

Analisi Matematica 1B - a.a. 2020–2021 - Lezione 01

Lo spazio \mathbb{R}^n

Damiano Foschi

(versione aggiornata il 1 marzo 2021)

Uno dei temi principali dell'insegnamento di Analisi Matematica 1B è lo studio di funzioni di più variabili. Nell'insegnamento precedente di Analisi Matematica 1A è stato affrontato lo studio di funzioni a valori reali che dipendevano da una sola variabile reale. Ora vogliamo allargare il nostro sguardo e considerare funzioni che possono dipendere anche da più parametri reali e che possono assumere valori formati da più numeri reali. Una collezione (ordinata) di n numeri reali (n -upla) può essere vista come un vettore dello spazio \mathbb{R}^n . Per poter studiare funzioni di più variabili abbiamo bisogno di strumenti di calcolo e di analisi che ci permettano di manipolare elementi e sottoinsiemi dello spazio vettoriale \mathbb{R}^n . Ripassiamo allora alcune proprietà algebriche, metriche e topologiche che descrivono la struttura di \mathbb{R}^n .

1 Struttura vettoriale

Lo spazio \mathbb{R}^n è definito come l'insieme delle n -uple di numeri reali,

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Si tratta di uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo \mathbb{R} , su cui sono definite le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per scalare,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, \dots, x_n), & \mathbf{y} &= (y_1, \dots, y_n), & \lambda &\in \mathbb{R}, \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda \mathbf{x} &:= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Il vettore nullo è il vettore le cui componenti sono tutte nulle $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Con un piccolo abuso di notazioni, indicheremo vettori di \mathbb{R}^n sia come vettori colonna che come

vettori riga

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lo spazio *generato* da k vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ di \mathbb{R}^n , è il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n formato da tutte le possibili combinazioni lineari dei k vettori,

$$\text{span} \{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \} := \{ \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}.$$

Dati k vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ in \mathbb{R}^n , essi si dicono *linearmente indipendenti* quando una loro combinazione lineare è nulla se e solo se tutti i coefficienti scalari della combinazione sono nulli,

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

I vettori $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ in \mathbb{R}^n formano una *base* di \mathbb{R}^n quando sono linearmente indipendenti e generano tutto \mathbb{R}^n . Sappiamo, dal corso di Algebra e Geometria, che una base di \mathbb{R}^n è necessariamente formata da n vettori. Nel caso di n vettori di \mathbb{R}^n abbiamo che $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ in \mathbb{R}^n sono linearmente indipendenti se e solo se essi generano tutto \mathbb{R}^n . Come base canonica di \mathbb{R}^n possiamo scegliere gli n vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &:= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &:= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots, \\ \mathbf{e}_k &:= (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\substack{k\text{-esima} \\ \text{posizione}}}, 0, \dots, 0), \\ &\dots, \\ \mathbf{e}_n &:= (0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

La base canonica di \mathbb{R}^3 la indicheremo con

$$\vec{\mathbf{i}} := \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{\mathbf{j}} := \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{\mathbf{k}} := \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1).$$

Esercizio 1.1. Sia $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$.

- Scrivi il vettore \mathbf{x} come combinazione lineare dei vettori della base canonica $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$.
- Scrivi il vettore \mathbf{x} come combinazione lineare dei vettori della base non canonica $(0, 2, 3), (1, 0, 3), (1, 2, 0)$.

Esercizio 1.2. Dati i vettori

$$\mathbf{u} := (0, 1, 3, 5), \quad \mathbf{v} := (-1, 0, 1, 3), \quad \mathbf{w} := (-3, -1, 0, 1),$$

- determina un vettore \mathbf{x} in modo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ formino una base di \mathbb{R}^4 ;
 - determina un vettore \mathbf{y} in modo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{y}$ non formino una base di \mathbb{R}^4 .
-

2 Prodotto scalare

Possiamo definire il *prodotto scalare* tra due vettori facendo il prodotto matriciale del primo vettore in riga con il secondo in colonna,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Si verifica facilmente dalla definizione valgono le seguenti proprietà:

1. simmetria: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;
2. linearità: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$, $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$;
3. positività: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$;
4. prodotto non degenero: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Le ultime due proprietà seguono dal fatto che il prodotto $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ è una somma di quadrati

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2;$$

tale quantità coincide con il quadrato della *lunghezza*, o *norma euclidea*, del vettore \mathbf{x} ,

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}. \quad (1)$$

La norma è sempre una quantità non negativa, $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, e abbiamo

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Si verifica facilmente anche che la norma gode della seguente proprietà di omogeneità:

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Meno immediate, ma di notevole importanza, sono le stime contenute nella seguente proposizione.

Proposizione 2.1. *Per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ valgono le seguenti disuguaglianze:*

- *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:* $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$;
- *disuguaglianza triangolare:* $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Dimostrazione. Per ogni scalare $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \|t\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (t\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (t\mathbf{x} + \mathbf{y}) = t^2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + t\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + t\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 t^2 + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})t + \|\mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Si tratta di un polinomo di secondo grado in t che non assume mai valori negativi, dunque il suo discriminante non può essere positivo, perciò abbiamo

$$0 \geq \Delta := (2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - 4\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$$

da cui segue che

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

Prendendo le radici quadrate a destra e a sinistra otteniamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Riutilizzando i calcoli precedenti nel caso $t = 1$ e applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz troviamo che

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Prendendo le radici quadrate a destra e a sinistra otteniamo la disuguaglianza triangolare. \square

Proposizione 2.2. *La norma di un vettore \mathbf{x} è sempre maggiore o uguale al valore assoluto di ciascuna componente del vettore, ed è sempre minore o uguale alla somma dei valori assoluti di tutte le componenti,*

$$\max_{k=1, \dots, n} |x_k| \leq \|\mathbf{x}\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Siccome $x_k^2 \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 = \|\mathbf{x}\|^2$, prendendo radici quadrate troviamo che $|x_k| \leq \|\mathbf{x}\|$ per ogni k ; dunque la norma è un maggiorante dei valori assoluti delle componenti. D'altra parte, $|x_k| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|$ per ogni k , e dunque

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \sum_{j=1}^n |x_j| = \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right)^2,$$

e prendendo le radici quadrate troviamo che la norma è maggiorata dalla somma dei valori assoluti delle componenti. \square

Come conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, abbiamo che per ogni coppia di vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} non nulli la quantità $\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$ è sempre compresa nell'intervallo $[-1, 1]$. Questo ci permette di definire una nozione di angolo tra due vettori. Ritroviamo in questo modo una interpretazione geometrica del prodotto scalare che coincide con quella a cui siamo stati abituati nello studio dei vettori della fisica.

