamo quindi che*

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}\Big) + \frac{D}{x^2 + 1},$$

sostituendo ora il valore $x = 0$ *in quest'ultima espressione troviamo,*

$$-1 = \frac{1}{4}\big((-1) - 1\big) + D,$$

e dunque $D = -\frac{1}{2}$. *Abbiamo quindi trovato che*

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}.$$

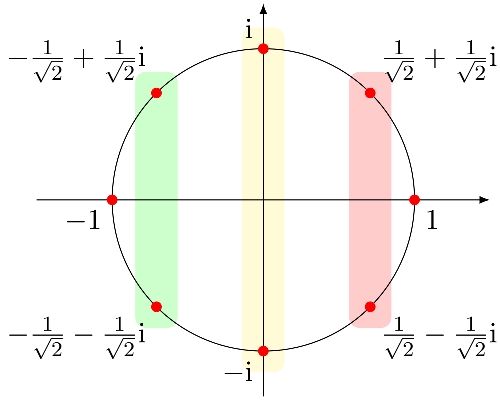
Integrando queste frazioni razionali semplici otteniamo una primitiva F *della funzione* f,

$$F(x) = \frac{1}{4}\log|x - 1| - \frac{1}{4}\log|x + 1| - \frac{1}{2}\arctan(x) = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{1}{2}\arctan(x).$$

Esempio 7.11. *Calcoliamo una primitiva di* $\frac{x^{10}}{x^8-1}$. *Siccome il numeratore ha grado maggiore del denominatore scomponiamolo nella somma di un polinomio e una funzione razionale propria, per farlo possiamo eseguire la divisione tra i polinomi, oppure, visto che si tratta di polinomi abbastanza semplici, possiamo manipolare l'espressione con qualche passaggio algebrico,*

$$\frac{x^{10}}{x^8 - 1} = \frac{x^2(x^8 - 1) + x^2}{x^8 - 1} = x^2 + \frac{x^2}{x^8 - 1}.$$

Una primitiva di x^2 *è* $\frac{1}{3}x^3$. *Cerchiamo ora una primitiva di* $\frac{x^2}{x^8-1}$. *Per fattorizzare il denominatore osserviamo che gli zeri in campo complesso del polinomio* $z^8 - 1$ *coincidono con le radici ottave dell'unità. Tali radici formano i vertici di un ottagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio* 1 *con centro nell'origine del piano complesso. Si tratta dei due numeri reali* 1 *e* -1 *delle tre coppie di numeri complessi coniugati* $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$, $\pm\mathrm{i}$ *e* $\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}$.



Avendo trovato tutti gli zeri del denominatore, possiamo scrivere la sua fattorizzazione,

$$x^8-1=(x-1)(x+1)\left(\left(x+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\tfrac{1}{2}\right)\left(x^2+1\right)\left(\left(x-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\tfrac{1}{2}\right)$$

Cerchiamo quindi una scomposizione della forma:

$$\frac{x^2}{x^8-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{Ex+F}{x^2+1}+\frac{Gx+H}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Siccome si tratta di una funzione pari, scambiano x con $-x$ troviamo che

$$\frac{x^2}{x^8-1}=\frac{-B}{x-1}+\frac{-A}{x+1}+\frac{-Gx+H}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{-Ex+F}{x^2+1}+\frac{-Cx+D}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Confrontando le ultime due uguaglianze ricaviamo che $B=-A$, $G=-C$, $H=D$ e $E=0$. Dunque

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^8-1}&=\frac{A}{x-1}-\frac{A}{x+1}+\frac{Cx+D}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{F}{x^2+1}+\frac{-Cx+D}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}=\\&=\frac{2}{x^2-1}\cdot A-\frac{2\sqrt{2}x^2}{x^4+1}\cdot C+\frac{2(x^2+1)}{x^4+1}\cdot D+\frac{1}{x^2+1}\cdot F.\end{aligned}$$

Essendo $x=1$ uno zero semplice possiamo calcolare A facilmente moltiplicando (28) per $x-1$ e poi valutando il risultato con $x=1$. Siccome $x^8-1=(x-1)\sum_{k=0}^{7}x^k$, otteniamo

$$A=\left.\frac{x^2}{\sum_{k=0}^{7}x^k}\right|_{x=1}=\frac{1}{8}.$$

Ricaviamo allora che

$$-\frac{2\sqrt{2}x^2}{x^4+1}\cdot C+\frac{2(x^2+1)}{x^4+1}\cdot D+\frac{1}{x^2+1}\cdot F=\frac{x^2}{x^8-1}-\frac{1}{4(x^2-1)}.$$