Definizione 2.3. Definiamo l'*angolo* formato da due vettori non nulli \mathbf{x}, \mathbf{y} di \mathbb{R}^n come il valore $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta, \quad (2)$$

ovvero

$$\theta := \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}.$$

Osservazione 2.4. Per il prodotto scalare non vale la legge dell'annullamento del prodotto. Ad esempio, $(1, -2, 7)$ e $(-4, 5, 2)$ sono due vettori non nulli di \mathbb{R}^3 con prodotto scalare nullo,

$$(1, -2, 7) \cdot (-4, 5, 2) = 1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 5 + 7 \cdot 2 = 0.$$

In generale, dalla formula (2) abbiamo che due vettori non nulli hanno prodotto scalare nullo se e solo se $\cos \theta = 0$ ovvero se e solo se formano tra loro un angolo di $\pi/2$.

Definizione 2.5. Due vettori \mathbf{x}, \mathbf{y} di \mathbb{R}^n si dicono *ortogonali*, $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, quando il loro prodotto scalare è nullo, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Esercizio 2.6. Per ognuna delle seguenti coppie di vettori calcola le rispettive norme, prodotto scalare e angolo compreso:

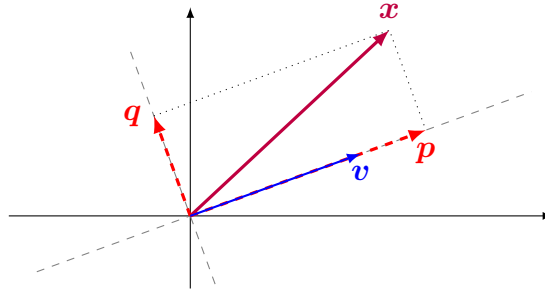
1. $\mathbf{x} = (1, -1), \mathbf{y} = (2, 0)$;
2. $\mathbf{x} = (1, 0, 2), \mathbf{y} = (3, -\sqrt{10}, 1)$;
3. $\mathbf{x} = (1, -2, 3, -4), \mathbf{y} = (-2, 4, -6, 8)$;
4. $\mathbf{x} = (1, 1, 1, -1, -1, -1), \mathbf{y} = (1, -1, 1, -1, 1, -1)$.

Esercizio 2.7. Determina un vettore (x, y, z) con norma 1 che sia ortogonale ai vettori $(1, 2, 3)$ e $(4, 5, 6)$.

Utilizzando il prodotto scalare possiamo ottenere formule per calcolare proiezioni ortogonali senza dover ricorrere all'uso della trigonometria.

Proposizione 2.8. Sia \mathbf{v} un vettore non nullo di \mathbb{R}^n . Ogni vettore \mathbf{x} può essere decomposto in modo unico nella somma di due componenti ortogonali tra loro, $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ con $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$, dove il vettore \mathbf{p} è un multiplo di \mathbf{v} e il vettore \mathbf{q} è ortogonale a \mathbf{v} . La componente \mathbf{p} si dice proiezione ortogonale di \mathbf{x} nella direzione di \mathbf{v} . Formule per calcolare le due componenti sono date da

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \mathbf{v}.$$



Dimostrazione. Vogliamo scrivere \mathbf{x} nella forma

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mathbf{q}$$

con \mathbf{q} ortogonale a \mathbf{v} . Dunque dovrà essere

$$0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{x} - \lambda \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{v},$$

da cui si deduce che

$$\lambda = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Dal formula per λ seguono poi le formule per la proiezione ortogonale $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{v}$ e la componente normale $\mathbf{q} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$. \square

Esercizio 2.9. Siano $\mathbf{u} = (0, 1, 2, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -1)$. Calcola le proiezioni ortogonali in \mathbb{R}^4 di \mathbf{u} nella direzione di \mathbf{v} e di \mathbf{v} nella direzione di \mathbf{u} .

3 Struttura metrica

Tramite la norma possiamo misurare la lunghezza euclidea dei vettori, e anche la distanza tra due vettori misurando la lunghezza della differenza tra i due vettori.

Definizione 3.1. Definiamo la *distanza euclidea* tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ponendo

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dalle proprietà della norma si deducono facilmente le seguenti proprietà fondamentali della distanza:

1. simmetria: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
2. positività: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$;
3. distanza non degenera: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$;
4. disuguaglianza triangolare: $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Esercizio 3.2. Determina le coordinate del punto in \mathbb{R}^3 che sta sulla retta passante per i punti $(1, 2, 3)$ e $(2, 1, 0)$ e che si trova più vicino al punto $(-1, 0, 2)$.

Esercizio 3.3. Tra tutti i punti di \mathbb{R}^3 equidistanti dai tre punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (0, 0, 3)$ determina quello di norma minima.

Ora che sappiamo calcolare le distanze possiamo definire gli intorni sferici dei punti, ovvero le palle metriche.

Definizione 3.4. Dato $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$ definiamo la *palla* $B(\mathbf{p}, r)$ di centro \mathbf{p} e raggio r come l'insieme dei punti la cui distanza da \mathbf{p} è minore di r ,

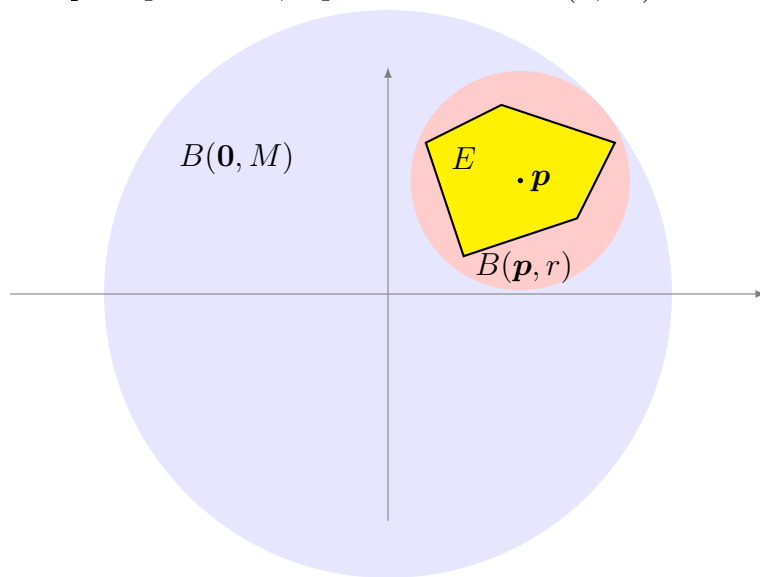
$$B(\mathbf{p}, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < r\}.$$

Tale palla si dice anche *intorno sferico* del punto \mathbf{p} di raggio r .

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *limitato* quando esiste una palla che lo contiene, ciò è equivalente a dire che esiste una costante $M > 0$ tale che $\|\mathbf{x}\| < M$ per ogni $\mathbf{x} \in E$. Infatti se $E \subseteq B(\mathbf{p}, r)$ allora, per la disuguaglianza triangolare, per ogni $\mathbf{x} \in E$ abbiamo

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{p}\| < r + \|\mathbf{p}\| =: M;$$

viceversa, se $\|\mathbf{x}\| < M$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, significa che $E \subseteq B(\mathbf{0}, M)$.



Esercizio 3.5. Siano $B_1 := B(\mathbf{p}, r)$ e $B_2 := B(\mathbf{q}, s)$ due palle di \mathbb{R}^n , con $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ e $r, s > 0$. Supponiamo che l'intersezione $B_1 \cap B_2$ sia non vuota, ovvero che $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| < r + s$, e che nessuna delle due palle sia contenuta dentro l'altra, ovvero che $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| > |r - s|$.

- Determina centro e raggio della più piccola palla che contiene sia B_1 che B_2 .
 - Determina centro e raggio della più grande palla che è contenuta sia in B_1 che in B_2 .
-

4 Struttura topologica

Ricordiamo che dato un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ il complementare E^c di E è il sottoinsieme di \mathbb{R}^n formato dai punti che non appartengono ad E ,

$$E^c := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \notin E\}.$$

Così come avevamo già visto nel primo semestre, con gli intorni sferici possiamo definire le seguenti nozioni topologiche.

Definizione 4.1. Dato un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ diciamo che:

- E è un *intorno* di \mathbf{p} quando E contiene un intorno sferico di \mathbf{p} , ovvero quando esiste un raggio $r > 0$ per il quale si ha che $B(\mathbf{p}, r) \subseteq E$;
- \mathbf{p} è un punto *interno* ad E quando E è un intorno di \mathbf{p} , ovvero quando esiste $r > 0$ tale che $B(\mathbf{p}, r) \subseteq E$;
- \mathbf{p} è un punto *esterno* ad E quando \mathbf{p} è interno al complementare di E , ovvero quando esiste $r > 0$ tale che $B(\mathbf{p}, r) \cap E = \emptyset$;
- \mathbf{p} è un punto *aderente* ad E quando \mathbf{p} non è esterno ad E , ovvero quando per ogni $r > 0$ la palla $B(\mathbf{p}, r)$ contiene almeno un punto di E ;
- \mathbf{p} è un punto di *frontiera* per E quando \mathbf{p} non è né interno e né esterno ad E , ovvero quando per ogni $r > 0$ la palla $B(\mathbf{p}, r)$ contiene almeno un punto di E e un punto del complementare di E .
- \mathbf{p} è un punto *isolato* di E quando esiste un suo intorno sferico la cui intersezione con E contiene solo il punto \mathbf{p} , ovvero quando esiste $r > 0$ tale che $B(\mathbf{p}, r) \cap E = \{\mathbf{p}\}$;
- \mathbf{p} è un punto di *accumulazione* per E quando ogni intorno sferico di \mathbf{p} contiene punti di E diversi da \mathbf{p} , ovvero per ogni $r > 0$ si ha che $B(\mathbf{p}, r) \cap E \setminus \{\mathbf{p}\} \neq \emptyset$.

Denotiamo con $\overset{\circ}{E}$ l'insieme dei punti interni di E , detto *interno*, o *apertura*, di E . Denotiamo con \overline{E} l'insieme dei punti aderenti ad E , detto *aderenza*, o *chiusura*, di E . Denotiamo con ∂E l'insieme dei punti di frontiera per E , detto *frontiera* di E . Denotiamo con DE l'insieme dei punti di accumulazione per E , detto *derivato* di E . L'insieme E si dice *aperto* quando ogni suo punto è interno, ovvero quando E è intorno di ogni suo punto, ovvero quando E coincide con la sua apertura. L'insieme E si dice *chiuso* quando contiene tutti i punti della sua frontiera, ciò equivale a dire che il complementare di E è aperto.