Valutando quest'espressione in $x=0$, $x=\sqrt{2}$ e $x=\sqrt{3}$ troviamo che C, D, F devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases}2D+F=\dfrac{1}{4},\\[2mm] -\dfrac{4\sqrt{2}}{5}C+\dfrac{6}{5}D+\dfrac{1}{3}F=-\dfrac{7}{60},\\[2mm] -\dfrac{3\sqrt{2}}{5}C+\dfrac{4}{5}D+\dfrac{1}{4}F=-\dfrac{7}{80},\end{cases}$$

che ha come soluzione $C = \frac{1}{4\sqrt{2}}$, $D = 0$, $F = \frac{1}{4}$. *Possiamo quindi ricavare tutti i coefficienti,*

$$A = \frac{1}{8}, \quad B = -\frac{1}{8}, \quad C = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = \frac{1}{4}, \quad G = -\frac{1}{4\sqrt{2}}, \quad H = 0,$$

e scrivere in modo completo la decomposizione cercata,

$$\frac{1}{x^8-1} = \frac{1}{8}\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{8}\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{x}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{x}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Calcoliamo le primitive dei singoli termini. Prima quelli più immediati,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \log|x-1|, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \log|x+1|, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan(x),$$

Per i rimanenti usiamo le sostituzioni $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(y \mp 1)$,

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \int \frac{y \mp 1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y\bigg|_{y=\sqrt{2}x\pm 1}.$$

Osserviamo che

$$\int \frac{y\mp 1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2+1} \mp \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{1}{2}\log(y^2+1) \mp \arctan(y).$$

Quando $y = \sqrt{2}x \pm 1$ *abbiamo*

$$\log(y^2+1) = \log\bigl(2(x^2 \pm \sqrt{2}x + 1)\bigr) = \log\bigl(x^2 \pm \sqrt{2}x + 1\bigr) + \log 2,$$

e dunque

$$\int \frac{x}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\bigl(x^2+\sqrt{2}x+1\bigr) - \arctan\bigl(\sqrt{2}x+1\bigr),$$

$$\int \frac{x}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\bigl(x^2-\sqrt{2}x+1\bigr) - \arctan\bigl(\sqrt{2}x-1\bigr).$$

Mettiamo insieme tutte le parti e otteniamo la primitiva cercata

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{10}\,\mathrm{d}x}{x^8-1} = &\int x^2\,\mathrm{d}x + \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^8-1} = \\
=&\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{4}\arctan(x) + \\
&+ \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\bigl(x^2+\sqrt{2}x+1\bigr) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}x+1\bigr) + \\
&- \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\bigl(x^2-\sqrt{2}x+1\bigr) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}x-1\bigr) = \\
=&\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{8\sqrt{2}}\log\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right) + \\
&+ \frac{1}{4}\arctan(x) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}x-1\bigr) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\bigl(\sqrt{2}x+1\bigr).
\end{aligned}$$

Esercizio 7.12. *Calcola le primitive delle seguenti funzioni razionali*

$$\frac{x^3}{x^2+x-2}, \qquad \frac{x^2}{x^2+4}, \qquad \frac{x^3+x^2+2}{x^3(x^2+2)},$$
$$\frac{x^3+2x^2-x+2}{x^3+8}, \qquad \frac{x^6}{(x^2+4)^2}, \qquad \frac{x^7+1}{x^5+1},$$
$$\frac{x^5}{x^6-1}, \qquad \frac{1}{x^6-1}, \qquad \frac{1}{x^6+1}.$$

8. Sostituzioni parametriche

Descriviamo ora un paio di sostituzioni che risultano particolarmente utili nel calcolo di primitive per funzioni che sono costruite combinando funzioni trigonometriche. Utilizzando la definizione di tangente, si ha che

$$1 = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = (\cos x)^2(1 + (\tan x)^2)$$

da cui ricaviamo che

$$\cos^2 x = (\cos x)^2 = = \frac{1}{1+(\tan x)^2)}, \tag{29}$$

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2 = \frac{(\tan x)^2}{1+(\tan x)^2}, \tag{30}$$

$$(\sin x)(\cos x) = (\tan x)(\cos x)^2 = \frac{\tan x}{1+(\tan x)^2} \tag{31}$$

- Nel caso in cui la funzione integranda è espressa solo in termini di $\tan x$, $(\cos x)^2$, $(\sin x)^2$ e $(\sin x)(\cos x)$, si considera la sostituzione

$$t = \tan x\,. \tag{32}$$

Differenziando in (32) e tenendo presente la prima delle formule (29), abbiamo inoltre che

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{(\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = (1+t^2)\,\mathrm{d}x.$$

Mettendo tutto insieme, otteniamo che con la sostituzione (32) si ha che

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\[2ex] \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}, \\[2ex] \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \\[2ex] (\sin x)(\cos x) = \dfrac{t}{1+t^2}. \end{cases} \tag{33}$$

e l'integrale assegnato diventa

$$\int F\left(\tan x, \cos^2 x, \sin^2 x, \sin x\cos x\right)\,\mathrm{d}x = \int F\Big(t, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\Big|_{t=\tan x}. \tag{34}$$

Ci riconduciamo quindi a risolvere l'integrale di una funzione razionale (della variabile t), che possiamo integrare utilizzando i metodi visti nella lezione precedente.

Esempio 8.1. Calcoliamo l'integrale indefinito
$$\int \frac{(\tan x)^2}{1+(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x.$$
Procedendo con la sostituzione $t = \tan x$ esso si trasforma in
$$\int \frac{t^2}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Abbiamo la decomposizione
$$\frac{t^2}{1+2t^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2t^2+1)}.$$
Integrando otteniamo
$$\int \frac{t^2}{1+2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\sqrt{2}\,t)^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\big(\sqrt{2}\,t\big).$$
Ritornando alla variabile x con la sostituzione troviamo
$$\int \frac{(\tan x)^2}{1+(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\big(\sqrt{2}\tan x\big).$$

- Se in un integrale la funzione integranda è espressa solo in termini di $\cos x$ e $\sin x$, si usa invece un'altra sostituzione: si pone
$$t = \tan\frac{x}{2}. \tag{35}$$

Da quanto visto sopra
$$\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}.$$
Quindi
$$\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{1}{1+t^2}$$
e, usando le formule di duplicazione, otteniamo
$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2t\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^2 - \Big(\sin\frac{x}{2}\Big)^2 = 2\Big(\cos\frac{x}{2}\Big)^2 - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Differenziando in (35) troviamo anche che
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x.$$

Mettendo tutto insieme, otteniamo che con la sostituzione (35) si ha che
$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\[2ex] \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\[2ex] \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases} \tag{36}$$

Questo significa che se in un integrale la funzione integranda è espressa solo in termini di $\cos x$ e $\sin x$, usando la sostituzione (35) l'integrale assegnato diventa

$$\int F(\cos x, \sin x)\, \mathrm{d}x = \int F\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}}. \tag{37}$$

Ci riconduciamo quindi a risolvere l'integrale di una funzione razionale (della variabile t), che possiamo integrare utilizzando i metodi visti nella lezione precedente.

Esempio 8.2. Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x.$$

Procedendo con la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$ otteniamo

$$\int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t = \log|t| = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|.$$

Osservazione 8.3. La funzione tangente è una funzione periodica con periodo π, e dunque non è invertibile in generale, inoltre non è definita nei punti della forma $k\pi + \pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$, e il suo dominio è formato dall'unione degli intervalli della forma $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$, Le sostituzioni (32) e (35) sono invertibili solo se considerate su uno di questi intervalli per l'argomento della tangente. La sostituzione inversa di (32) è $x = \arctan t$ solo per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La sostituzione inversa di (35) è $x = 2\arctan t$ solo per $x \in]-\pi, \pi[$. È importante tenere ben presente questo per non incorrere in errori quando si calcolano integrali definiti. Il teorema fondamentale del calcolo vale solo quando consideriamo funzioni continue definite su un intervallo, e non su unioni di intervalli.