Si verifica facilmente che:

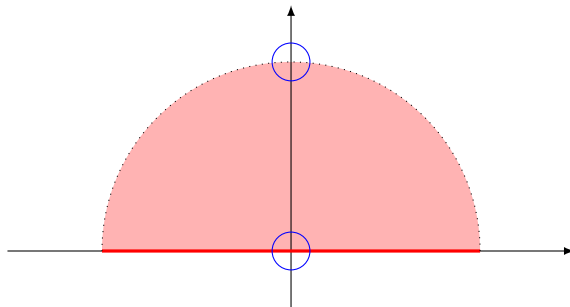
- $\overset{\circ}{E} \subseteq E \subseteq \overline{E}$;
- $\overline{E} = \overset{\circ}{E} \cup \partial E = E \cup \partial E$;

- $\partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c} = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$;
- l'insieme dei punti isolati di E è dato da $\partial E \setminus DE$, ovvero se un punto di frontiera non è un punto isolato di E allora è un punto di accumulazione per E ;
- i punti di accumulazione sono tutti i punti della chiusura che non sono punti isolati.

L'insieme vuoto \emptyset e tutto lo spazio \mathbb{R}^n sono gli unici sottoinsiemi di \mathbb{R}^n che sono sia aperti che chiusi, in quanto hanno frontiera vuota.

Esempio 4.2. Possono esistere sottoinsiemi che non sono né aperti né chiusi, Consideriamo ad esempio

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}.$$

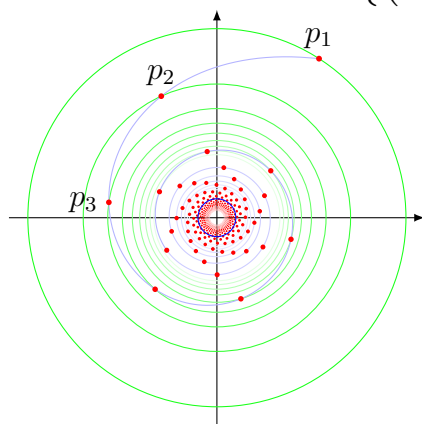


L'insieme E non è aperto in quanto il punto $(0,0)$ appartiene ad E ma non è interno, in quanto ogni suo intorno sferico contiene punti con ordinata negativa. L'insieme E non è chiuso in quanto il punto $(0,1)$ non appartiene ad E ma non è esterno, in quanto ogni suo intorno sferico contiene punti di E della forma $(0, y)$ con $y < 1$. L'apertura, la frontiera e la chiusura di E sono dati da

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{E} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}; \\ \partial E &:= \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}; \\ \overline{E} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

In questo caso l'insieme dei punti di accumulazione coincide con la chiusura, $DE = \overline{E}$, in quanto non ci sono punti isolati.

Esempio 4.3. Consideriamo l'insieme $E := \left\{ \left(\frac{\cos(k)}{\sqrt{k}}, \frac{\sin(k)}{\sqrt{k}} \right) : k \in \mathbb{N} \right\}$.



$$\begin{aligned} p_k &:= \frac{1}{\sqrt{k}} (\cos k, \sin k) \\ \|p_k\| &= \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned}$$

Ogni punto di E è un punto isolato. L'unico punto di accumulazione per E è l'origine $(0, 0)$, in quanto ogni suo intorno contiene infiniti punti di E . In questo caso abbiamo

$$\mathring{E} = \emptyset, \quad \partial E = \overline{E} = E \cup \{(0, 0)\}, \quad DE = \{(0, 0)\}.$$

Esercizio 4.4. Rappresenta graficamente i seguenti sottoinsiemi del piano cartesiano \mathbb{R}^2 , Determina la loro frontiera e l'insieme dei punti di accumulazione. Determina se si tratta di insiemi aperti, chiusi, limitati o non limitati.

1. $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 3\}$;
 2. $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2, y \leq 2\}$;
 3. $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, x + y < 4\}$;
 4. $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 \leq 3, 2y \leq x + 1\}$;
 5. $E := \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\}$.
-

5 Prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3

Nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 è possibile definire un'operazione tra vettori che produce come risultato ancora un vettore con proprietà algebriche e geometriche interessanti e utili, simili a quelle di un prodotto,

Definizione 5.1. Il *prodotto vettoriale* di due vettori $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ di \mathbb{R}^3 è il vettore definito da

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &:= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{pmatrix} \vec{i} - \det \begin{pmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{pmatrix} \vec{j} + \det \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix} \vec{k} \\ &= \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove l'ultimo determinante è da intendersi in modo simbolico.

Vediamo alcune proprietà algebriche del prodotto vettoriale. Si tratta di una operazione bilineare, ovvero lineare rispetto a ciascuno dei suoi due argomenti,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), & (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), & \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) &= \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Si nota immediatamente dalla definizione che scambiando i due vettori tra loro il prodotto vettoriale cambia di segno, si tratta dunque di una operazione *anticommutativa*,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

In particolare abbiamo che $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{a}$ e dunque $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ per ogni vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Per il prodotto vettoriale non vale la proprietà associativa, ma vale l'identità di Jacobi:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Esercizio 5.2. Calcola i prodotti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right], \quad \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5.3. Verifica la validità della formula di Lagrange:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}; \quad (4)$$

poi utilizzala per verificare la validità dell'identità di Jacobi (3).

Se combiniamo il prodotto scalare di un vettore con il prodotto vettoriale di altri due vettori, otteniamo un prodotto triplo che coincide con il determinante della matrice formata dalle componenti dei tre vettori,

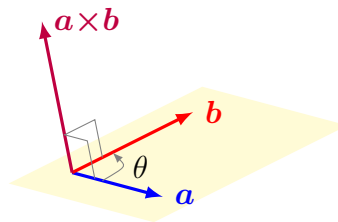
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) - a_z(b_x c_y - b_y c_x) = \\ &= a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_z b_x c_y - a_z b_x c_y - a_z b_y c_x = \det \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Siccome permutando in modo ciclico le righe di una matrice 3×3 il determinante non cambia possiamo dedurre che

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (6)$$

Proposizione 5.4. Il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è sempre ortogonale sia al vettore \mathbf{a} che al vettore \mathbf{b} .