Esempio 8.4. *Calcoliamo l'integrale*

$$I := \int_0^\pi \frac{1}{1+(\cos x)^2}\, \mathrm{d}x \tag{38}$$

Procediamo con la sostituzione $t = \tan x$. Se procedessimo in modo ingenuo troveremmo

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan\pi} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2}\frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = \int_0^0 \frac{1}{2+t^2}\, \mathrm{d}t = 0,$$

ma questo risultato non può essere corretto in quanto l'integrale deve essere positivo; infatti, siccome $0 < 1+(\cos x)^2 \leqslant 2$, abbiamo

$$I \geqslant \int_0^\pi \frac{1}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} > 0.$$

L'errore è dovuto al fatto che la funzione $\tan x$ *usata per la sostituzione non è definita nel punto $\pi/2$ che si trova all'interno dell'intervallo $[0, \pi]$, e in quel punto non ammette nemmeno un prolungamento continuo;* $\tan x$ *è comunque ben definita e continua su $[0, \pi/2[$ e su $]\pi/2, \pi]$. Decomponiamo allora l'integrale in due parti, usando la proprietà di additività,*

$$I = I_1 + I_2, \qquad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(\cos x)^2}\, \mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{1+(\cos x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Osserviamo inoltre che il secondo integrale coincide con il primo, $I_2 = I_1$, come si può dedurre tramite la sostituzione $x = \pi - y$, per via delle proprietà di simmetria del coseno, in quanto $(\cos(\pi - y))^2 = (\cos y)^2$. Dunque,

$$I = 2I_1 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)^2}.$$

La sostituzione $t = \tan x$ non è definita nel punto $\pi/2$, ma è continua su ogni intervallo $[0, b[$ con $0 < b < \pi/2$; sappiamo inoltre che la funzione integrale è continua e dunque possiamo ripetere i calcoli di prima su $[0, b[$ per poi passare al limite per $b \to \frac{\pi}{2}^-$,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (\cos x)^2} = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{1 + (\cos x)^2} = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \int_{\tan 0}^{\tan b} \frac{\mathrm{d}t}{2 + t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) \right]_{t=0}^{t=\tan b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \arctan\Big(\frac{\tan b}{\sqrt{2}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t \to +\infty} \arctan\Big(\frac{t}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Otteniamo quindi che il valore corretto per l'integrale (38) è $I = 2I_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 8.5. *Calcola i seguenti integrali di funzioni ottenute componendo funzioni razionali con funzioni trigonometriche.*

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x)^4\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{(\cos x)^2}{1 - 2(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{3\pi} (\sin x)^4\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(\sin x)(\cos x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\sin x)^2 (\cos x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{2\sin x}{4(\cos x)^2 - 8(\cos x) + 5}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{4\pi} \frac{1}{1 + (\sin 2x)^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(\sin x)\,(2 + (\tan x)^2)}\,\mathrm{d}x.$$

9. Primitive di funzioni razionali composte con radicali

Vediamo in questa sezione alcuni esempi di sostituzioni utili per il calcolo di primitive di funzioni ottenute come composizione di funzioni razionali con radicali. Indichiamo nel seguito con $f(\cdot, \cdot)$ una generica funzione razionale dipendente da due variabili.

- Cominciamo con il considerare integrali della forma
$$\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{a\,x + b}{c\,x + d}}\right) \mathrm{d}x, \tag{39}$$
dove $n \in \mathbb{N}$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad \neq bc$. In questi casi conviene considerare la sostituzione
$$t = \sqrt[n]{\frac{a\,x + b}{c\,x + d}},$$
da cui si ricava
$$x = -\frac{d\,t^n - b}{c\,t^n - a}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{n(ad - bc)t^{n-1}}{(c\,t^n - a)^2}\,\mathrm{d}t.$$
L'integrale (39) viene trasformato nell'integrale
$$n(ad - bc) \int f\Big(-\frac{d\,t^n - b}{c\,t^n - a}, t\Big) \frac{t^{n-1}\,\mathrm{d}t}{(c\,t^n - a)^2} \Bigg|_{t = \sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}}.$$

Esempio 9.1. Calcoliamo
$$\int \frac{4}{x - 1 + \sqrt[3]{x + 1}}\,\mathrm{d}x.$$
Utilizzando la sostituzione
$$t = \sqrt[3]{x + 1}, \qquad x = t^3 - 1, \qquad \mathrm{d}x = 3t^2\,\mathrm{d}t,$$

l'integrale si trasforma in

$$\int \frac{4}{(t^3-1)-1+t} 3t^2\,\mathrm{d}t = \int \frac{12t^2}{t^3+t-2}\,\mathrm{d}t.$$

Osserviamo che t^3+t-2 si annulla per $t=1$ e abbiamo la fattorizzazione

$$t^3+t-2 = (t-1)(t^2+t+2) = (t-1)\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right).$$

e la decomposizione in frazioni semplici

$$\frac{12t^2}{t^3+t-2} = \frac{3}{t-1} + \frac{9}{2}\,\frac{2\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}.$$

Integrando troviamo

$$\int \frac{12t^2}{t^3+t-2}\,\mathrm{d}t = 3\log|t-1| + \frac{9}{2}\log\left(t^2+t+2\right) + \frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right).$$

Riapplicando la sostituzione troviamo

$$\begin{aligned}\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{x-1+\sqrt[3]{x+1}} &= 3\log\left|\sqrt[3]{x+1}-1\right| + \\ &\quad + \frac{9}{2}\log\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+2\right) + \\ &\quad + \frac{3}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{7}}\right).\end{aligned}$$

- Per risolvere integrali della forma

$$\int f\left(x, \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x, \tag{40}$$

con $x \in [-1,1]$, si ricorre alla sostituzione

$$x = \cos\theta, \qquad \sqrt{1-x^2} = \sin\theta, \qquad \mathrm{d}x = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \theta \in [0,\pi],$$

e si ottiene

$$-\int f\left(\cos\theta, \sin\theta\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\Big|_{\theta=\arccos x},$$

A loro volta, questi integrali possono essere trasformati in integrali di funzioni razionali utilizzando la sostituzione parametriche viste nella precedente sezione,

$$t = \tan\frac{\theta}{2} \geqslant 0, \quad x = \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Osserviamo che componendo le due sostituzioni ricaviamo

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{-4t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}, \qquad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \tag{41}$$

che applicata direttamente all'integrale (40) di partenza ci porta a integrali della forma

$$-\int f\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\Big|_{t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

- Per risolvere integrali della forma
$$\int f\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\,\mathrm{d}x, \qquad \int f\big(x, \sqrt{x^2+1}\big)\,\mathrm{d}x,$$
con $x \geqslant 1$, si ricorre alle funzioni iperboliche
$$\cosh t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}, \quad \sinh t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$$
che soddisfano le relazioni
$$\begin{cases} \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \\ (\cosh t)' = \sinh t, \\ (\sinh t)' = \cosh t \end{cases}$$
Inoltre $\cosh 2t = (\cosh t)^2 + (\sinh t)^2$ e $\sinh 2t = 2\sinh t \cosh t$. Ricordiamo che $t \mapsto \cosh t$ ha funzione inversa
$$\operatorname{sett}\cosh x = \log\big(x + \sqrt{x^2-1}\big),$$
mentre $t \mapsto \sinh t$ ha funzione inversa
$$\operatorname{sett}\sinh x = \log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big),$$

Per gli integrali
$$\int f\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\,\mathrm{d}x, \tag{42}$$
si ricorre alla sostituzione $x = \cosh t$ da cui segue che
$$\begin{cases} \sqrt{x^2-1} = \sinh t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ t = \operatorname{sett}\cosh x = \log\big(x + \sqrt{x^2-1}\big), \\ \mathrm{d}x = \sinh t\,\mathrm{d}t \end{cases}$$
e
$$\int f\big(\cosh t, \sinh t\big)\sinh t\,\mathrm{d}t = \int f\Big(\frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}, \frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\Big)\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t,$$

mentre per gli integrali della forma
$$\int f\big(x, \sqrt{x^2+1}\big)\,\mathrm{d}x, \tag{43}$$
si ricorre alla sostituzione $x = \sinh t$ (da cui $\mathrm{d}x = \cosh t\,\mathrm{d}t$) che permette di ottenere
$$\sqrt{x^2+1} = \cosh t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$$
e
$$\int f\big(\sinh t, \cosh t\big)\cosh\,\mathrm{d}t = \int f\Big(\frac{1}{2}\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}, \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\Big)\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t,$$