Dimostrazione. Basta osservare che i prodotti tripli $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ e $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, per via della formula (5), sono dei determinati di matrici con due righe uguali e dunque risultano nulli. \square



Dunque tramite il prodotto vettoriale possiamo generare vettori perpendicolari al piano che contiene due vettori linearmente indipendenti.

Calcoliamo la norma del prodotto vettoriale,

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) && [\text{per (1): } \|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}] \\
 &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) && [\text{per (6): } \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \\
 &= \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}) && [\text{per (4): } \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}] \\
 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 && [\text{per linearità del prodotto scalare e per (1)}] \\
 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - (\cos \theta)^2) && [\text{per definizione dell'angolo } \theta \text{ tra } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b}] \\
 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (\sin \theta)^2.
 \end{aligned}$$

Otteniamo così che la norma del prodotto vettoriale è pari al prodotto delle norme dei due vettori moltiplicato per il seno dell'angolo tra i due vettori,

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta, \quad (7)$$

dove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{b} . Osserviamo che dai calcoli effettuati per arrivare a questa formula si ricava anche l'identità di Lagrange,

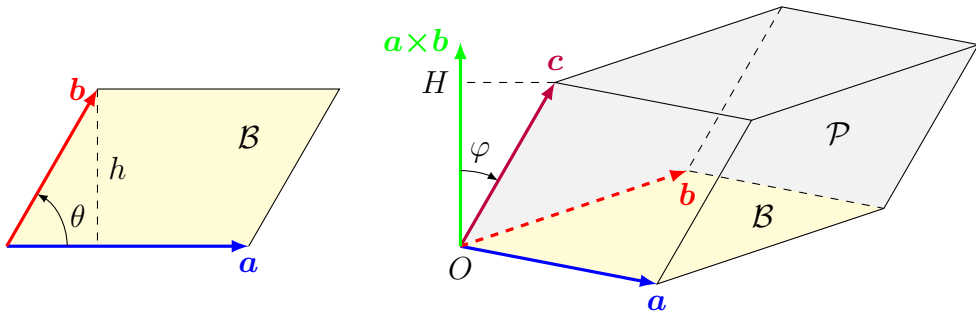
$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 + \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2.$$

Osservazione 5.5. Quando due vettori sono paralleli formano un angolo nullo, $\theta = 0$, o piatto, $\theta = \pi$, in entrambi i casi il seno dell'angolo è zero e dunque anche il prodotto vettoriale dei due vettori è nullo.

Il seguente teorema illustra l'utilità del prodotto vettoriale nel calcolo di aree e di volumi.

Teorema 5.6. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tre vettori in \mathbb{R}^3 . Sia \mathcal{B} il parallelogramma individuato dai vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} . Sia \mathcal{P} il parallelepipedo individuato dai vettori \mathbf{a}, \mathbf{b} e \mathbf{c} . Allora abbiamo:

$$\text{Area}(\mathcal{B}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|, \quad \text{Volume}(\mathcal{P}) = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|. \quad (8)$$



Dimostrazione. Sappiamo che l'area del parallelogramma \mathcal{B} si può calcolare come prodotto della lunghezza di una base per l'altezza relativa a tale base. Se scegliamo il vettore \mathbf{a} come base per \mathcal{B} , la relativa altezza avrà lunghezza $h = \|\mathbf{b}\| \sin \theta$, dove $\theta \in [0, \pi]$ è l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{b} . Dunque, per la formula (7) abbiamo

$$\text{Area}(\mathcal{B}) = \|\mathbf{a}\| \cdot h = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|.$$

Il volume del parallelepipedo \mathcal{P} si può calcolare come prodotto dell'area di una base per l'altezza relativa a tale base. Se scegliamo il parallelogramma \mathcal{B} come base per \mathcal{P} , la relativa altezza avrà lunghezza $H = \|\mathbf{c}\| |\cos \varphi|$, dove $\varphi \in [0, \pi]$ è l'angolo che il terzo vettore \mathbf{c} forma con il prodotto vettoriale $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, che sappiamo essere perpendicolare al piano che contiene la base \mathcal{B} . Dunque, per la formula (2) abbiamo

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \text{Area}(\mathcal{B}) \cdot H = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| |\cos \varphi| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|.$$

□

Esercizio 5.7. Spiega perché tre vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} di \mathbb{R}^3 formano una base di \mathbb{R}^3 se e solo se $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$.

Esercizio 5.8. Determina un vettore \mathbf{n} che abbia lunghezza 1 e che sia perpendicolare al piano passante per i punti

$$A = (1, 2, 3), \quad B = (4, 0, -1), \quad C = (-2, 3, 0).$$

Esercizio 5.9. Utilizzando la formula per l'area di un parallelogramma (8) elabora una formula per calcolare l'area di un triangolo una volta note le coordinate dei suoi tre vertici. Poi usala per calcolare l'area del triangolo che ha come vertici i punti

$$A = (1, 2, 3), \quad B = (4, 0, -1), \quad C = (-2, 3, 0).$$

Esercizio 5.10. Quali condizioni devono essere soddisfatte dai vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} per garantire che l'equazione $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ abbia una soluzione per \mathbf{x} ? La soluzione quando esiste è unica?

Esercizio 5.11. Determina due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} di \mathbb{R}^3 sapendo che

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-12, 9, 10), \quad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{14}, \quad \mathbf{a} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0.$$

6 Cambiamenti di coordinate

Quando fissiamo una base $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ di un qualsiasi spazio vettoriale reale V di dimensione n , possiamo identificare i vettori dello spazio V con le n -ple di \mathbb{R}^n ; vi è infatti una corrispondenza lineare e biunivoca tra le combinazioni lineari dei vettori della base e le n -ple dei coefficienti della combinazione lineare,

$$\mathbf{v} := x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n \in V \mapsto \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Questo ci permette di trattare V alla pari dello spazio euclideo \mathbb{R}^n utilizzando coordinate cartesiane lineari. Cambiare scelta della base porta a cambiare il sistema di coordinate. L'algebra delle matrici ci permette di descrivere la relazione tra diversi sistemi lineari di coordinate.