Questi integrali a loro volta possono essere trasformati in integrali di funzioni razionali utilizzando la sostituzione
$$\mathrm{e}^t = y, \quad \mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{y}, \quad t = \log y, \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y. \tag{44}$$
e usando la relazione
$$t = \operatorname{sett}\cosh x = \log\big(x + \sqrt{x^2-1}\big),$$
si ottiene che
$$y = \mathrm{e}^t = x + \sqrt{x^2-1}, \quad x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}\Big(y + \frac{1}{y}\Big), \quad \mathrm{d}x = \frac{y^2-1}{2y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Utilizzando direttamente quest'ultima sostituzione abbiamo che l'integrale (42) si trasforma in

$$\int f\left(\frac{1}{2}\Big(y+\frac{1}{y}\Big), \frac{1}{2}\Big(y-\frac{1}{y}\Big)\right) \frac{y^2-1}{2y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Esempio 9.2. Calcoliamo $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x$. Applichiamo prima la sostituzione $x = \sinh t$, e poi la sostituzione $\mathrm{e}^t = y$,

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\operatorname{sett}\sinh 1}^{\operatorname{sett}\sinh 2} \frac{\cosh t}{\sinh t}\cosh t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\log(1+\sqrt{2})}^{\log(2+\sqrt{5})} \frac{\big(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\big)^2}{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{\big(y+\frac{1}{y}\big)^2}{y-\frac{1}{y}}\,\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{(y^2+1)^2}{2y^2(y^2-1)}\,\mathrm{d}y$$

Calcoliamo la decomposizione della funzione razionale nell'ultimo integrale,

$$\frac{(y^2+1)^2}{2y^2(y^2-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}.$$

Integrando otteniamo

$$\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{(y^2+1)^2}{2(y^2-1)}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2y} + \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right]_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} =$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2} + \log\Big(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\Big).$$

- Consideriamo ora integrali della forma

$$\int f\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x, \tag{45}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $\Delta := b^2 - 4ac \neq 0$. Ovviamente dobbiamo escludere il caso $a < 0$ e $\Delta < 0$ in cui il trinomio $ax^2 + bx + c$ risulta sempre negativo e la sua radice quadrata non è definita.

Osserviamo che possiamo scrivere il trinomio sotto radice nella forma

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = \frac{|\Delta|}{4a}\left(\Big(\frac{2ax+b}{\sqrt{|\Delta|}}\Big)^2 - (\operatorname{sgn}\Delta)\right).$$

Effettuiamo la sostituzione

$$t = \frac{2a\,x+b}{\sqrt{|\Delta|}},$$

da cui

$$x = \frac{\sqrt{|\Delta|}\,t - b}{2a}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\,\mathrm{d}t.$$

A seconda dei segni del coefficiente a e del discriminante Δ distinguiamo diversi casi:
- Se $a > 0$ e $\Delta > 0$, l'integrale (45) si riconduce ad un integrale del tipo (42);
- Se $a > 0$ e $\Delta < 0$, l'integrale (45) si riconduce ad un integrale del tipo (43);
- Se $a < 0$ e $\Delta > 0$, l'integrale (45) si riconduce ad un integrale del tipo (40).

Esempio 9.3. *Calcoliamo*

$$I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3+5x-2x^2}}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}3+5x-2x^2=2\left(\frac{3}{2}+\frac{25}{16}-\Big(\frac{5}{4}\Big)^2+2\frac{5}{4}x-x^2\right)=\\=2\left(\frac{49}{16}-\Big(x-\frac{5}{4}\Big)^2\right)=\frac{49}{8}\left(1-\Big(\frac{4x-5}{7}\Big)^2\right).\end{aligned}$$

Applichiamo la sostituzione

$$t=\frac{4x-5}{7},\qquad x=\frac{7t+5}{4},\qquad \sqrt{3+5x-2x^2}=\frac{7}{2\sqrt{2}}\sqrt{1-t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{7}{4}\,\mathrm{d}t,$$

e otteniamo un integrale della forma (40),

$$I=\int_{-\frac{1}{7}}^{\frac{3}{7}} \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{d}t}{(7t+5)\sqrt{1-t^2}}.$$

Proseguiamo con una sostituzione della forma (41),

$$y=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}},\qquad t=\frac{1-y^2}{1+y^2},\qquad \sqrt{1-t^2}=\frac{2y}{1+y^2},\qquad \mathrm{d}t=\frac{-4y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2},$$

e l'integrale diventa

$$I=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{5}}} \frac{2\sqrt{2}(-4)y\,\mathrm{d}y}{(7(1-y^2)+5(1+y^2))2y}=\int_{\sqrt{\frac{2}{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{2\sqrt{2}\,\mathrm{d}y}{6-y^2}.$$

Decomponiamo la funzione razionale dell'ultimo integrale,

$$\frac{2\sqrt{2}}{6-y^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{y+\sqrt{6}}-\frac{1}{y-\sqrt{6}}\Big).$$

E integriamo

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\log\left|\frac{y+\sqrt{6}}{y-\sqrt{6}}\right|\right]_{\sqrt{\frac{2}{5}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\log\Big(\frac{11+2\sqrt{18}}{8+\sqrt{15}}\Big).$$

Esercizio 9.4. *Calcola i seguenti integrali.*

$$\int\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x,\qquad \int\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x,\qquad \int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4+3(\log x)^2}},\qquad \int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+3}},\qquad \int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-x^2}},$$
$$\int\frac{x^3+x}{\sqrt{-x^4+3x^2-2}}\,\mathrm{d}x,\qquad \int\sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\,\mathrm{d}x,\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\left(\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}-2\right)}.$$

10. Formule ricorsive

Abbiamo già incontrato formule ricorsive per integrali quando abbiamo calcolato primitive per funzioni irrazionali semplici. Indichiamo con $F_n(x) := \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ la famiglia di primitive di $\frac{1}{(1+x^2)^n}$, con $n \in \mathbb{N}$. Si calcola facilmente che $F_1(x) = \arctan(x) + c$. Abbiamo visto nella precedente lezione che vale la formula

$$F_{n+1}(x) = \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \Big(1 - \frac{1}{2n}\Big) F_n(x). \tag{46}$$

Questa formula ci permette di calcolare esplicitante ciascuna F_n, calcolando prima F_2 a partire da F_1, poi F_3 da F_2 e quindi via.

Vediamo altri esempi di formule iterative. Consideriamo le seguenti famiglie di integrali,

$$A_n(x) := \int (\cos x)^n \,\mathrm{d}x, \quad B_n(x) := \int (\sin x)^n \,\mathrm{d}x, \quad C_{m,n}(x) := \int (\sin x)^m (\cos x)^n \,\mathrm{d}x,$$

con $n, m \in \mathbb{N}$. Poniamo inoltre $C_{0,n}(x) := A_n(x)$ e $C_{n,0} := B_n(x)$. Quando $n = 1$ si calcola facilmente che

$$\begin{aligned}
A_1(x) &= \int \cos x \,\mathrm{d}x = (\sin x) + c,\\
B_1(x) &= \int \sin x \,\mathrm{d}x = (-\cos x) + c,\\
C_{m,1} &= \int (\sin x)^m \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1} + c,\\
C_{1,m} &= \int (\cos x)^m \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}(-\cos x)^{m+1} + c.
\end{aligned}$$

Per $n = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
A_2(x) &= \int (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + c,\\
B_2(x) &= \int (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + c,
\end{aligned}$$

ed anche

$$C_{2,m}(x) = \int (\cos x)^m (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \int (\cos x)^m \big(1 - (\cos x)^2\big) \,\mathrm{d}x = A_m(x) - A_{m+2}(x).$$

Per $n > 2$, procediamo integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x \,\mathrm{d}x\\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int D[(\cos x)^{n-1}] \sin x \,\mathrm{d}x\\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x\\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) C_{2,n-2}\\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)\big(A_{n-2}(x) - A_n(x)\big),
\end{aligned}$$

da cui si ricava la formula ricorsiva

$$A_n(x) = \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1} \sin x + \frac{n-1}{n} A_{n-2}(x),$$

che ci permette di calcolare tutti gli A_n a partire da A_1 e A_2.

Esercizio 10.1. *Ricava delle formule ricorsive*

(1) per calcolare B_n conoscendo B_{n-2};
(2) per calcolare $C_{m,n}$ conoscendo $C_{m,n-2}$;
(3) per calcolare $C_{n,m}$ conoscendo $C_{n-2,m}$.

Esercizio 10.2. *Determina le primitive di* $(\cos x)^4(\sin x)^2$ *e di* $(\cos x)^4(\sin x)^3$.