Questi sistemi di coordinate cartesiane non sono gli unici possibili, a volte può essere più conveniente adottare sistemi di coordinate nonlineari. Ad esempio spesso risulta essere di grande utilità geometrica utilizzare coordinate polari nel piano o nello spazio.

6.1 Trasformazioni lineari di coordinate su \mathbb{R}^n

Le componenti di un generico vettore $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di \mathbb{R}^n non sono altro che le coordinate di \mathbf{x} lette rispetto alla base canonica; abbiamo infatti

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Fissata un'altra base $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ di \mathbb{R}^n , le coordinate di \mathbf{x} rispetto a tale base sono i coefficienti dell'unica combinazione lineare degli elementi della base che ricostruisce il vettore,

$$\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{b}_1 + \xi_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \xi_n \mathbf{b}_n, \quad (9)$$

e formano un vettore $\boldsymbol{\xi} := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ sempre di \mathbb{R}^n . Consideriamo la matrice quadrata $n \times n$ che ha come colonne i vettori della base,

$$M := [\mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \dots; \mathbf{b}_n].$$

L'equazione (9) può essere riscritta nella forma matriciale

$$\mathbf{x} = M\boldsymbol{\xi},$$

considerando \mathbf{x} e $\boldsymbol{\xi}$ come vettori colonna. Essendo i vettori della base linearmente indipendenti, la matrice M risulta essere invertibile. Possiamo allora invertire la relazione tra le coordinate \mathbf{x} e le coordinate $\boldsymbol{\xi}$ e ottenere

$$\boldsymbol{\xi} = M^{-1}\mathbf{x},$$

Esempio 6.1. Consideriamo nel piano \mathbb{R}^2 la base canonica formata dai versori $\mathbf{i} := (1, 0)$ e $\mathbf{j} := (0, 1)$, e la base (non canonica) formata dai vettori $\mathbf{a} := (4, -1)$ e $\mathbf{b} := (3, 2)$. Determiniamo la relazione tra le coordinate di un generico punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ rispetto alle due basi. Se scriviamo

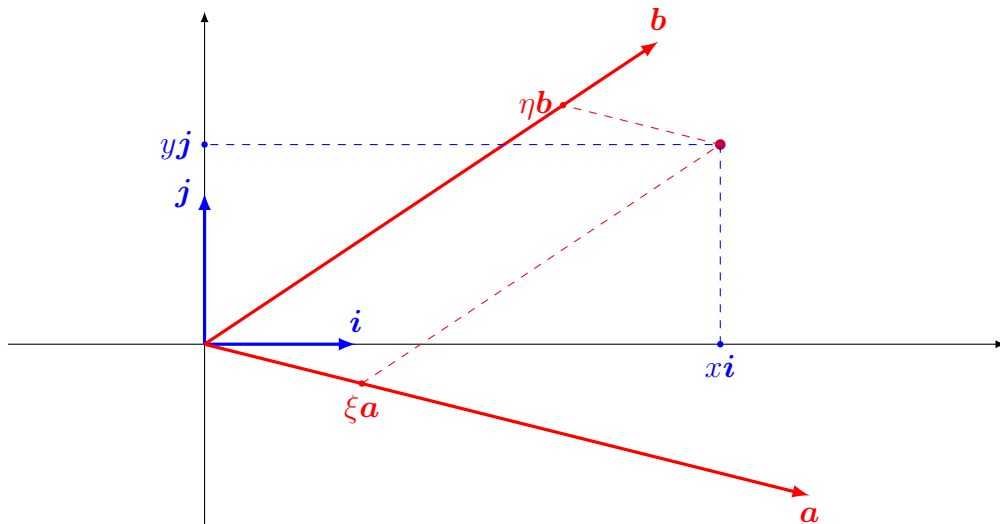
$$(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \xi\mathbf{a} + \eta\mathbf{b},$$

abbiamo che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\xi + 3\eta \\ -\xi + 2\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Invertendo la matrice (ovvero ricavando ξ e η dal sistema) otteniamo

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11}x - \frac{3}{11}y \\ \frac{1}{11}x + \frac{4}{11}y \end{pmatrix}.$$



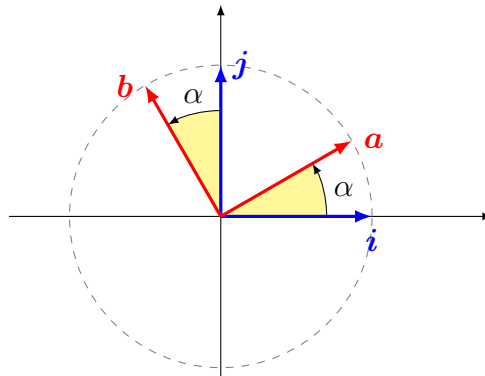
Una base $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ di \mathbb{R}^n si dice *ortonormale* quando è formata da vettori di norma unitaria (versori) a due a due ortogonali tra loro,

$$\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{b}_k = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k, \\ 1, & \text{se } j = k. \end{cases}$$

La matrice M associata ad una base ortonormale è una matrice *ortogonale*, in quanto verifica la condizione $M^t M = I$, dove M^t indica la trasposta di M e I indica la matrice identità; in particolare l'inversa di M coincide con la sua trasposta, $M^{-1} = M^t$.