11. Esercizi vari

Osservazione 11.1. *Quando si procede nel calcolo di integrali, spesso si possono percorrere strade diverse per arrivare allo stesso risultato, impiegando metodi e tecniche diverse, alcune di queste strade possono risultare molto lunghe e altre molto brevi, pur avendo lo stesso punto di partenza e di arrivo. Vediamo ad esempio quattro metodi diversi per ottenere la primitiva di* $\sin x \cos x$.

- *Primo metodo: utilizziamo la sostituzione parametrica* $t = \tan\frac{x}{2}$ *come indicato in* (37). *Abbiamo*
$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \frac{2t}{1+t^2}\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}} = \int \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t\bigg|_{t=\tan\frac{x}{2}}.$$
Decomponiamo la funzione razionale integranda come somma di funzioni razionali semplici,
$$\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} + \frac{8t}{(1+t^2)^3}.$$
Integando le frazioni semplici troviamo
$$\int \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{1+t^2} - \frac{2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2.$$
Tornando indietro con la sostituzione $t = \tan\frac{x}{2}$, *troviamo il risultato cercato*
$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}(\sin x)^2}.$$
- *Secondo metodo: utilizziamo la sostituzione parametrica* $t = \tan x$ *come indicato in* (34). *Abbiamo*
$$\int (\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{t}{1+t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\bigg|_{t=\tan x} = \frac{1}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\bigg|_{t=\tan x}.$$
Integrando la frazione semplice,
$$\frac{1}{2}\int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t^2}.$$
e tornando indietro con la sostituzione troviamo
$$\int (\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-\frac{1}{2}(\cos x)^2}.$$
- *Terzo metodo: procediamo integrando per parti. Concatenando due integrazioni per parti troviamo*
$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x \sin x - \int \cos x \sin x \,\mathrm{d}x,$$
da cui ricaviamo ancora
$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{1}{2}(\sin x)^2}.$$

- *Quarto metodo: utilizziamo identità trigonometriche. Per le formule di duplicazone abbiamo* $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ *e dunque*

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{-\frac{1}{4}\cos(2x)}.$$

- *Quinto metodo: procediamo per sostituzione diretta. Siccome* $\cos x$ *è la derivata di* $\sin x$*, con la sostituzione* $y = \sin x$*,* $\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x$ *troviamo*

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}y\Big|_{y=\sin x} = \frac{1}{2}y^2\Big|_{y=\sin x} = \boxed{\frac{1}{2}(\sin x)^2}.$$

Sebbene in alcuni casi le formule ottenute per le primitive con i diversi metodi sono scritte in modo diverso tutte esse coincidono a meno di costanti additive,

$$\frac{1}{2}(\sin x)^2 = -\frac{1}{2}(\cos x)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}.$$

Nello svolgere i seguenti esercizi cercate di capire quali metodi potete applicare e quali di essi vi portano al risultato in maniera più semplice o veloce.

Esercizio 11.2. *Calcola i seguenti integrali indefiniti,*

$$\int 3x\,|x|\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{4(\cos x)^2 - (\sin x)^2}, \qquad \int \frac{x\arctan x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int (\cos x)\log(\tan x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x\cos(2x)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{(\cos x)\sqrt{\sin x}}{4-(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \frac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 3}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sqrt{x}\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\arctan\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 11.3. *Calcola i seguenti integrali definiti,*

$$\int_{-2}^{1} 3x\,|x|\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^4 \mathrm{e}^{-|x-1|}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-3}^{5} |\mathrm{e}^x - 1|\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\log 4} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{x/2} + 3}, \qquad \int_0^1 \log(1+\sqrt{1-x})\,\mathrm{d}x, \qquad \int_4^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})},$$

$$\int_0^{2\pi} \big(\cos(3x)\big)^2 (\sin(3x))^4\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} (\cos x)^5\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^{1} \arccos x\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 11.4. *Determina un polinomio* $P(x)$ *di secondo grado tale che l'integrale*

$$\int \frac{P(x)\,\mathrm{d}x}{x^3(x-1)^2}$$

sia una funzione razionale? Tale polinomoio è univocamento determinato?

Esercizio 11.5. *Utilizzando eventualmente le formule di prostaferesi, calcola i seguenti integrali,*

$$\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x,$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Email address, Francesca Prinari: `francesca.prinari@unife.it`