Esempio 6.2 (Rotazioni nel piano). Se ruotiamo di un angolo α in senso antiorario i vettori \mathbf{i} e \mathbf{j} della base canonica di \mathbb{R}^2 otteniamo ancora una base ortonormale formata dai vettori

$$\mathbf{a} := (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad \mathbf{b} := (-\sin \alpha, \cos \alpha).$$



La matrice associata a questa rotazione del sistema di riferimento è la matrice ortogonale

$$M_\alpha := [\mathbf{a}; \mathbf{b}] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad M_\alpha^{-1} = M_\alpha^t = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Un punto (x, y) nel sistema di coordinate ruotato avrà coordinate (ξ, η) date da

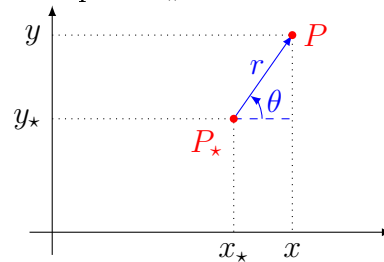
$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = M_\alpha^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \\ -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6.3. Determina le coordinate del punto P di \mathbb{R}^2 rispetto alla base formata dai vettori $(1, 2)$ e $(-3, 4)$ sapendo che P ha coordinate $(5, -6)$ rispetto alla base formata dai vettori $(1, 3)$ e $(-2, 4)$.

Esercizio 6.4. Sia M_α la matrice definita in (10) che descrive la rotazione del sistema di coordinate di un angolo α . Dati due angoli α e β calcola il prodotto matriciale $M_\alpha M_\beta$. Cosa ottieni?

6.2 Coordinate polari in \mathbb{R}^2

Dato un punto del piano $P_\star = (x_\star, y_\star) \in \mathbb{R}^2$, il sistema di *coordinate polari* centrato in P_\star permette di descrivere la posizione nel piano di un punto $P = (x, y)$ specificando la sua distanza r dal punto P_\star e l'angolo θ formato dal vettore $P - P_\star$ con il semiasse positivo delle ascisse. Chiameremo r *raggio*, o *modulo*, di P rispetto al polo P_\star ; chiameremo θ *angolo*, o *argomento*, di P rispetto al polo P_\star .



Avremo quindi che r , la distanza euclidea del punto P da P_\star , è data da

$$r = \|P - P_\star\| = \sqrt{(x - x_\star)^2 + (y - y_\star)^2};$$

mentre θ , l'angolo che il vettore $P - P_\star$ forma con il semiasse positivo delle ascisse, è determinato, a meno di multipli interi di 2π , dalle condizioni

$$\cos \theta = \frac{x - x_\star}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y - y_\star}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y - y_\star}{x - x_\star}.$$

Da queste condizioni possiamo ricavarci (x, y) in funzione di (r, θ) e otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x = x_\star + r \cos \theta, \\ y = y_\star + r \sin \theta. \end{cases} \quad (11)$$

Quando si sceglie come polo di riferimento l'origine degli assi, $P_\star = O = (0, 0)$, il sistema di coordinate polari (11) si semplifica e assume la forma:

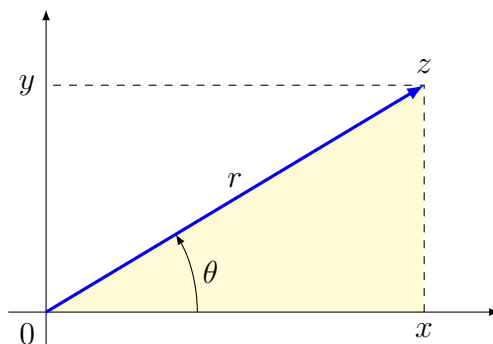
$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad (12)$$

dove il raggio r è dato da

$$r = \|P\| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

mentre l'angolo θ è determinato, a meno di multipli interi di 2π , dalle condizioni

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (13)$$



Osservazione 6.5. È chiaro che se al posto di θ sostituiamo il valore $\theta + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, ritroviamo lo stesso punto nel piano, avendo semplicemente aggiunto un multiplo dell'angolo giro all'argomento. Esistono quindi infiniti possibili valori per l'argomento (essi formano una progressione aritmetica di passo 2π). A volte può essere utile individuare uno *principale* tra tutti i possibili valori. Si può convenire di scegliere ad esempio l'argomento che si trova nell'intervallo $]-\pi, \pi]$, oppure quello che si trova nell'intervallo $[0, 2\pi[$. È una pura questione di convenzioni. Dovendo scegliere io preferisco definire come *argomento principale* quello che sta nell'intervallo $]-\pi, \pi]$.

Grazie alle formule (13) utilizzando le funzioni inverse delle funzioni trigonometriche è possibile ricavare il valore dell'argomento θ a partire dalle coordinate cartesiane (x, y) del punto. Attenzione però, siccome le funzioni trigonometriche sono funzioni periodiche, prima di poter definire le loro inverse abbiamo dovuto restringere il loro dominio ad opportuni intervalli; le corrispondenti funzioni inverse restituiscono solo valori contenuti in tali intervalli. Ricordiamo pertanto che:

- la funzione $\theta = \arccos(x)$ è la funzione inversa della funzione $x = \cos \theta$ ristretta all'intervallo $[0, \pi]$; per angoli compresi nell'intervallo $]-\pi, 0[$ possiamo utilizzare il fatto che angoli opposti hanno lo stesso coseno,

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta);$$

- la funzione $\theta = \arcsin(x)$ è la funzione inversa della funzione $x = \sin \theta$ ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, per angoli compresi negli intervalli $]-\pi, -\pi/2[$ e $]\pi/2, \pi[$ possiamo utilizzare il fatto che angoli supplementari hanno lo stesso seno

$$\sin(\theta) = \sin(\pi - \theta) = \sin(-\pi - \theta);$$

- la funzione $\theta = \arctan(x)$ è la funzione inversa della funzione $x = \tan \theta$ ristretta all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$, per angoli compresi negli intervalli $]-\pi, -\pi/2[$ e $]\pi/2, \pi[$ possiamo utilizzare la periodicità della tangente,

$$\tan(\theta) = \tan(\theta - \pi) = \tan(\theta + \pi).$$

Utilizzando queste osservazioni otteniamo le seguenti formule:

Proposizione 6.6. *Sia $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto del piano.*

- Se P si trova all'interno del primo quadrante, ovvero quando $x > 0$ e $y > 0$, avrà argomento contenuto in $]0, \pi/2[$; dunque possiamo tranquillamente invertire le relazioni (13):

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Se P si trova all'interno del secondo quadrante, ovvero quando $x < 0$ e $y > 0$, avrà argomento contenuto in $]\pi/2, \pi[$; dunque quando invertiamo le relazioni (13) dobbiamo correggere i valori dell'arcoseno e dell'arcotangente:

$$\theta = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Se P si trova all'interno del terzo quadrante, ovvero quando $x < 0$ e $y < 0$, avrà argomento contenuto in $]-\pi, -\pi/2[$; dunque quando invertiamo le relazioni (13) dobbiamo correggere i valori di arcocoseno, arcoseno e arcotangente:

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = -\pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Se P si trova all'interno del quarto quadrante, ovvero quando $x > 0$ e $y < 0$, avrà argomento contenuto in $]-\pi/2, 0[$; dunque quando invertiamo le relazioni (13) dobbiamo correggere i valori dell'arcocoseno:

$$\theta = -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Se P si trova sul semiasse positivo delle ascisse, ovvero quando $x > 0$ e $y = 0$, il suo argomento è $\theta = 0$.
- Se P si trova sul semiasse negativo dell'ascisse, ovvero quando $x < 0$ e $y = 0$, il suo argomento è $\theta = \pi$.
- Se P si trova sul semiasse positivo delle ordinate, ovvero quando $x = 0$ e $y > 0$, il suo argomento è $\theta = \frac{\pi}{2}$.

- Se P si trova sul semiasse negativo delle ordinate, ovvero quando $x = 0$ e $y < 0$, il suo argomento è $\theta = -\frac{\pi}{2}$.
- Se P coincide con il polo O , ovvero quando $x = 0$ e $y = 0$, allora il suo argomento non è definito.

Esercizio 6.7. Determina le coordinate polari dei punti

$$A := (2, 2), \quad B := (1, \sqrt{3}), \quad C := (0, \sqrt{3}),$$

rispetto a ciascuno dei seguenti poli

$$O := (0, 0), \quad P := (2, 0), \quad Q := (0, 1).$$

Esercizio 6.8. Determina le coordinate cartesiane dei punti che rispetto all'origine hanno le seguenti coordinate polari:

A: $r = 4, \theta = -\frac{\pi}{6}$;

B: $r = \pi, \theta = -\pi$;

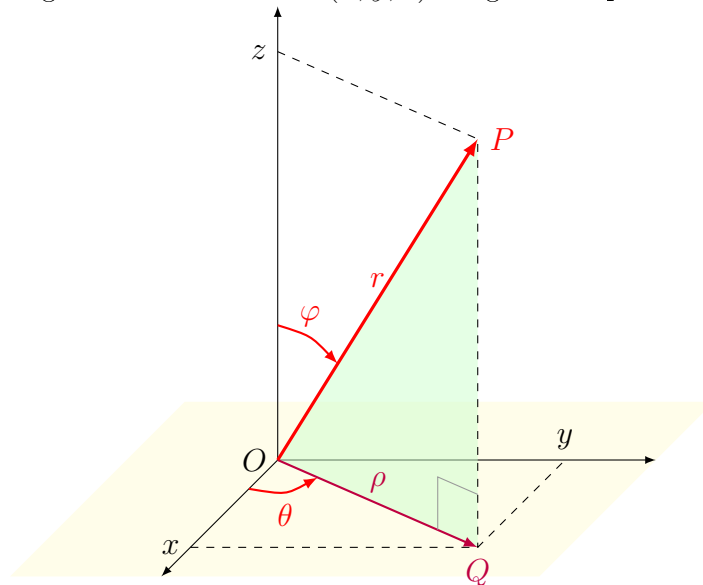
C: $r = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = \frac{1}{2}$;

D: $r = 1, \theta = 0$.

6.3 Coordinate sferiche in \mathbb{R}^3

Nello spazio \mathbb{R}^3 possiamo individuare un punto $P := (x, y, z)$ utilizzando come tre coordinate: la distanza del punto rispetto ad un'origine fissata, l'angolo che il vettore dall'origine al punto forma con un asse prefissato e un altro angolo determinato dall'orientamento del semipiano uscente dall'asse prefissato e che contiene il vettore.

Sia $O = (0, 0, 0)$ l'origine di \mathbb{R}^3 e sia $P = (x, y, z)$ un generico punto non nullo di \mathbb{R}^3 .



Indichiamo con r la distanza di P da O , essa coincide con la norma di P ,

$$r = \|P\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Sia poi φ l'angolo formato dal vettore P con il versore \vec{k} dell'asse verticale. L'angolo φ viene detto angolo di *colatitudine* e può assumere valori compresi tra 0 e π . abbiamo

$$z = P \cdot \vec{k} = r \cos \varphi,$$

Sia $Q := (x, y, 0)$ la proiezione ortogonale di P sul piano x - y , la distanza ρ di Q dall'origine coincide con la lunghezza del cateto del triangolo rettangolo OPQ opposto al vertice P e l'angolo in P è uguale φ , mentre l'ipotenusa è lungo r , dunque

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \varphi,$$

Utilizziamo coordinate polari (ρ, θ) nel piano x - y per indicare il punto Q , abbiamo

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

L'angolo θ viene detto angolo di *longitudine* e può assumere valori che variano in un intervallo di lunghezza 2π , ad esempio $[-\pi, \pi]$, oppure $[0, 2\pi]$. Mettendo insieme tutte queste relazioni otteniamo il sistema delle *coordinate sferiche*,

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$